

Dual Pairs of Affine Lie Algebras in Spin Representations.

名古屋大学(理) 長谷川 浩司(Kohji Hasegawa)

§0. 要約 本稿の主題は Affine Lie 環の integrable highest weight 表現の良い実現を与える事であり、 $GL(N, \mathbb{C}) \times \mathfrak{g}_\mu$ の Tensor 空間上の表現に関する Weyl の相互律の Affine Version を構成する。

§1. 序 $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して,

$$\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c,$$

$$(1.1) \quad \begin{cases} [x \otimes t^m, y \otimes t^n] := [x, y] \otimes t^{m+n} + m \delta_{m+n, 0} (x, y) c, & [c, \hat{\mathfrak{g}}] := 0, \\ \text{但 } (\cdot, \cdot) \text{ は } |\text{long root}|^2 = 2 \text{ と正規化した } \mathfrak{g} \text{ の Killing form} \end{cases}$$

で定まる Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Affine 化と呼ぶ。(以後 $x \otimes t^m$ を $x(m)$ と書く。)

$\mathfrak{g}$ は有限次元単純 Lie 環の“一般化”である Kac-Moody Lie 環の一種である Affine Lie 環のうち, non-twisted と呼ばれるものとなり, $\mathfrak{g}$ を X_2 型とすれば $\hat{\mathfrak{g}}$ は $X_2^{(1)}$ 型である。Affine Lie 環は近年 KP 方程式系の理論, 統計物理, 場の量子論など数理物理の各方面で盛んに姿を現わしており, その表現の良い実現が与えられる:

とは望ましいことと思われる。

群の表現の実現で有名なものに, $GL(N, \mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_M$ に関する Weyl の相互律

$$(1.2) \quad \bigotimes^M \mathbb{C}^N \simeq \bigoplus_{Y: \text{Young 図形}} L_Y^{GL(N)} \otimes L_Y^{\mathfrak{S}_M}$$

がある。ここで L_Y^G は Y で parametrize される $G = GL(N)$ or $\mathfrak{S}_M$ の既約表現を表わす。 $GL(N)$ 加群としての $\bigotimes^M \mathbb{C}^N$ は既約でなく, 既約成分も重複度をもつが, $\mathfrak{S}_M$ が可換に働く為「同時既約分解」できて $GL(N) \times \mathfrak{S}_M$ -加群としては重複度 1 で分解する。更に $GL(N)$ 及び $\mathfrak{S}_M$ の有限次元既約表現は全てこの既約成分として現われる。

この Weyl の理論をお手本として, Affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の場合に, 有限次元単純 Lie 環の有限次元表現に対応する integrable highest weight 表現の良い実現を与えたい。しかし $\bigotimes^M \mathbb{C}^N$ を考えるのは, 既に $sp(l)$ や $o(n)$ の場合に困難である。そこで代わりのお手本として「Spin 表現の dual pair」を考える。この説明の為やはり $GL(N)$ を例にとると, これは自然に外積代数 $\Lambda(\mathbb{C}^N)$ に働き, 各 $\Lambda^p(\mathbb{C}^N)$ が既約成分である。するとこのとき,

$$(1.3) \quad \bigotimes^M \Lambda(\mathbb{C}^N) \simeq \bigoplus_{Y \in R_{MN}} L_Y^{GL(N)} \otimes L_{\pm Y}^{SL(M)} \quad \left(R_{MN} \text{ は } M \times N \text{ の長方形に} \right. \\ \left. \text{含める Young 図形全体} \right)$$

となる。即ち $GL(N)$ 加群 $\bigotimes^M \Lambda(\mathbb{C}^N)$ には, $SL(M)$ が Commutant として働く。これは実は $\bigotimes^M \Lambda(\mathbb{C}^N) \simeq \Lambda(\mathbb{C}^{MN})$ を Clifford 代数 $Cl(\mathbb{C}^{2MN})$ の Spin 表現の空間とみなし, それを $gl(N) \oplus sl(M) \subset gl(MN) \subset o(2MN) \subset Cl(\mathbb{C}^{2MN})$ により $GL(N) \times SL(M)$ に制限したことになる。これには更

に B_ℓ , C_ℓ , D_ℓ 型の Version もあって,

$$(1.4) \quad \mathfrak{sp}(M) \oplus \mathfrak{sp}(N) \hookrightarrow \mathfrak{o}(4MN), \quad \mathfrak{o}(M) \oplus \mathfrak{o}(N) \hookrightarrow \mathfrak{o}(MN)$$

