

Exponentials of certain completions of the unitary form of a Kac-Moody algebra

愛媛大理 須藤 清一 (Kiyokazu Suto)

§ 0. 序

まず, 対称化可能な Cartan 行列を持つ複素 Kac-Moody 環,
 $\hat{g}$ の unitary 実形とする。

[3] の中で我々は, $\hat{g}$ の随伴表現及び dominant integral な
highest weight を持つ既約表現の標準的な完備化における C^{∞} -
vectors の空間を自然な形で定義し, その簡潔な特徴付けを与
えた。この特徴付けを用いると, 各 C^{∞} -vectors の空間に自然に
位相が入り, $\hat{g}$ の作用が連続に拡張される。

随伴表現の場合の各 C^{∞} -vectors の空間における $\hat{g}$ 及び $\hat{h}$ の
閉包をそれぞれ $\hat{g}_m$ 及び $\hat{h}_m$ とする。

本報告では, $\hat{h}_2$ の C^1 -vectors への作用が exponentiable であり
 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\hat{h}_{m+2}$ の exponentials が C^{∞} -vectors の空間を
不変にすることを示す。これは [3] で得られた, $m = \infty$ に対
する結果, すなわち, $\hat{h}_{\infty}$ の exponentials が C^{∞} -vectors の空間
($k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$) をすべて不変にする, を拡張するもの
である。

§ 1 記号と準備

本節の内容に関して、詳しくは [1] 及び [3] を参照されたい。

A を対称化可能な一般型 Cartan 行列とする。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cong A$ を Cartan 行列に持つ実 Kac-Moody 環, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の Cartan 部分環とする。すると、 $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は A を Cartan 行列に持つ複素 Kac-Moody 環, $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になる。

$\Delta \subset (\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系, $\Delta_+ \subset \Delta$ を正 root の全体, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$ を root 空間分解とする。

$\mathfrak{n}_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}^{\alpha}$ とおく。三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ に関する $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{n}_{\pm}, \mathfrak{h}$ への射影をそれぞれ $P_{\pm}, P_0$ とおく。

A を対称化可能としたから、 $\mathfrak{g}$ 上には standard invariant form (1.1) が存在する。(1.1) の $\mathfrak{h}$ への制限は非退化なので、 $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ の上への線型全単射 $\mathfrak{L}$ が

$$(h_1 | h_2) = \mathfrak{L}(h_1)(h_2) \quad \text{for } h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$$

によって定まる。

$\mathfrak{g}$ 上の互線型反同型 $\mathfrak{g} \ni x \mapsto x^* \in \mathfrak{g}$ で

$$h^* = h \quad \text{for } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \quad (\mathfrak{g}^{\alpha})^* = \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad \text{for } \alpha \in \Delta$$

$$(x^*)^* = x \quad \text{for } x \in \mathfrak{g}$$

を満たすものが存在する。すると unitary 実形式は

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x + x^* = 0\}$$

と定義される。

上の Hermitian $(\cdot|\cdot)_0 \Sigma$

$$(x|y)_0 = \overline{(x|y^*)} \quad \text{for } x, y \in \mathfrak{g}$$

と定める。 $(\cdot|\cdot)_0$ の不変性により, $(\cdot|\cdot)_0$ は contravariant である。

すなわち

$$([x, y]|z)_0 = (y|[x^*, z])_0 \quad \text{for } \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。この性質により root 空間分解は $(\cdot|\cdot)_0$ に関する直交分解である。特に $(\cdot|\cdot)_0$ は $\mathfrak{h}$ -不変である $\mathfrak{n}_\pm$ は互いに直交する。さらに [2] によれば, $(\cdot|\cdot)_0$ は $\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ 上では正定値である。

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を highest weight に持つ既約 highest weight 表現 $\Sigma(\pi_\lambda, L(\lambda))$ とする。もし $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ならば $L(\lambda)$ 上には非退化な contravariant Hermitian form $(\cdot|\cdot)_\lambda$ が存在する:

$$(\pi_\lambda(x)u|v)_\lambda = (\pi_\lambda(x^*)u|v)_\lambda \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}, u, v \in L(\lambda).$$

さらに λ が dominant integral ならば $(\cdot|\cdot)_\lambda$ は正定値である ([2, Th.1]).

