

劣等質空間上の Baum-Comnes 予想

都立大理 高井博司

§1. 序 数学の異分野間の交流は多くの事例が示すように、それぞれの分野に多大の恩恵をもたらしている。幾何学と解析学を結ぶ仕事の中で Atiyah-Singer 指数定理は重要な系を多々生み出したが、最近 Connes によって更に新理論へと発展した。この新理論の骨格をなすのが C^* -環の K -理論である。 K -理論がもたらす有用性は Connes, Kasparov, Bismont-Viculescu, Rosenberg 達が実証している通りである。特に 微分(位相)力学系と葉層構造について Baum と Connes が予想した謂ゆる "Baum-Comnes 予想" は、Atiyah-Singer 指数定理の一般化のうちで究極のものと思われ、位相幾何学及び微分幾何学と C^* -環論を結ぶ境界線上に位置して大変重要な意味を持っている。彼らの予想とは、葉層化多様体又は 微分(位相)力学系を与えたとき、その解析的 K -群と幾何的 K -群が K -指数写像で同型になるという主張である。この予想が肯定的であれば、その系として一般 Novikov 予想, Gromov-Lawson-Rosenberg 予想, 及び一般 Kadison 予想等の位相幾何, 微分幾何, 及び

C^* -環で与えられた干渉等も肯定的に解決される。現在まで得られている諸結果は全て Baum-Connes 干渉の正当性を裏付けているが、統一の見地からの結果は一つ得られていないし、反例を作る動きなど全くないという状況である。

本報告は、このような事情を踏まえて、上記干渉について問題構成、諸結果、展望を述べ、特に高次元空間上の Anosov 葉層について詳しく説明することが目的である。

§2. 問題構成 任意の葉層化多様体 $(M, \mathcal{F})$ に対して、そのホロミー群を G とし、その上の半密度バンドル $\Omega_x^{\frac{1}{2}}$ のコンパクトな台をもつ連続断面全体を $C_c(G, \Omega_x^{\frac{1}{2}})$ で表わすと、次の代数演算で $*$ -環になる：

$$(fg)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) g(\gamma_2) \quad , \quad f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \quad .$$

更に次の C^* -ノルムを導入する：

$$\|f\| = \sup_{x \in M} \|L_x(f)\| \quad ,$$

ただし L_x は $C_c(G, \Omega_x^{\frac{1}{2}})$ から G_x 上の $\Omega_x^{\frac{1}{2}}$ の L^2 -断面全体 $L^2(G_x, \Omega_x^{\frac{1}{2}})$ のなす Hilbert 空間上への表現であり、

$$(L_x(f)\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) \xi(\gamma_2) \quad (x \in M)$$

で与えられる。今、 $C_c(G, \Omega_x^{\frac{1}{2}})$ の上記ノルムによる完備化を $C_r^*(M, \mathcal{F})$ と書き $(M, \mathcal{F})$ の C^* -環ということにする。

さて $C_r^*(M, \mathcal{F})$ の K -群 $K(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ を $K_*(M, \mathcal{F})$ で表わし、 $(M, \mathcal{F})$ の解析的 K -群ということにする。一方 $(M, \mathcal{F})$ の幾何学的構成による

K -群の定義は次の様に与えられる。

X を固有 G -多様体, $\mathcal{V}^*$ を X 上の G -軌道によって定まる葉層の法バンドル $\mathcal{V}$ の双対バンドル, $\mathcal{V}^*$ を $\mathcal{V}$ の法バンドル $\mathcal{V}$ の双対バンドル, $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ を X から M への自然な G -写像 ρ による $\mathcal{V}^*$ の引き戻しとする。そこで $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ 上の G -ベクトルバンドル ξ を考え, 組 (X, ξ) を (M, ρ) の K -コサイクル ということにする。全ての (M, ρ) の K -コサイクルの族 $\mathcal{P}(M, \rho)$ に次の意味で同値関係を入れる: $(X_1, \xi_1) \sim (X_2, \xi_2) \iff$

$$(X_1, \xi_1) \sim (X_2, \xi_2) \iff \begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\rho_1} & X & \xleftarrow{\rho_2} & X_2 \\ & \searrow \rho_1 & \downarrow \rho & \swarrow \rho_2 & \\ & & M & & \end{array} \quad \text{なる可換図形をもつ}$$