という pair の加群として, 各右辺の Spin 表現の空間 $\wedge(\mathbb{C}^{2MN})$, $\wedge(\mathbb{C}^{\lfloor \frac{MN}{2} \rfloor})$ は重複度 1 で分解する ($[n]$ は Gauss 記号). 一般にこのような部分代数の pair を "dual pair" と呼ぶ ($[H]$): 即ち,

(1.5) 代数 A の互いに可換な部分代数 A_1, A_2 と, A -加群 V について, V が $A_1 \oplus A_2$ -加群として重複度 1 で直既約分解される時, (A_1, A_2) は V において dual pair を成す, という。

さて問題の affine Version であるが, Spin 表現 (の類似) は, $\hat{\alpha}(\ell)$ のときに $(\ell \times \mathbb{Z}_{>0})$ の文字で生成される外積代数 $\wedge(\hat{W}_-^\ell)$ 上に構成されているから ([FF], [F1~2]), 上の dual pair 達の affine version を考えてはどうか? と考える。結果は成功であって, 本稿の主定理はこの $\hat{\alpha}(\ell)$ の Spin 表現においても, 次の pair 達 (1.6):

$$(\langle \hat{\mathfrak{g}} \rangle \ltimes \hat{\mathfrak{q}}(\hat{M})) + \hat{\mathfrak{a}}(\hat{N}) \hookrightarrow \hat{\alpha}(2MN), \quad \hat{\mathfrak{sp}}(\hat{M}) + \hat{\mathfrak{sp}}(\hat{N}) \hookrightarrow \hat{\mathfrak{o}}(4MN), \quad \hat{\mathfrak{o}}(\hat{M}) + \hat{\alpha}(\hat{N}) \hookrightarrow \hat{\mathfrak{o}}(MN)$$

が有限次元の時と全く同様に dual pair となる事を主張する:

(1.7) Main Theorem.

$$(A) \quad \wedge(\hat{W}_-^{2MN}) \simeq \bigoplus_{Y \in R_{M,N}} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mathfrak{g}}}(\hat{Y}, N) \otimes L_{\hat{\mathfrak{g}}^\dagger}^{\hat{\mathfrak{g}}^\dagger}(\hat{Y}^\dagger, M)$$

: as a $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^\dagger = (\langle \hat{\mathfrak{g}} \rangle \ltimes \hat{\mathfrak{q}}(\hat{M}))^\dagger \oplus \hat{\mathfrak{a}}(\hat{N})$ -module,
(see §4 for $\dagger$)

$$(C) \quad \wedge(\hat{W}_-^{4MN}) \simeq \bigoplus_{Y \in R_{MN}} L_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\hat{\mathfrak{g}}}(\hat{Y}, N) \otimes L_{\hat{\mathfrak{g}}^\dagger}^{\hat{\mathfrak{g}}^\dagger}(\hat{Y}^\dagger, M)$$

: as a $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^\dagger = \hat{\mathfrak{sp}}(\hat{M}) \oplus \hat{\mathfrak{sp}}(\hat{N})$ -module,

$$(B) \quad \Lambda(\hat{W}_-^{(2m+1) \times (2m+1)}) \simeq \bigoplus_{\substack{\gamma \in R_{mn}, \\ a = \text{id}, \sigma_0}} \hat{L}^{\hat{\gamma}}(a(\gamma + \Lambda_m, 2m+1)) \otimes \hat{L}^{\hat{\gamma}^+}(a(\gamma^+ + \Lambda_n, 2m+1))$$

: as a $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^+ = \hat{\mathfrak{o}}(2m+1) \oplus \hat{\mathfrak{o}}(2m+1)$ -module,

$$(BD) \quad \Lambda(\hat{W}_-^{(2m+1) \times 2n}) \simeq \bigoplus_{\substack{\gamma \in R_{mn}, \\ a = \text{id}, \sigma_0, \\ b = \text{id}, \sigma_n}} \hat{L}^{\hat{\gamma}}(a(\gamma, 2n)) \otimes \hat{L}^{\hat{\gamma}^+}(a(b(\gamma^+ + \Lambda_n, 2m+1)))$$

: as a $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^+ = \hat{\mathfrak{o}}(2m+1) \oplus \hat{\mathfrak{o}}(2n)$ -module,

$$(D) \quad \Lambda(\hat{W}_-^{4mn}) \simeq \bigoplus_{\substack{\gamma \in R_{mn}, \\ (a, a^+) = (\text{id}, \text{id}), (\sigma_0, \sigma_0), \\ (\sigma_n, \sigma_n), (\sigma_0 \sigma_n, \sigma_0 \sigma_n)}} \hat{L}^{\hat{\gamma}}(a(\gamma, 2n)) \otimes \hat{L}^{\hat{\gamma}^+}(a^+(\gamma^+, 2n))$$

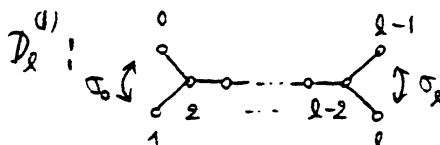
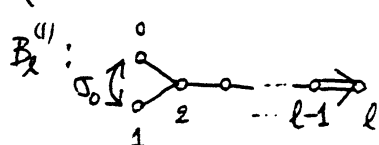
: as a $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}^+ = \hat{\mathfrak{o}}(2n) \oplus \hat{\mathfrak{o}}(2n)$ -module.

