

Irreducible unitary representations of Lie superalgebras of type A

京大理学部 古津 博俊 (Hirotooshi Furutsu)

Lie superalgebra の表現には 実 Lie algebra における定義を拡張することによりユニタリ性を定義することが出来る。本論文では、A型 Lie superalgebra に対し、ユニタリ表現とその even part との関係を探る。

§ 1 定義と簡単な注意.

Def. 1.1 体 K 上の Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ とは、集合としては K 上のベクトル空間であり、そこに積 $[\cdot, \cdot]$ が入っている。ここで、次の条件 (i), (ii) を満たすもののことである。

(i) $\mathfrak{g}$ はベクトル空間として、2つの部分空間 $\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_1$ との直和である。(ここで、 $\{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。)

(ii) ブラケット積 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ は bilinear での (i), (ii), (iii) を満たす。

$$(i) \quad [\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_t] \subset \mathfrak{g}_{s+t} \quad \text{for } s, t \in \{0, 1\}$$

$$(ii) \quad [x, y] = (-1)^{s \cdot t} [y, x] \quad \text{for } x \in \mathfrak{g}_s, y \in \mathfrak{g}_t$$

$$(iii) \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{s \cdot t} [y, [x, z]]$$

$$\text{for } x \in \mathfrak{g}_s, y \in \mathfrak{g}_t, z \in \mathfrak{g} \quad s, t \in \{0, 1\}$$

この時, $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$ をそれぞれ, $\mathfrak{g}$ の even part, odd part と呼ぶ.

定義より, $\mathfrak{g}_0$ は通常のリー環になる. 以後 $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ と

する. Lie superalgebra の表現は, Lie algebra の表現の定義の拡張として, 以下のように定義される.

Def. 1.2. (π, V) が Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の表現であるとは, 次の条件 (i), (ii) を満たすこと.

(i) 複素ベクトル空間 V は, 2つの部分空間 V_0 と V_1 への直和である.

(ii) $\pi: \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ は linear で, 次の (i), (ii) を満たす.

$$(i) \quad \pi(\mathfrak{g}_s) V_t \subset V_{s+t} \quad \text{for } s, t \in \{0, 1\}$$

$$(ii) \quad \pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - (-1)^{s \cdot t} \pi(y)\pi(x).$$

$$\text{for } x \in \mathfrak{g}_s, y \in \mathfrak{g}_t, s, t \in \{0, 1\}$$

この時, V_0, V_1 はそれぞれ $\mathfrak{g}_0$ -module になる.

実 Lie superalgebra については, その表現のユニタリ性を以

下のように定義する,

Def. 1.3. (π, V) が実 Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ のユニタリ表現であるとは, 次の条件 (i), (ii) を満たすこと.

(i) (π, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である. ($V = V_0 \oplus V_1$)

(ii) $\exists \langle, \rangle: V$ の正定値な内積; $\exists j \in \mathbb{C}, j^4 = -1$ が存在して, 次の (i), (ii) を満たす. ($j^2 = -1$)

(i) $\langle j\pi(x)v, v' \rangle = \langle v, j\pi(x)v' \rangle \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}_0$

$\langle j\pi(x)v, v' \rangle = \langle v, j\pi(x)v' \rangle \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}_1$

for $\forall v, v' \in V$

(ii) $\langle v, v' \rangle = 0 \quad \text{for } \forall v \in V_0, \forall v' \in V_1$

この時, $(\pi|_{\mathfrak{g}_0}, V_0), (\pi|_{\mathfrak{g}_1}, V_1)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現になる. 以上のことから 次のような問題を考えることができる.

問題 A $(\rho, \tilde{V})$ を, リー環 $\mathfrak{g}_0$ の既約表現としたとき, その Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ への既約な拡張が存在するか. 又, 存在するとして, 何通りに拡張できるか.

(ここで, $\mathfrak{g}$ の表現 (π, V) が, $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\rho, \tilde{V})$ の拡張であるとは, V の even part V_0 が, $\mathfrak{g}_0$ -module として, $\tilde{V}$ と同型であ

ること.)

さらに, ユニタリ性も考えることにより, 次のような問題を考えられる.

問題B $(\rho, \tilde{V})$ を, 実リー環 $\mathfrak{g}_0$ の既約ユニタリ表現としたとき, その実 Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ への既約ユニタリな拡張をすべて求めよ.

以下, これらの問題について考える.

§ 2 拡張が存在するための必要十分条件

この節では even part $\mathfrak{g}_0$ の表現 $(\rho, \tilde{V})$ に対して拡張 (π, V) が存在するための条件を求めよう.