固有 G -多様体 X , G -写像 ρ , $\rho_i (i=1, 2)$ が存在して, $\rho_1 / (\xi_1) = \rho_2 / (\xi_2)$ がなりたつ。ただし $\rho_i /$ は $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ 上の G -ベクトルバンドルから $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ 上の G -ベクトルバンドルへの G_{geom} 写像を意味する。そのとき, $\mathcal{P}(M, \rho) / \sim$ は G -ベクトルバンドルの直和に関して可換群になる。これを (M, ρ) の 幾何的 K -群 といい, $K_2(M, \rho)$ と書くことにする。

次に $K_2(M, \rho)$ から $K_2(M, \rho)$ への準同型写像で K -指数写像 と呼ばれるものを説明する。 $(X, \xi) \in \mathcal{P}(M, \rho)$ に対して, ρ が現れ込み写像ならば, τ を $\rho^{-1}(m)$, $m \in M$ の余接ベクトルバンドルとすると, $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ は τ 上のベクトルバンドルでそのファイバーは $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*$ となる。よって G -ベクトルバンドルの Thom 同型定理より ξ は τ 上の G -ベクトルバンドルとみてよい。 $\xi_m = \xi|_{\tau_m}$ とおくと, ξ の定義より ξ_m は $\rho^{-1}(m)$ 上の補円型微分作用素 D_m の表象を与える。 D を G -同変微分作用素場 $m \mapsto D_m$ とすると, ξ は D の表象

を与える。この場合作用素 D の K -理論的指数 $\text{index}(D) = [\text{Ker } D] - [\text{Coker } D]$ は G -不変性より $K_*(M, \mathcal{F})$ の元を定める。もし ρ が沈め込み写像でなければ次の可換図形を考える：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & M \times X \\ \rho \downarrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

ただし $\rho(x) = (\rho(x), x)$, $\pi(m, x) = m$ である。

前述の議論と同様にして、 G -ベクトルバンドルの *Thom* 同型定理より、 ρ は $M \times X$ 上の G -葉層の法バンドル $\mathcal{V}_{M \times X}$ の双対バンドル $\mathcal{V}_{M \times X}^*$ と $\mathcal{V}^*$ の π による引き戻し $\pi^*(\mathcal{V}^*)$ との直和 $\mathcal{V}_{M \times X}^* \oplus \pi^*(\mathcal{V}^*)$ 上の G -ベクトルバンドルと同一視出来る。 π は沈め込み写像であるから前段階と同様にして ρ の K -理論的指数が $K_*(M, \mathcal{F})$ の元として定まる。これを $\mu(X, \rho)$ と書くとこの値は (X, ρ) の同値類の元の取り方に依らない。従って、 μ は $K_*(M, \mathcal{F})$ から $K_*(M, \mathcal{F})$ への準同型写像を定める。これが K -指数写像である。

Baum-Connes 予想 I

K -指数写像 μ は常に $K_*(M, \mathcal{F})$ から $K_*(M, \mathcal{F})$ への同型写像である。

一方微分力学系 (M, G, ρ) を与えたとき、 ρ が自由作用ならば、 G -軌道全体 $\mathcal{F}$ は M の葉層をつくるが、その C^* -環 $C_r^*(M, \mathcal{F})$ は C^* -接合積 $C_0(M) \rtimes_r G$ と同型になるので $K_*(M, \mathcal{F}) = K(C_0(M) \rtimes_r G)$ である。又 $K_*(M, \mathcal{F})$ は次に定義する可換群 $K_*(M, G)$ と同型になる：固有 G -多様体 X から M への G -写像 π に対して $T^*(X) \oplus \pi^*(T^*(M))$ 上の G -ベクトルバンドル ξ を考えたとき、組 (X, π, ξ) の全体を $\mathcal{P}(M, G)$ とすると $\mathcal{P}(M, \mathcal{F})$ の場合と同様にして同値関係を入れる。即ち、

$$(X_1, \mathcal{F}_1, \pi_1) \sim (X_2, \mathcal{F}_2, \pi_2) \iff \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & X \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi \\ & & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mathcal{F}_2} & X_2 \\ & \swarrow \pi & \nwarrow \pi_2 \\ & & M \end{array} \quad \text{なる可換図形を定}$$