但し、記号の意味は以下の通り：

(1.8) $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とし simple roots を固定するとき、
 $\mathfrak{g}$ の “dominant integral weight” $\hat{\lambda} \in (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^*$ は $(\lambda, \ell) := (\hat{\lambda}|_{\mathfrak{h} \otimes \mathbb{R}}, \hat{\lambda}(c))$
 で決まり、この λ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の dominant integral weight となるの
 で “通常のように” Young 図形 γ と同一視できる。そのときには
 $\hat{\lambda} = (\gamma, \ell)$ と書き、又 $\hat{\mathfrak{g}}$ の highest weight module $\hat{L}^{\hat{\gamma}}(\hat{\lambda}) \in \hat{L}^{\hat{\gamma}}(\gamma, \ell)$
 と書いた。更に $R_{mn} \ni \gamma \mapsto \gamma^+ \in R_{nm}$ は次の様に定義される。

$$R_{mn} \ni \gamma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \mapsto \gamma^+ := \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \in R_{nm} \quad (m=3, n=6).$$

(1.9) σ_0, σ_2 は $B_2^{(1)}$ の $D_2^{(1)}$ の Dynkin 図形の下記の自己同型が誘導する
 $\text{Aut}(\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C})^*$ の元を表わす。



主定理(1.7)の系として、表現の分岐則に関する幾つかの双対性が得られる。それは $GL(N) \times G_m$ のときの相互律から、 G_m の表現の分岐則 (subray への分解) と $GL(N)$ の表現の分岐則 (Tensor 積の分解) との間の双対性が得られるのと全く同様である。(実際には、双対性が先に [JM] によって提出されており、これを Spin 表現の立場から見直して得たのが上の結果である。)

Weil 表現との関係については §6 で触れる。

§2. Affine Lie 環とその integrable highest weight 表現

単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対し (1.1) によるその affine 化 $\hat{\mathfrak{g}}$ を考える。 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ と $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の simple roots Π を選んで $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, 但し $\mathfrak{n}_{\pm} := \sum \mathfrak{g}_{\alpha}$ (α は正 roots を動く), を三角分解とする。すると $\hat{\mathfrak{g}}$ も対応して標準的に“三角分解”される:

$$(2.1) \quad \hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_- \oplus \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}_+,$$

$$\text{但 } \hat{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c, \quad \hat{\mathfrak{n}}_{\pm} := \mathfrak{n}_{\pm} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{g} \otimes t^{\pm n} \right).$$

これにより最高 weight 加群等の概念が単純 Lie 環と同様に定められる。最高 weight $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ をもつ最高 weight 加群 (λ -h.w.m. と呼ぶ) で既約なものを $L^{\mathfrak{g}}(\lambda)$ と書く。

さて $\hat{\mathfrak{g}}$ の weight 加群 (π, V) が integrable であるとは、 $\mathfrak{n}_{\pm} \otimes t^n \subset \hat{\mathfrak{g}}$ のすべての元が V 上 “locally nilpotent”, つまり

$$(2.2) \quad x \in \mathfrak{n}_{\pm} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}], v \in V \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \pi(x)^m v = 0$$

が成り立つことを言う。これは各 $\mathcal{G}_\alpha \otimes t^n$ ($\alpha \neq 0$) に対応する $\mathcal{AL}(2)$ -triple の表現が $SL(2, \mathbb{C})$ 迄 "integrate" できる事と同値であり, integrable 表現は有限次元半単純 Lie 環の有限次元表現の類似物と言える。そしてその場合と同様, integrable な既約 h.w.m. は $\hat{\mathcal{G}}$ の "dominant integral weight" $\hat{\lambda} \in \hat{P}_+ \subset \hat{\mathcal{H}}^*$ と一対一に対応する:

(2.3) 定理 [K] $L(\hat{\lambda}) : \text{integrable} \Leftrightarrow \hat{\lambda} \in \hat{P}_+.$

ここで $\hat{P}_+$ は次の様に定義される: $\hat{\mathcal{G}}$ の Kac-Moody Lie 環としての Chevalley generators を $\{e_i, f_i, h_i \mid 0 \leq i \leq \ell\}$ ($\ell := \text{rank } \mathcal{G}$) とし, 基本 weight $\hat{\lambda}_j \in \hat{\mathcal{H}}^*$ を $\langle \hat{\lambda}_i, h_j \rangle = \delta_{ij}$ で定めるとき, $\hat{P}_+ := \sum_{j=0}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0} \hat{\lambda}_j$.