Def. 2.1. $\mathfrak{g}$ の表現 (π, V) に対して, bilinear map

$$B: \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_0)$$

$$\text{を, } B(\xi, \eta) \equiv \pi(\xi)\pi(\eta)|_{V_0} \text{ で定める.}$$

拡張が存在するための条件を, この B を用いて表わす.

Theorem 2.2. $(\rho, \tilde{V})$ を $\mathfrak{g}_0$ の表現とする。

(I) (π, V) を $(\rho, \tilde{V})$ の $\mathfrak{g}_0$ への拡張であって、

$$\pi(\mathfrak{g}_1) V_0 = V_1$$

を満たすものとする。この時、Def. 2.1. で定義された B は以下の条件を満たす。

$$(EXT\ 1) \quad B(x\xi\eta) + B(\xi, x\eta) = [\rho(x), B(\xi\eta)]$$

$$(EXT\ 2) \quad B(\xi, \eta) + B(\eta, \xi) = \rho([\xi, \eta])$$

$$\begin{aligned} (EXT\ 3) \quad B(\tau, \xi)B(\eta, \zeta) + B(\tau, \eta)B(\xi, \zeta) \\ = B(\tau, [\xi, \eta]\zeta) + B(\tau, \zeta)\rho([\xi, \eta]) \end{aligned}$$

for $\xi, \eta, \tau, \zeta \in \mathfrak{g}_1, x \in \mathfrak{g}_0$.

(ここで $x\xi \equiv [x, \xi]$ for $x \in \mathfrak{g}_0, \xi \in \mathfrak{g}_1$.)

(II) 逆に, bilinear map

$$B: \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_0)$$

が, 条件 (EXT 1~3) を満たすものとする。この時 $(\rho, \tilde{V})$ の拡張 (π, V) であって, 以下の条件 (a), (b) を満たすものが B を用いて具体的に構成できる, (ここで $V_0 \cong \tilde{V}$.)

$$(a) \quad \pi(\mathfrak{g}_1) V_0 = V_1$$

$$(b) \quad V_1 \ni v \text{ に対し,}$$

$$v = 0 \iff \pi(\eta)v = 0 \quad \text{for } \forall \eta \in \mathfrak{g}_1$$

この定理より, $(\rho, \tilde{V})$ に対して拡張が存在するための必

要十分条件は、条件 (EXT 1~3) を満たす bilinear map B が存在することであることがわかる。又、ユニタリ性に関しては次の定理が得られる。今は実 Lie superalgebra とする。

Theorem 2.3. $(\rho, \tilde{V}), (\pi, V)$ は Theorem 2.2. と同様とし、さらに、 $\tilde{V} \cong V_0$ 上の内積 $\langle, \rangle$ に関して ρ がユニタリであるとする。この時 (π, V) がユニタリになるための必要十分条件は B が次の条件を満たすことである。

$$(UNI) \quad \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n \langle B(\xi_k, \xi_l) v_k, v_l \rangle \geq 0$$

for $\forall n \in \mathbb{N}, \{\xi_k\}_{k=1, \dots, n} \subset \mathcal{I}_1, \{v_k\}_{k=1, \dots, n} \subset V_0$

上の定理から 特に B が次の条件を満たすことが必要であることがわかる。

$$(UNI') \quad \frac{1}{2} B(\xi, \xi) \geq 0 \quad \text{for } \forall \xi \in \mathcal{I}_1.$$

§ 3 Lie superalgebras of type A

以下、 $\mathfrak{g}$ が A 型 Lie superalgebra の場合について考える。この節では A 型 Lie superalgebra の定義とその簡単な性質について述べる。

Def. 3.1. $V = V_0 \oplus V_1$ を $m+n$ 次元複素ベクトル空間とし、
部分空間 V_0, V_1 の次元をそれぞれ m, n とする。 $\text{End}(V)$ に $\mathbb{Z}$ -
grade を 次 の よう に 入 れ る。 $s \in \{0, 1\}$ に 対 し て、

$$\text{End}(V)_s \equiv \{X \in \text{End}(V) \mid X(V_t) \subseteq V_{s+t} \text{ for } t \in \{0, 1\}\}$$

と する。 $\text{End}(V) = \text{End}(V)_0 \oplus \text{End}(V)_1$ 。 $\text{End}(V)$ に 次 の よう な 積 $[\cdot, \cdot]$ を
次 で 定 め る。

$$[X, Y] = XY - (-1)^{s \cdot t} YX \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}_s, Y \in \mathfrak{g}_t$$