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底 $\{h_i\}$ を

$$(h_i|h_j)_0 = \delta_{ij} \text{ or } -\delta_{ij} \quad \forall i, j$$

を満たすものとする。上の内積 $(\cdot|\cdot)_\lambda$ で $\{h_i\}$ を正規直交基底とするものを取り, 次に $\mathfrak{g}$ 全体に拡張する。

$$(x|y)_1 = (P_-(x)|P_-(y))_0 + (P_0(x)|P_0(y))_1 + (P_+(x)|P_+(y))_0.$$

$$\text{for } x, y \in \mathfrak{g}.$$

すると次のような $\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 T が存在する。

(1) T は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して unitary かつ self adjoint, 従って involutive

(2) $(x|y)_0 = (x|Ty)_1$ for $x, y \in \mathfrak{g}$.

(3) $1 - T \leq 2P_0$.

以下では, π を $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現 ad または $L(\Lambda)$ 上の表現 π_Λ とする。ただし Λ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の元で dominant integral なものとする。 π の表現空間を V とし, V 上の内積を $(\cdot|\cdot)_\pi$ とする。すなわち $V = \mathfrak{g}$ または $L(\Lambda)$ であり, $(\cdot|\cdot)_\pi = (\cdot|\cdot)_1$ または $(\cdot|\cdot)_\Lambda$ である。 (π, V) の weights 全体を $P(\pi)$, weight μ の weight 空間を V_μ とし, $V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu \in P(\pi)} V_\mu$ とおく。 $\mathfrak{g}$ は V に自然に作用するが, この表現も π と書く。

$H(\pi)$ を V の $(\cdot|\cdot)_\pi$ に関する完備化とする。すると $H(\pi)$ は次のようにして V の部分空間とみなされる。

$$H(\pi) = \{ (v_\mu)_{\mu \in P(\pi)} \in \underline{V} \mid \sum_{\mu \in P(\pi)} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty \}.$$

§ 2. C^∞ -vectors

以下 $h_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を strictly dominant な元 π とし固定する:

$$\alpha(h_0) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+.$$

[2, Prop. 3.1] と同様の手法で次の命題を得る。

命題 2.1 [3, Prop. 2.1].

$$i) \quad \exists C_1 > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

$$\| [x, y] \|_1 \leq C_1 (\| [h_0, x] \|_1 \| y \|_1 + \| x \|_1 \| [h_0, y] \|_1),$$

$$ii) \quad \exists C_{1,\Lambda} > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathfrak{g}, v \in L(\Lambda)$$

$$\| \pi_\Lambda(x) v \|_\Lambda \leq C_{1,\Lambda} (\| x \|_1 \| v \|_\Lambda + \| [h_0, x] \|_1 \| v \|_\Lambda + \| x \|_1 \| \pi_\Lambda(h_0) v \|_\Lambda).$$

これから帰納的に,

命題 2.2 [3, Cor. 2.3].

$$x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}, v \in L(\Lambda) \text{ とする.}$$

$$i) \quad \| [x_1, \dots, [x_{m-1}, x_m] \dots] \|_1$$

$$\leq (m-1)! C_1^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_m = m-1}} \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_i!} \| (\text{ad } h_0)^{p_i} x_i \|_1$$

$$ii) \quad \| \pi_\Lambda(x_1) \dots \pi_\Lambda(x_m) v \|_\Lambda$$

$$\leq (m+1)! C_{1,\Lambda}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m, q \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_m + q \leq m}} \left\{ \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_i!} \| (\text{ad } h_0)^{p_i} x_i \|_1 \right\} \cdot \frac{1}{q!} \| \pi_\Lambda(h_0)^q v \|_\Lambda.$$

C^m -vectors の空間を次のように帰納的に定義する.

定義 2.3

$$H_0(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} H(\pi), \quad H_m(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in H_{m-1}(\pi) \mid \pi(x)v \in H_{m-1}(\pi) \quad \forall x \in \mathfrak{g} \},$$

$$H_\infty(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m \geq 0} H_m(\pi)$$

命題 2.2 によって次は明か.