$L(\hat{\lambda})$ が integrable, すなわち $\hat{\lambda} \in \hat{P}_+$ のときは, その指標が Weyl の指標公式の拡張である Weyl-Kac の公式で与えられる。それが古典的な theta 関数の比で書けることは有名で, Jacobi の三重積公式や Dedekind η の Macdonald identity 等がこれから導かれることが知られている [K, §§12-13].

一方, $L(\hat{\lambda})$ ($\hat{\lambda} \in \hat{P}_+$) のうち, 今迄具体的に構成されているのは, 主として $\hat{\lambda}$ が基本 weight $\hat{\lambda}_j$ で, $\langle \hat{\lambda}_j, c \rangle = 1$ の時である。それらは古典的な Spin 表現の類似により, 或いは物理で発見された Vertex Operator を用いて, 構成される。これらについては §3, §5 で各々述べる。

(2.4) 注意 以上において, $\mathcal{G}$ が X_ℓ 型るとき, $\hat{\mathcal{G}}$ は正確には $X_\ell^{(1)}$ 型 Affine Lie 環そのものとは同型でなく, その derived algebra

$[X_\ell''', X_\ell''']$ と同型なのだが, 単純化して述べた。 $[d, \cdot] \in \text{Der } \hat{\mathcal{G}}$ を

$$[d, \alpha(n)] := n \alpha(n) \quad , \quad [d, c] := 0$$

で定めると $\tilde{\mathcal{G}} := \mathbb{C} d \ltimes \hat{\mathcal{G}}$ が X_ℓ''' と同型なのである。しかし本稿に現れる $\hat{\mathcal{G}}$ 加群は “Segal-Sugawara operator” により標準的に $\tilde{\mathcal{G}}$ 加群となる事が知られており, 従って $\hat{\mathcal{G}}$ を X_ℓ''' と思っていて支障は生じない。又 Segal-Sugawara operator については Virasoro Lie 環の表現の構成手段として非常に重要であるが, ここでは省かせて頂く ([KP] p173 ~ ; [TK])。

§3. $\hat{\mathcal{O}}(n)$ の Spin 表現の構成.

$\hat{\mathcal{O}}(n)$ の Spin 表現で dual pair を作りたいのだからまずそれを知る必要があるが, はじめに $\mathcal{O}(n)$ の Spin 表現を復習しておく。

簡単の為 $n = 2l$ のときを考える。反交換関係

$$(CAR) \quad \{\psi^i, \psi_j\} := \psi^i \psi_j + \psi_j \psi^i = \delta_{ij} \quad , \quad \{\psi^i, \psi^j\} = 0 = \{\psi_i, \psi_j\} \quad (1 \leq i, j \leq l)$$

を満たす $2l$ 個の文字 ψ^i, ψ_i 達が生成する $\mathbb{C}$ 上の (Clifford) 代数 $\mathcal{C}l(2l)$ を用意する。 $\mathcal{C}l(2l)$ は $(2^l)^2$ 次元の単純代数であり 2^l 次元の既約表現をもつが, それは $\wedge(V^l)$, 但 $V^l := \bigoplus_{j=1}^l \mathbb{C} \psi^j$, 上で, 関係式

$$(生成) \quad \psi^i(1) := \psi^i \quad , \quad \psi_i(1) := 0 \quad \text{for } 1 \in \wedge(V^l), 1 \leq i \leq l$$

により実現できる。

このとき $\mathcal{C}l(2l) \simeq \text{End } \wedge(V^l)$ に $\mathcal{O}(2l)$ を次の様に埋め込んで得られるのが $\mathcal{O}(2l)$ の Spin 表現である。

(3.1) 定理[B, p198] 次の対応 S は $O(2l)$ の $\Lambda(V^l)$ 上の表現となる。

$$O(2l) \ni \begin{bmatrix} E_j^i & 0 \\ 0 & -{}^T E_j^i \end{bmatrix} \xrightarrow{S} \frac{1}{2} [\psi^i, \psi_j] = \frac{\psi^i \psi_j - \psi_j \psi^i}{2} \in \mathcal{Q}(2l) \simeq \text{End } \Lambda(V^l),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E_j^i - {}^T E_j^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2} [\psi^i, \psi^j], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_j^i - {}^T E_j^i & 0 \end{bmatrix} \mapsto \frac{1}{2} [\psi_i, \psi_j].$$