と する。 $\text{End}(V)$ は Lie superalgebra になる。 これ を $\mathfrak{l}(m, n)$ と 表 わ す。

$\mathfrak{l}(m, n)$ の 元 は $m+n$ 次 行 列 と し て 次 の よう に 表 わ さ れ る。

$$\mathfrak{l}(m, n) \ni X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow m \\ \downarrow n \\ \leftarrow m \rightarrow \leftarrow n \rightarrow \end{matrix}$$

この 時、 $\mathfrak{l}(m, n)$ 上 の linear form str を 次 で 定 め る。

$$\text{str } X \equiv \text{tr } A - \text{tr } D \quad \text{for } \forall X \in \mathfrak{l}(m, n)$$

すると、 次 で 定 め る $\mathfrak{sl}(m, n)$ は $\mathfrak{l}(m, n)$ の subalgebra になる。

$$\mathfrak{sl}(m, n) \equiv \{X \in \mathfrak{l}(m, n) \mid \text{str } X = 0\}$$

$m \neq n$ の 時 $\mathfrak{sl}(m, n)$ は 既約 であるが $m = n$ の 時 (すなわち 1 次

元 centre を 持つ。 よう、 A 型 Lie superalgebra を 以 下 の よう に

定 め る。

$$A(m, n) \equiv \mathfrak{sl}(m+1, n+1) \quad \text{for } m \neq n, m \geq 0, n \geq 0$$

$$A(n, n) \equiv \mathfrak{sl}(n+1, n+1) / \mathbb{C} \cdot I_{2n+2} \quad \text{for } n \geq 1.$$

ニニフリ表現を考えたために, A型 Lie superalgebra の real form を定めることはこのようになる。

$$\text{Def. 3.2. } \mathfrak{sl}(m, n; \mathbb{R}) \equiv \mathfrak{sl}(m, n) \cap M_{m+n}(\mathbb{R})$$

とおくとき, これは明らかに $\mathfrak{sl}(m, n)$ の real form になる。

$$\text{行列 } J = J(m, n; p, q) \in M_{m+n}(\mathbb{C}) \text{ を}$$

$$J(m, n; p, q) \equiv \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ 個}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{m-p \text{ 個}}, \underbrace{i, \dots, i}_{q \text{ 個}}, \underbrace{-i, \dots, -i}_{n-q \text{ 個}} \right)$$

と定義する。

この行列 J を用いて, real form $\mathfrak{su}(m, n; p, q) \subset$

$$\mathfrak{su}(m, n; p, q)_k \equiv \{ X \in \mathfrak{sl}(m, n)_k \mid JX = -(-1)^k \cdot \overline{X} \}, \quad k \in \mathbb{Z}_2$$

と定義すると, 以下の結果が得られる。

Proposition 3.3. $\mathfrak{sl}(m, n)$ の real form は同型を降いて次のとおり。

$$(a) \quad \mathfrak{sl}(m, n; \mathbb{R})$$

$$(b) \quad \mathfrak{su}(m, n; p, q) \quad \frac{m}{2} \leq p \leq m, \quad \frac{n}{2} \leq q \leq n$$

§ 4 A(1,0) の場合

Proposition 3.3 より, この場合 real form は次の3とおり考えられる。(I) $\mathfrak{sl}(2, 1; \mathbb{R})$, (II) $\mathfrak{su}(2, 1; 2, 1)$, (III) $\mathfrak{su}(2, 1; 1, 1)$,
これらについて Problem B を考える。

(I) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, 1; \mathbb{R})$ の場合

この時は, $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ であって, 以下の定理が成り立つ。

Theorem 4.1. $(\rho, \tilde{V})$ を $\mathfrak{g}_0$ の既約ユニタリ表現とすると, $(\rho, \tilde{V})$ が既約ユニタリな拡張を持つための必要十分条件は, $(\rho, \tilde{V})$ が trivial であること, 即ち, $\tilde{V}$ が 1 次元で, $\rho(\mathfrak{g}_0) \equiv 0$ を満たすことである。この時, 拡張は一意的であり, その拡張を (π, V) とすると, これも trivial になる, 即ち, V が 1 次元で, $\pi(\mathfrak{g}) \equiv 0$ 。

(II) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2, 1; 2, 1)$ の場合

この時は, $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{u}(2)$ となるので, その既約ユニタリ表現としては, 有限次元既約表現を考えればよい。このように $(\rho, \tilde{V})$ は highest weight module であり, その highest weight を Λ とする。今, $\mathfrak{sl}(2, 1)$ の元 c, h をそれぞれ,

$$c \equiv \text{diag}(1, 1, 2) \quad h \equiv \text{diag}(1, -1, 0)$$

とすると, $\tilde{V}$ の次元は $\Lambda(h) + 1$ である。これを n とおく。又, $\Lambda(c) \equiv m$ とおくとき, $\rho(c) = m \cdot I_{\tilde{V}}$ である。この $(\rho, \tilde{V})$ に対し以下の定理が成立つ。