める $X, \pi, \mathcal{F}_i$ ($i=1,2$) が存在して $\mathcal{F}_1! (\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2! (\mathcal{F}_2)$ がなりたつ。ただし $\mathcal{F}_i!$ は $T^*(X_i) \oplus \pi_i^*(T^*(M))$ 上の $\mathcal{G}$ -ベクトルバンドルから $T^*(X) \oplus \pi^*(T^*(M))$ 上の $\mathcal{G}$ -ベクトルバンドルへの $\mathcal{G}$ -ysin 写像である。 $K_g(M, \mathcal{G}) = P(M, \mathcal{G})/\sim$ とおくと自然な和で可換群になる。 Baum-Connes 予想 I を考慮すると、微分(位相)力学系についての次の予想が考えられる: $K_g(M, \mathcal{G}) = K(C(M) \rtimes_g \mathcal{G})$ とおくと、

Baum-Connes 予想 II 任意の微分(位相)力学系 $(M, \mathcal{G}, \varphi)$ に対して、

$K_g(M, \mathcal{G})$ から $K_g(M, \mathcal{G})$ への K -指数写像 μ は常に同型写像である。

予想 I, II が肯定的であれば、位相幾何、微分幾何 及び C^* -環における重要な未解決予想を肯定的に解くことができる。 それらを順次説明していくことにする。

M を向き付けられた閉多様体とし、 $P_j \in H^{2j}(M, \mathbb{Q})$ を M の j 次有理 Pontryagin 類とする。 即ち、 $C_j(T_x M) = C_j$ を M の接束 j 次 Chern 類、 i_2 を $H^*(M, \mathbb{Z})$ から $H^*(M, \mathbb{Q})$ への埋め込みとしたとき、 $P_j = (-1)^j C_{2j}$ である。 そこで全 Hirzebruch L -類を考える。 即ち、

$$L(M) = 1 + \frac{P_1}{3} + \frac{1}{45} (7P_2 - P_1^2) + \dots$$

である。 π を M の基本群とすると $H^*(\pi, \mathbb{Q})$ は π の分類空間 $B\pi$ の $\mathbb{Q}$ -係数 cohomology $H^*(B\pi, \mathbb{Q})$ に同型である。 f を M から $B\pi$ への分類写像とすると、

$x \in H^*(B\pi, \mathbb{Q})$ に対して,

$$\sigma_\pi(M) = \langle L(M) \vee f^*(x), [M] \rangle$$

を考え, M の 高次符号数 ということにする. そのとき, 一般 Novikov 予想とは次のように述べられる:

(一般 Novikov 予想) 向き付けられた閉多様体 M に対して, その高次符号数 $\sigma_\pi(M)$ は M の *homotopy* 不変量である.

実際, π を普通 *flat* な M 上の $C_\pi^*(\pi)$ -バンドルとし, π を係数とする符号作用素の $C_\pi^*(\pi)$ -指数として $\langle L(M) \vee f^*(x), [M] \rangle$ はとらえられる. この指数は (oriented) *homotopy* 不変量であり, $[\pi] \in K(C_\pi^*(\pi))$ であるから Kasparov 写像 $\alpha: K^*(C_\pi^*(\pi)) \rightarrow RK^*(B\pi)$ について, $ch_{\pi\pi}(\alpha([\pi])) \in H^*(B\pi, \mathbb{Q})$ を使うと, π が $Im \alpha_\mathbb{Q}$ が $LK^*(B\pi) \otimes \mathbb{Q} \subset RK^*(B\pi) \otimes \mathbb{Q}$ で射影極限位相で稠密ならば $\sigma_\pi(M)$ は M の (oriented) *homotopy* 不変量となる. この条件は Kasparov 写像 $\beta: RK_*(B\pi) \rightarrow K_*(C_\pi^*(\pi))$ の $\mathbb{Q}$ -単射条件を導く. π が有限生成ならば, β の $\mathbb{Q}$ -単射性の仮定の下に一般 Novikov 予想が解決される. Mishchenko は *oriented* 閉 $K(\pi, 1)$ -多様体が非正断面曲率をもつ *Riemann metric* を有するならば, $Im \alpha_\mathbb{Q}$ は $LK^*(B\pi) \otimes \mathbb{Q}$ で稠密であることを示している. 又 Kasparov は π が連結 Lie 群に離散群として埋め込み可能ならば, やはり $Im \alpha_\mathbb{Q}$ は稠密であることを示している.

さて次に Gromov-Lawson-Rosenberg の予想について述べておくことにする.