但し, $O(2l) = \{x \in gl(2l) \mid {}^t x \begin{bmatrix} J & \\ & J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J & \\ & J \end{bmatrix} x = 0\}$, $J := \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$ と
考之, ${}^t A := J^{-1} {}^t A J$ と書いた。このとき

(3.2) 定理[B, p209] $O(2l)$ 加群としての既約分解が,

$$\Lambda(V^l) = \left(\bigoplus_{p:\text{even}} \Lambda^p(V^l) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p:\text{odd}} \Lambda^p(V^l) \right) \text{ としてえられる。}$$

以上の Affine Version が [FF][F1~2] により構成された。

今度用意するのは $\psi^i(n), \psi_j(n)$ ($1 \leq i, j \leq l, n \in \mathbb{Z}$) という文字で,
(CAR) $\{\psi^i(n), \psi_j(m)\} = \delta_{ij} \delta_{n+m, 0}$, $\{\psi^i(n), \psi^j(m)\} = 0 = \{\psi_i(n), \psi_j(m)\}$
を満たすものである。これらが生成する Clifford 代数 $\hat{\mathcal{Q}}(2l)$ は,
やはり $\Lambda(\hat{W}_-^{2l})$ という外積代数に自然な表現をもつ。ここで

$$(3.3) \quad \hat{W}_\pm^{2l} := V_\pm \oplus \left(\bigoplus_{n \neq 0} (C\psi^i(\pm n) \oplus C\psi_j(\pm n)) \right); \quad V_+ := \bigoplus_{j=1}^l C\psi_j(0), \quad V_- := \bigoplus_{j=1}^l C\psi_j^i(0)$$

と書いた。又, このとき $\hat{\mathcal{Q}}(2l)$ の表現は, $1 \in \Lambda(\hat{W}_-^{2l})$ への作用を
(生/滅) $a(1) := a$ ($a \in \hat{W}_-^{2l}$ のとき); $b(1) := 0$ ($b \in \hat{W}_+^{2l}$ のとき)

と定めることで定義される。

± $\hat{\mathcal{Q}}(2l)$ の表現であるが, 有限次元の場合と異なり今度は
 $\hat{\mathcal{Q}}(2l)$ の元の無限和で定義される。

(3.4) 定理 [F1] 次の $\hat{S}$ は $\hat{O}(2\ell)$ の $\Lambda(\hat{W}_{-}^{2\ell})$ 上の表現を与える:

$$\left\{ \begin{array}{l} (3.1) \text{ で } S(X) = \frac{1}{2}[a, b] \text{ なる } X \in \mathfrak{o}(2\ell) \text{ に対し,} \\ \hat{S}(X(k)) := \sum_{m+n=k} :a(m)b(n): \in \text{End } \Lambda(\hat{W}_{-}^{2\ell}), \\ \text{更に } \hat{S}(c) := \text{id}. \end{array} \right.$$

ここで $:$ は以下の様に定義され, normal product と呼ばれる.

$$(NP) \quad :a(m)b(n): := \begin{cases} a(m)b(n) & (n > m \text{ のとき}), \\ \frac{1}{2}[a(m), b(n)] & (n = m \text{ のとき}), \\ -b(n)a(m) & (n < m \text{ のとき}). \end{cases}$$

この「おまじない」により,

$$(3.5) \quad \left(\sum_n \psi_j^{(n)} \psi_j^{(-n)} \right) (1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \{ \psi_j^{(n)}, \psi_j^{(-n)} \} \right) (1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1 \right) (1) = \infty$$

の形の発散は「くりこみ」で

$$(3.6) \quad \left(\sum_n : \psi_j^{(n)} \psi_j^{(-n)} : \right) (1) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_j^{(-n)} \psi_j^{(n)} + \frac{[\psi_j^{(0)}, \psi_j^{(0)}]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_j^{(-n)} \psi_j^{(n)} \right\} (1) \\ = 0 + (\psi_j^{(0)} \psi_j^{(0)} + \frac{1}{2}) (1) + 0 = \frac{1}{2} \in \Lambda(\hat{W}_{-}^{2\ell})$$

と除去される。これにより, $\hat{S}(X(k))$ が $\Lambda(\hat{W}_{-}^{2\ell})$ 上の作用素として定まる。交換関係を確認するのは $:$ の為少々複雑だが, いわゆる “Wick の定理” と “母関数表示” の共用が強力な計算手段となる ([FF])。かくして $\hat{O}(2\ell)$ の表現が得られ, (3.2) と同様