命題 2.4 [3, Th. 2.6]. $H_m(\pi) = \{ v \in V \mid \pi(h_0)^m v \in H(\pi) \} \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$

そこで, $H_m(\pi)$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_{\pi,m}$ を

$$(u|v)_{\pi,m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^m (\pi(h_0)^j u | \pi(h_0)^j v)_{\pi} \quad \text{for } u, v \in H_m(\pi),$$

によって定義すると $H_m(\pi)$ は Hilbert 空間になる。 $H_{\infty}(\pi)$ 上には射影極限位相を考える。命題 2.1 によって σ の作用は次のように連続に拡張される。

命題 2.5 [3, Prop. 3.2]. $m=0, 1, 2, \dots$ とする。 σ の $V \wedge$ の作用は連続な双線型写像

$$H_{m+1}(\text{ad}) \times H_{m+1}(\pi) \ni (x, v) \mapsto \pi(x)v \in H_m(\pi)$$

に拡張される。特に $H_0(\text{ad})$ は位相 Lie 環であり, $H_{\infty}(\Lambda)$ に連続に作用する。ただし $H_k(\pi_{\Lambda}) \equiv H_k(\Lambda)$ と書く ($k=0, 1, 2, \dots, \infty$)。

明らかに σ に $x \mapsto x^* \in H_m(\text{ad})$ は $H_m(\text{ad})$ 上の involutive antilinear isometry に拡張される。そこで

$$F_m = H_m^{\eta}(\text{ad}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in H_m(\text{ad}) \mid x+x^*=0\}$$

と置く。 F_m は $\mathbb{R}$ の $H_m(\text{ad})$ における閉包と一致する。

§ 3. Negative spaces.

inclusion $H_m(\pi) \hookrightarrow H(\pi)$ は連続だから, $v \in H(\pi)$ に対して, $Fv \in H_m(\pi)^*$ が

$$Fv(u) \stackrel{\text{def}}{=} (u|v)_{\pi} \quad \text{for } u \in H_m(\pi)$$

によって定義できる。この Fv の norm を $\|v\|_{\pi,-m}$ とし, $\|\cdot\|_{\pi,-m}$

による $H(\pi)$ の完備化を $H_{-m}(\pi)$ とする。 $H_{-m}(\pi)$ は V の部分空間とみなせる:

$$H_{-m}(\pi) = \{ (v_\mu)_{\mu \in P(\pi)} \in V \mid \sum_{\mu \in P(\pi)} \left[\sum_{j=0}^m M(k_0)^{2j} \right]^{-1} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty \}.$$

また定義によって、内積 $(\cdot | \cdot)_\pi$ は $H_m(\pi)$ と $H_{-m}(\pi)$ の非退化な pairing を与える。

$x \in H_{m+1}(\mathfrak{ad})$ とする。命題 2.5 により $\text{ad } x^*$ は $H_{m+1}(\mathfrak{ad})$ から $H_m(\mathfrak{ad})$ の中への連続写像。一方 § 1 の作用素 T は $H_m(\mathfrak{ad})$ 上の可逆有界作用素に一義に拡張される。従って任意の $y \in H_{-m}(\mathfrak{ad})$ に対して

$$H_{m+1}(\mathfrak{ad}) \ni z \mapsto ((T \cdot \text{ad } x^* \cdot T)z | y)_1$$

は $H_{m+1}(\mathfrak{ad})^*$ の元を定める。よって $H_{-m-1}(\mathfrak{ad})$ の元 w が一意に存在して

$$(z | w)_1 = ((T \cdot \text{ad } x^* \cdot T)z | y)_1, \quad \forall z \in H_{m+1}(\mathfrak{ad}).$$

そこで、 $(\text{ad } x)y \stackrel{\text{def}}{=} w$ とおく。

同様に、 $H_{m+1}(\mathfrak{ad})$ の $H_{-m}(\Lambda)$ への作用を

$$(u | \pi_\Lambda(x)v)_\Lambda = (\pi_\Lambda(x^*)u | v)_\Lambda$$

$$\text{for } x \in H_{m+1}(\mathfrak{ad}), u \in H_{m+1}(\Lambda), v \in H_{-m}(\Lambda),$$

によって定義する。

定義によって線型写像 $\pi(x): H_{m+1}(\pi) \rightarrow H_m(\pi)$ の norm を

$\pi(x): H_{-m}(\pi) \rightarrow H_{-m-1}(\pi)$ の norm は一致する。

§ 4. Exponentials of E_m 's

$m=0, 1, 2, \dots$ とする. $H_m(\pi)$ 上の norm $\|\cdot\|_{\pi, m}$ を

$$\|v\|_{\pi, m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^m \|\pi(h_0)^j v\|_{\pi} \quad \text{for } v \in H_m(\pi)$$