Theorem 4.2. ここで定義した $T = (p, \tilde{V})$ に対して 既約ユニタリな拡張が存在するための必要十分条件は以下のようになる。

(a) $n = 1$ の時 $m = 0, \pm 2$

(b) $n = 2$ の時 $m \in \mathbb{R}$ かつ $|m| \geq 1$

(c) $n \geq 3$ の時 $m = \pm(n-1), \pm(n+1)$

さらに、上の条件を満たす $(p, \tilde{V})$ に対して、拡張は、 $n=2$ かつ $m = \pm 3$ の時にかぎり 2 通り、その他の時は 1 通り。

(Ⅳ) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2, 1; 1, 1)$ の場合

この時は、 $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{u}(1, 1)$ となるので、その既約ユニタリ表現としては 次のようなものが考えられる。

(T.) Trivial 表現

(P.C.S.) Principal Continuous Series $(V^{\lambda, s}, \mathcal{H})$ $\lambda = 0, \frac{1}{2}, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$

(L.D.S.) Limit of Discrete Series $(V^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}|_{\mathcal{H}^\pm}, \mathcal{H}^\pm)$ $(\lambda, s) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(D.S.) Discrete Series $(U^n, \mathcal{H}_n)$ $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, |n| \geq 1$

(C.) Complementary Series $(V^\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

ここで、 $(V^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}|_{\mathcal{H}^\pm}, \mathcal{H}^\pm)$ とそれぞれ $(U^{\mp \frac{1}{2}}, \mathcal{H}_{\mp \frac{1}{2}})$ と書く。

Lemma 4.3. $(p, \tilde{V})$ が (T.) の時、trivial な拡張が存在する。

$(p, \tilde{V})$ が (P.C.S.) または (C.) の時には、拡張は存在しない。

(ユニタリの条件を満たさない。)

上の Lemma により, $(\rho, \tilde{V})$ が $(\mathbb{C}^{2n}, \mathcal{H}_{2n})$ ($n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, n > 0$) の時を考えればよい。今, $\rho(c) = m \cdot I$ とすると, 次の定理が得られる。

Theorem 4.4. 上で定義した $(\rho, \tilde{V})$ に対しては, 既約ユニタリな拡張が存在するための必要十分条件は以下のようになる。

- (a) $n = \frac{1}{2}$ の時 $m = \pm 1$
- (b) $n = 1$ の時 $m = 0, \pm 2$
- (c) $n \geq \frac{3}{2}$ の時 $m = \pm 2n, \pm 2(n-1)$

すなわち, 上の条件を満たす $(\rho, \tilde{V})$ に対して, 拡張は $n = 1$ かつ $m = 0$ の時にかぎり 2 通り, その他の時は 1 通り。

§ 5 問題 B の一般化

この節では, $(\rho, \tilde{V})$ が 3 既約という条件を降いた場合の問題 B を $sl(2,1)$ の real form の場合に考える。

Lemma 5.1. (π, V) を $sl(2,1)$ の既約ユニタリ表現とすると, $sl(2,1)$ -module V_0, V_1 の既約 component の数は, それぞれ 2 以下である。

上の Lemma と 3.4 より, ここでは $\tilde{V}$ が 2 つの既約 component の直和からなる場合を示せばよい. さるに, 一般性を失うことなく, それらの component が highest weight module であるを仮定してよいことがわかる. この時 $\tilde{V} = L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2)$ と書く. ここで λ_1, λ_2 はそれぞれの highest weight とする. この時 次の Proposition が成立つ.

Proposition 5.2. 上で定義された $(\rho, \tilde{V})$ が既約ユニタリな拡張を持つためには 次のいずれかの条件を満たすことが必要である.

- (a) $L(\lambda_1) \cong L(\lambda_2)$ as sl_2 -module かつ $(\lambda_1 - \lambda_2)(c) = \pm 2$
- (b) $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm \alpha$ (ここで α は sl_2 の root)

この時 さるに, $L(\lambda_1)$ が 3.4 の条件を満たすことと, $L(\lambda_2)$ が 3.4 の条件を満たすことは同値になり, これらが 3.4 の条件を満たさない時 既約ユニタリな拡張を持つ.

参考文献

- T. Hirai "Unitary Representations of Certain Lie Superalgebras", (manuscript) (1984)
- V.G.Kac "Lie Superalgebras", Adv. in Math. 26 (1977)
- M. Sugawara "Unitary Representations and Harmonic Analysis", Kodansha (1975)