(3.7) 定理 [F1] $\hat{O}(2\ell)$ -加群として,

$$\Lambda(\hat{W}_{-}^{2\ell}) \simeq L^{\hat{O}(2\ell)}(\hat{\Lambda}_{\ell-1}) \oplus L^{\hat{O}(2\ell)}(\hat{\Lambda}_{\ell}).$$

となる。

$\hat{O}(2\ell+1)$ についても, 又更には “twisted” Affine Lie 環についても, $\langle \hat{\Lambda}_j, c \rangle = 1$ の基本weight に対する $L(\hat{\Lambda}_j)$ は同様に構成できる [FF]。

§4. Dual pair $\mathfrak{gl}(M) + \mathfrak{sl}(N) \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}(2MN)$.

この節で (1.7A) のときの dual pair の構成を述べる。他の場合については触れないが、A型と同様(むしろ易しい)である。
 $\mathfrak{gl}(M)$ により、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(M)$ の $(,) = \text{trace}_{M \times M}$ による affine 化を表わす。

(4.1) 命題 (i) 次の対応は Lie 環の単射準同型となる:

$$\begin{cases} L: \mathfrak{gl}(M) \ni E_j^i(k) \mapsto \begin{bmatrix} E_j^i \otimes 1_M & \\ & -E_j^i \otimes 1_N \end{bmatrix}(k) \in \hat{\mathcal{O}}(2MN), & C \xrightarrow{\mathfrak{gl}(M)} N \cdot C; \\ R: \mathfrak{gl}(N) \ni E_j^i(k) \mapsto \begin{bmatrix} 1_M \otimes E_j^i & \\ & -1_M \otimes E_j^i \end{bmatrix}(k) \in \hat{\mathcal{O}}(2MN), & C \xrightarrow{\mathfrak{gl}(N)} M \cdot C. \end{cases}$$

従って $\hat{\mathcal{S}} \circ L, \hat{\mathcal{S}} \circ R$ は $\mathfrak{gl}(M), \mathfrak{gl}(N)$ の表現を各々与える。

(ii) $\mathfrak{gl}(M)$ 加群として, $\Lambda(\hat{W}_{-}^{2MN}) \simeq \hat{\otimes}^N \Lambda(\hat{W}_{-}^{2M})$.

ここで $L(\mathfrak{gl}(M)) \cap R(\mathfrak{gl}(N)) = (C 1_M \otimes 1_N)^{\wedge} \neq 0$ なのて、以下では一方を $\mathfrak{sl}(N)$ に制限して考える。あとは既約分解をするの女と思わねば所だが、実は (1.7A) の場合の女は $\mathfrak{sl}(N)$ の "commutant" $\mathfrak{sl}(\mathfrak{gl}(M))$ では足りない。実際、

(4.2) 命題 次のような $\hat{\sigma} \in \text{Aut } \Lambda(\hat{W}_{-}^{2MN})$ が存在する:

$$(i) [\hat{\sigma}, \mathfrak{sl}(N)] = 0, \quad (ii) \hat{\sigma}(\hat{\mathcal{S}} \circ L(x)) \hat{\sigma}^{-1} = \hat{\mathcal{S}} \circ L(\sigma(x)) \quad (\forall x \in \mathfrak{gl}(M)),$$

$$(iii) \hat{\sigma}(\hat{\mathcal{S}} \circ L(1_M(k))) \hat{\sigma}^{-1} = \hat{\mathcal{S}} \circ L(1_M(k) - \varepsilon_{kp} C).$$

ここで σ は $\mathfrak{sl}(M) \simeq [A_{M-1}^{(1)}, A_{M-1}^{(1)}]$ の "cyclic diagram automorphism", つまり Dynkin 図形の自己同型 $\circ \xrightarrow{\leftarrow} \cdots \xrightarrow{\leftarrow} \circ_{M-1}$ が誘導する位数 M の $\mathfrak{sl}(M)$ の自己同型, を表わす。

命題(4.2)の $\hat{\mathcal{G}}$ は、次節の「Fermion-Boson対応」という美しい関係を用いれば構成できる。そしてこの $\hat{\mathcal{G}}$ も込めて考えれば、

(4.3) 定理 $(\langle \hat{\mathcal{G}} \rangle \ltimes \hat{\mathcal{O}}(\hat{W}_-)) + \hat{\mathcal{A}}(\hat{N})$ -加群として、 $\Lambda(\hat{W}_-^{2M})$ は(1.7A)の様に既約分解される。 $(\langle \hat{\mathcal{G}} \rangle \ltimes \hat{\mathcal{O}}(\hat{W}_-)) + \hat{\mathcal{A}}(\hat{N})$ は dual pair となる。

§5. Fermion-Boson 対応.