によって定める. すると

$$\|v\|_{\pi, m} \leq \|v\|_{\pi, m+1} \leq \sqrt{m+1} \|v\|_{\pi, m} \quad \forall v \in H_m(\pi)$$

だから $\|\cdot\|_{\pi, m}$ は $\|\cdot\|_{\pi, m+1}$ と同値な norm である. この norm で $H_{m+1}(\pi)$ 上の E_{m+1} の作用を評価すると次の補題を得る.

補題 4.1 $x \in E_{m+1}$ とする.

$$\text{i) } \|(1 - \text{ad}(x))y\|_{\text{ad}, m} \geq (1 - C_1 2^{m+1} \|x\|_{\text{ad}, m+1}) \|y\|_{\text{ad}, m} \quad \forall y \in H_{m+1}(\text{ad}),$$

$$\text{ii) } \|(1 - \pi_{\Lambda}(x))v\|_{\Lambda, m} \geq (1 - C_{1, \Lambda} 2^{m+2} \|x\|_{\text{ad}, m+2}) \|v\|_{\Lambda, m} \quad \forall v \in H_{m+1}(\Lambda).$$

$$\text{ただし } \|\cdot\|_{\Lambda, m} \stackrel{\text{def}}{=} \|\cdot\|_{\pi_{\Lambda}, m}.$$

一方 negative space Λ の作用に関しては次のような評価を得る.

補題 4.2 $\exists C_m(\pi), C'_m(\pi) > 0$ s.t. $\forall x \in E_{m+1}, v \in H_{-m+1}(\pi)$

$$\|(1 + \pi(x))v\|_{\pi, -m} \geq C_m(\pi) (1 - C'_m(\pi) \|x\|_{\text{ad}, m+1}) \|v\|_{\pi, -m}$$

$x \in E_{m+2}, \varepsilon \in \mathbb{R}$ とする. 定義によって

$1 + \varepsilon \pi(x) : H_{-m}(\pi) \rightarrow H_{-m-1}(\pi)$ が単射

$$\iff (1 - \varepsilon \pi(x)) H_{m+1}(\pi) \text{ が dense in } H_m(\pi).$$

従って補題 4.2 により $|\varepsilon|$ が十分小さければ $(1 - \varepsilon \pi(x)) H_{m+1}(\pi)$

は $H_m(\pi)$ で稠密である。これと補題 4.1 を合わせて

補題 4.3 $x \in E_{m+2}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ とする。 $|\varepsilon|$ が十分小さければ,

$H_m(\pi)$ 上の有界作用素 $R_\pi(x; \varepsilon)$ で

$$R_\pi(x; \varepsilon)(1 - \varepsilon \pi(x))v = v \quad \forall v \in H_{m+1}(\pi)$$

なるものが一意に存在する。さらに

$$|R_\pi(x; \varepsilon)|_{op, m} \leq (1 - C|\varepsilon||x|_{ad, m+1})^{-1}$$

ただし, $|\cdot|_{op, m}$ は $|\cdot|_{\pi, m}$ に関する作用素 norm で, $C = C_1 2^{m+1}$ (if $\pi = ad$), or $C_{1, \Lambda} 2^{m+2}$ (if $\pi = \pi_\Lambda$).

これにより, [4, Chap IX] の criterion が適用できて次の定理を得る。

定理 4.4 $m = 0, 1, 2, \dots$, $x \in E_{m+2}$ とする。

i) $H_m(ad)$ 上の有界作用素からなる 1 径数群 $e^{tad}x = \exp tadx$ でその無限小生成作用素が adx を含むものが一意に存在する。
さらに

$$|e^{adx}|_{op, m} \leq \exp C_1 2^{m+1} |x|_{ad, m+1}.$$

ii) $H_m(\Lambda)$ 上の有界作用素からなる 1 径数群 $e^{t\pi_\Lambda(x)} = \exp t\pi_\Lambda(x)$ でその無限小生成作用素が $\pi_\Lambda(x)$ を含むものが一意に存在する。
さらに