向き付けられたスピノール多様体 M について, その高次 $\hat{A}$ -種数 $\rho_2(M)$ を考える. 即ち, $f, \pi, [M]$ を $\rho_2(M)$ を定義したものと同様のものとしたとき,

$$\rho_2(M) = \langle \hat{A}(M) \vee f^*(x), [M] \rangle, \quad x \in H^*(B\pi, \mathbb{Q})$$

である. ただし, $\hat{A}(M)$ は M の全 $\hat{A}$ -類であり,

$$\hat{A}(M) = 1 - \frac{P_1}{24} - \frac{1}{32 \cdot 45} (P_2 - \frac{7}{4} P_1^2) - \dots$$

で与えられる. $\chi_x(M)$ を M の $x \in M$ におけるスカラー曲率, 即ち $(X_i)_i$ を $T_x(M)$ の正規直交基としたとき, $\chi_x(M) = \sum_{i,j} \langle R(X_i, X_j) X_j | X_i \rangle$ であり, R は曲率テンソルである, とすると予想は次の形で与えられる:

(Gromov-Lawson-Rosenberg 予想) 向き付けられたスピノール多様体 M に対して, $\chi_x(M) \geq 0$ ($\forall x \in M$) かつ $\chi_x(M) > 0$ ($\exists x \in M$) ならば, 高次 $\hat{A}$ -種数 $\rho_2(M)$ は $\forall x \in H^*(B\pi, \mathbb{Q})$ に対して 0 である.

実際, ξ を M 上の flat $C_0^*(\pi)$ -バンドルとし, $\langle \text{ch}(\xi) \vee \hat{A}(M), [M] \rangle \in K_*(C_0^*(\pi)) \otimes \mathbb{Q}$ を考えると, $\text{ch}(\xi) \vee \hat{A}(M) = \text{Th}^+[\text{ch}(\sigma(D^+)) \vee \text{Td}(M)]$ となる. ただし Th は $H^*(M, \mathbb{Q})$ から $H_c^*(T^*M, \mathbb{Q})$ への Thom 同型であり, D^+ は M の half-spinor バンドル S^+, S^- から, ξ の flat 接続を使って作られる Dirac 作用素である. 即ち, $\Gamma^+(S^+ \otimes \xi)$ を $S^+ \otimes \xi$ の適当な断面全体とすると,

$$D^+ : \Gamma^+(S^+ \otimes \xi) \rightarrow \Gamma^+(S^- \otimes \xi), \quad D^- : \Gamma^-(S^- \otimes \xi) \rightarrow \Gamma^-(S^+ \otimes \xi)$$

なる作用素 D^+, D^- で, $D^- = (D^+)^*$ となるものである. Mischenko-Fomenko により, $\text{ind}_{C_0^*(\pi)}(D^+) = \langle \text{ch}(\xi) \vee \hat{A}(M), [M] \rangle \in K_*(C_0^*(\pi)) \otimes \mathbb{Q}$ が成り立つ.

$\Gamma(S^1 \otimes \xi)$ との L^2 -内積 ($C^*(\pi)$ -値) に関して $D^\mp D^\pm = D^* D + \frac{\chi_\pi(M)}{4} \geq \frac{\chi_\pi(M)}{4}$ であるので $D^+ D$, $D D^+$ は有界逆作用素をもつ. よって $\text{ind}_{C^*(\pi)}(D^+) = 0$ となる. よって $\langle d\ell(\xi) \vee \hat{A}(M), [M] \rangle = 0$ を得る. 従って Novikov 予想と同様に Kasparov 写像 $\beta: RK_*(B\pi) \rightarrow K_*(C^*(\pi))$ が $\mathbb{Q}$ -単射ならば上記予想がなりたつ. ちなみに $K3$ -曲面 K^4 については $\beta_2(K^4) = 2$ であるので正のスカラ-曲率をもたない.

話を C^* -環に移すと, カタ系 (M, G, ρ) について, M を一点とすると, $C_0(M) \rtimes_\rho G$ は C^* -群環 $C^*(G)$ になるが, 一般 Kadison 予想とは次の形で述べられる:

(一般 Kadison 予想) おのれ元をもたない離散群 G の正則群環 $C^*(G)$ は $0, 1$ 以外に射影元をもたない.

現在までのところ, $G = F_n$ ($n \geq 2$) 即ち n 個の元から生成された自由群についてのみ Pimsner-Voiculescu により検証されている.

実際, 上記三予想は Baum-Connes 予想 II について, M を一点としたとき肯定的であるならば解決する.