表記の「対応」は、§§3-4で扱ってきた空間 $\Lambda(\hat{W}_-^{2l})$ が、実は無限変数多項式環と同型であるというものである。まず簡単の為に $l=1$ とし、 $\Lambda(\hat{W}_-^2) \ni |p\rangle$ を各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し次で定義する:

$$(5.1) \quad |0\rangle := 1, \quad |p\rangle := \begin{cases} \psi_1^{p-1} \psi_2(0) |0\rangle & (p > 0 \text{ のとき}) \\ \psi_1(p) \cdots \psi_1(-1) |0\rangle & (p < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(5.2) 定理[DKJM] $\mathcal{F} := \mathbb{C}[x(0), x(0)^{-1}; x(1), x(2), \dots]$ に、 $\hat{\mathcal{O}}(2)$ の作用を

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}(n) \mapsto x(n), & \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}(-n) \mapsto n \frac{\partial}{\partial x(n)} \quad (n > 0 \text{ のとき}); \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}(0) \mapsto \frac{\partial}{\partial x(0)}, & c \mapsto id \end{cases}$$

で定義しておくと、次の $B: \Lambda(\hat{W}_-^2) \rightarrow \mathcal{F}$ は $\hat{\mathcal{O}}(2)$ -加群同型:

$$\Lambda(\hat{W}_-^2) \ni v \mapsto Bv := \sum_{p \in \mathbb{Z}} x(0)^p \times \left\{ \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x(j) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}(j)\right) v \text{ の } |p\rangle \text{ の係数} \right\} \in \mathcal{F}.$$

略証 $\Lambda(\hat{W}_-^2)$, $\mathcal{F}$ の両者の指標 $\text{Tr } e^{2\pi i(u \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}(0) - \tau d)}$ を考えれば、

$$q^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z q^{n-1})(1 + z^{-1} q^n) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} \quad \left(\begin{matrix} z := e^{2\pi i u} \\ q := e^{2\pi i \tau} \end{matrix} \right)$$

であれば良い。ところがこれは Jacobi の三重積公式そのもの。□

(5.4) 注意 (5.2) の対応は $\mathcal{F}$ の base を Schur 関数でとっておけばより具体的に表わせ, それにより別証明もできる [DKJM]. 従って Jacobi の公式の別証明も得られる。

(5.5) 系 ([F2], [FK]) $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\text{End } \mathcal{F}$ の元を

$$\begin{cases} \psi(n)_B := \left(x(0) z^{\partial/\partial x(0)} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} x(n) \right] \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{-n} \frac{\partial}{\partial x(n)} \right] \right) \text{の } z^{\frac{n}{2}} \text{係数} \\ \psi_1(n)_B := \left(x(0)^{-1} z^{\partial/\partial x(0)} \exp \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} x(n) \right] \exp \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{-n} \frac{\partial}{\partial x(n)} \right] \right) \quad // \end{cases}$$

で定めると, これは $(\text{CAR})^\wedge$ をみたす。一般にも $\hat{\otimes} \mathcal{F}$ において同様に $(\text{CAR})^\wedge$ をみたす作用素達が定義でき, それらを用いて $\hat{\otimes} \mathcal{F}$ を $\hat{\mathcal{O}}(2\ell)$ -加群にできる (Vertex operator 表現, 或いは Frenkel-Kac construction)。

さて (4.2) の $\hat{\sigma}$ は, $\hat{\otimes} \mathcal{F}$ において次の様に構成される:

$$\Lambda(\hat{W}^{2MN}) \simeq \hat{\otimes} \mathcal{F} = \bigotimes_{j=1}^M \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{C}[x_{j,k}(0), x_{j,k}(1), x_{j,k}(2), \dots]$$

には, $\mathcal{G}_{MN}$ が添字の入替で, 又 $\mathbb{Z}^{MN}$ が $x_{j,k}(0)^n$ で作用する。

(実際はこれを $\mathcal{G}_{MN} \times \mathbb{Z}^{MN}$ でなく, その $(\pm 1)^{MN}$ による中心拡大の作用にする必要があるが) これを用いれば,

$$(5.6) \quad \hat{\sigma} = \left(\prod_{k=1}^N x_{1,k}(0)^{\times} \right) \circ w,$$

但し, $\mathcal{G}_{MN} \ni w$ は $(j, k) \mapsto (j+1 \bmod M, k)$ という元

が (4.2) の $\hat{\sigma}$ を与える。

§6. 主定理証明の方針, 及び結び.