$$|e^{\pi_\Lambda(x)}|_{op, m} \leq \exp C_{1, \Lambda} 2^{m+2} |x|_{ad, m+1}.$$

もしも $m < m'$ のとき $x \in \bar{E}_{m'+2}$ に対して $H_m(\pi)$ 上の $e^{\pi(x)}$ $H_{m'}(\pi)$ 上の $e^{\pi(x)}$ は一致する。従って上の定理は、言葉を変えていえば、 $H(\pi)$ 上で定義された $x \in \bar{E}_{m+2}$ の exponential $e^{\pi(x)}$ が、部分空間 $H_1(\pi), H_2(\pi), \dots, H_m(\pi)$ をすべて不変にすること主張している。

$$\begin{aligned} & \text{さて, } x, y \in \bar{E}_{m+3}, v \in H_{m+1}(\pi) \text{ とすると定理 4.4 により} \\ & \frac{1}{\delta} \{ e^{(t+\delta)\pi(x)} e^{(t+\delta)\pi(y)} v - e^{t\pi(x)} e^{t\pi(y)} v \} \\ &= e^{(t+\delta)\pi(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{\delta} (e^{(t+\delta)\pi(y)} v - e^{t\pi(y)} v) - \pi(y) e^{t\pi(y)} v \right\} \\ & \quad + e^{(t+\delta)\pi(x)} \pi(y) e^{t\pi(y)} v + \frac{1}{\delta} \{ e^{(t+\delta)\pi(x)} - e^{t\pi(x)} \} e^{t\pi(y)} v \\ & \rightarrow e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v \quad (\delta \rightarrow 0) \quad \text{in } H_m(\pi). \end{aligned}$$

補題 4.5 $\forall x, y \in \bar{E}_{m+3}, v \in H_{m+1}(\pi)$ に対して

$$\frac{d}{dt} e^{t\pi(x)} e^{t\pi(y)} v = e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v \quad \text{in } H_m(\pi).$$

従って

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v = \int_0^1 e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v dt \quad \text{in } H_m(\pi).$$

C は補題 4.3 の通りとすると

$$|e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v|_{\pi, m} \leq \int_0^1 e^{Ct|x|_{ad, m+1}} \cdot C|x+y|_{ad, m+1} e^{2Ct|y|_{ad, m+2}} |v|_{\pi, m+1} dt.$$

結局次の命題を得る。

命題 4.6 $m=0, 1, 2, \dots, x, y \in \bar{E}_{m+3}, v \in H_{m+1}(\pi)$ とすると,

$$|e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v|_{\pi, m} \leq C e^{C(|x|_{ad, m+1} + |y|_{ad, m+2})} |x+y|_{ad, m+1} |v|_{\pi, m+1}.$$

特に $\exp: \mathbb{R}_{m+3} \ni x \mapsto e^{\pi(x)} \in \mathbb{B}_S(H_m(\pi))$ は; $\mathbb{R}_{m+3}$ の $\|\cdot\|_{ad, m+2}$ について有界な任意の部分集合上で $\|\cdot\|_{ad, m+1}$ について一様連続。ただし $\mathbb{B}_S(H_m(\pi))$ は $H_m(\pi)$ 上の有界作用素の全体に強位相を考えたもの。

この連続性によって [3, §5] で与えられた exponentials の満たす交換関係が次のように拡張される。まず連続性によって

命題 4.7 (cf. [3, Prop. 5.4]) $\forall x \in \mathbb{R}_4, y \in H_1(ad)$

$$e^{\pi(x)} \pi(y) e^{-\pi(x)} = \pi(e^{ad} x y)$$

従って, 2つの 1 径群 $e^{\pi(x)} e^{t\pi(y)} e^{\pi(x)}, \exp t\pi(e^{ad} x y)$ ($x \in \mathbb{R}_4, y \in \mathbb{R}_2$) が同じ無限小生成作用素を持つことになり, 結局同次を得る。

命題 4.8 (cf. [3, Prop. 5.5]) $\forall x \in \mathbb{R}_4, y \in \mathbb{R}_2$

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} e^{-\pi(x)} = \exp \pi(e^{ad} x y) .$$

参考文献

- [1] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1983.
- [2] V. G. Kac and D. H. Peterson, Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem, Invent. Math., 76 (1984), 1-14.
- [3] K. Suto, Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra, preprint.
- [4] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.