(1.7A)~(1.7D)は全て, 分母公式の[JM]による書き換え, 及び指標公式によつて証明される。有限次元のVersion(1.3)で説明しよう。両辺の指標を考えると, まず右辺で指標公式を使い, 又左辺において $\wedge(\mathbb{C}^{MN}) \simeq \bigotimes^{MN} \wedge(\mathbb{C})$ が2次元空間のテンソル積であることを注意すれば,

$$(6.2) \quad \prod_{j=1}^M \prod_{k=1}^N (1+z_j z_k) = \sum_{Y \in R_{MN}} \frac{\det \left[z_i^{Y_j + M - j} \right]_{1 \leq i, j \leq M}}{\prod_{1 \leq i < j \leq M} (z_i - z_j)} \frac{\det \left[z_k^{Y_k + N - k} \right]_{1 \leq k, l \leq N}}{\prod_{1 \leq k < l \leq N} (z_k - z_l)}$$

の形である。(Y_j は Young 図形の j 行目の箱の数を表わす。) ところで実は R_{MN} の元は G_{MN}/G_M × G_N の代表元と 1:1 に対応するから, 右辺の分母を払い適当に符号を直せば, (6.2) は Vandermonde 行列式の Laplace 展開として得られる。——

一般にも, G が X_ℓ 型の時, その Weyl の分母を D^{X_ℓ} とかけば, D^{X_{ℓ+m}}/D^{X_ℓ} · D^{X_m} が「ほぼ」Spin 表現の指標になり, こゝに D^{X_{ℓ+m}} の分母公式を適用して分子を和に直せば dual pair X_ℓ ⊕ X_m に関する既約分解を示す式が得られる。Affine Version(1.7)も全く同じ方針で証明できる。

ところで, 浅学な筆者は知らなかつたのであるが, この様な dual pair は sp(2ℓ) の Weil 表現についても存在するらしい[H] (Weil 表現は, (CAR)で {, } であった所を [,] に代えた「正準交換関

系」(CCR)を満たす文字が作る Weyl algebra の 2 次式として (3.1) と同様に $sp(2l)$ を実現するもので、 $Sp(2l, R)$ の 2-cover の Unitary 表現の微分表現となる。) その場合指標公式に頼る事はもはやできないから、多分 (1.7) の場合に拡張可能な algebra の構造に即した別証明があると思われる。そこで、Weil 表現の Affine Version (これは [FF] により構成されている) でも dual pair が存在することが示唆されるが、その場合現れる「既約成分」は integrable な表現とは又別の興味深い対象である と期待される。

又 [M] による Schur 函数の理論には、その母関数として Spin 及び Weil 表現の指標が用いられる。この類似ができれば、Affine の場合の Tensor 積表現の分岐則等を Richardson rule の類似で書けるかも知れない。

更にはこれらの表現が「微分作用素」として実現されている点から、微分方程式系としての考察も可能であろう。

以上妄想ばかり並べてしまったが、一方でははるかに深い立場から本稿の module $\Lambda(\hat{W}^L)$ の有用性が示されつつある。その Superstring 等と関係した点については勉強不足の為述べられなかった。申し訳ありません。

最後に、貴重な示唆を下さった梅田享先生、この方面へと筆者を導いて下さった土屋・饒江両先生に、この場を借りて感謝を表わさせて頂きます。

参考文献.

- [B] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8.
- [DKJM] Date, Kashiwara, Jimbo and Miwa, Transformation groups for soliton equations, in Proc. RIMS symposium 1981, World Scientific.
- [FF] F. Feingold and I. Frenkel, Classical affine algebras. Adv. Math. 56 (85) 117–
- [F1] I. Frenkel, Spinor representations of affine Lie algebras. Proc. Nat'l Acad. Sci. USA 77 (1980) 6303–6306
- [F2] —, Representations of affine Lie algebras, Hecke modular forms, and KdV type equations. Springer LNM. 933 (1982) 71–110
- [FK] — and V. Kac, Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. Inv. Math. 62 (1980) 23–66
- [H] R. Howe, Dual pairs in physics: harmonic oscillators, photons, electrons and singletons. Lectures in Applied Math. 21 (1985) 179–207
- [JM] M. Jimbo and T. Miwa, On a duality of branching rules for affine Lie algebras, Adv. studies in Pure Math. 6 (1985) 17–65
- [K] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, 2nd ed, Cambridge (1985)
- [KP] — and D. Peterson, Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, Adv. Math. 53 (1984) 125–264
- [M] I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford (1979)
- [TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, Unitary representations of Virasoro algebra, Duke Math J. 53 (1986) 1013–1046