§3. 多価値空間上の Anosov 作用 微分カタ系 (M, G, ρ) について, ρ が Anosov であるとは次の条件を満たす $g \in G$ が存在するときを言う:

(i) $T(M) = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, E^s は $d\rho_g$ -不変 ($g = s, c, u$)

(ii) E^s, E^c, E^u は積分可能バンドル, $E^c = T(\rho(G))$

$$(m) \quad \|d\mathcal{P}_f^n(\xi)\| < \lambda \|\xi\| \quad (\xi \in E^s), \quad \mu \|\xi\| < \|d\mathcal{P}_f^n(\xi)\| \quad (\xi \in E^u), \\ \lambda \|\xi\| < \|d\mathcal{P}_f^n(\xi)\| < \mu \|\xi\| \quad (\xi \in E^c), \quad n \geq 0 \quad (\text{ただし } \xi \neq 0)$$

となる $0 < \lambda < 1 < \mu$ が存在する。

そのとき, M 上の葉層 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u, \mathcal{F}^c$ で $T(\mathcal{F}^s) = E^s, T(\mathcal{F}^u) = E^u, T(\mathcal{F}^c) = E^c$ なるものが存在する。各葉 $W_x^s \in \mathcal{F}^s, W_x^u \in \mathcal{F}^u, W_x^c \in \mathcal{F}^c$ は次の形で与えられる:

$$\begin{cases} W_x^s = \{y \in M \mid d(\mathcal{P}_f^n x, \mathcal{P}_f^n y) \lambda^{-n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)\} \\ W_x^u = \{y \in M \mid d(\mathcal{P}_f^n x, \mathcal{P}_f^n y) \mu^n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)\} \\ W_x^c = \mathcal{P}(G)x \end{cases}$$

今, G を非コンパクト実半単 Lie 群 (有限中心) とし, $G = KAN$ をその岩沢分解とする。 A の K における中心化群を M とし, $\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{M}$ をそれぞれ G, A, M の Lie 環とする。 $\mathcal{G} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{A} \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda$ をルート系 Λ に関する $\mathcal{G}$ の分解とし, $a \in A$ について $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(\log a) > 0\}, \Lambda^- = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda(\log a) < 0\}$ とし, 正, 負ルート系 Λ^+, Λ^- を考える。ただし a は Λ の正則元とする。そこで $\mathcal{M}^+ = \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \mathcal{G}_\lambda, \mathcal{M}^- = \sum_{\lambda \in \Lambda^-} \mathcal{G}_\lambda$ とおくと, $\mathcal{P}_a(gM) = gaM \ (g \in G)$ について,

$$\begin{cases} d\mathcal{P}_a(\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda^+} e^{-\lambda(\log a)} \xi_\lambda \quad (\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \xi_\lambda \in \mathcal{M}^+) \\ d\mathcal{P}_a(\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda^-} e^{-\lambda(\log a)} \xi_\lambda \quad (\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda^-} \xi_\lambda \in \mathcal{M}^-) \\ d\mathcal{P}_a(\xi) = \xi \quad (\xi \in \mathcal{A}) \end{cases}$$

がなりたつ。よって $T_x(G/M) = \mathcal{G}/\mathcal{M} \simeq \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ より,

$$\begin{cases} \|d\mathcal{P}_a(\xi)\| \leq e^{-c} \|\xi\| \quad (\xi \in \mathcal{M}^+) \\ \|d\mathcal{P}_a(\xi)\| \geq e^c \|\xi\| \quad (\xi \in \mathcal{M}^-) \end{cases}, \quad c = \min_{\lambda \in \Lambda^+} \lambda(\log a)$$

である事実を使うと, $\mathcal{P}$ は Anosov 作用であることが分かる。

注意 1 もし $a \in A$ が 素元であれば,

$$\mathfrak{g}/m = \mathfrak{A} \oplus \sum_{\chi(\log a) \neq 0} \mathfrak{g}_\chi \oplus \pi^+ \oplus \pi^-$$

となり $d\varphi_a$ は Anosov 性をみたさない。

Γ を G の ねじれ元をもたない一様格子とし, $\gamma_a(\Gamma gM) = \Gamma \varphi_a(gM) = \Gamma gaM$

($g \in G, a \in A$) とすると次がなりたつ:

補助定理 1 γ は A から $\Gamma \backslash G/M$ 上の Anosov 作用である。

前述の葉層 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u, \mathcal{F}^c$ 以外に更に $T(\mathcal{F}^{cs}) = E^s \oplus E^c$, $T(\mathcal{F}^{cu}) = E^u \oplus E^c$ をみたす葉層 $\mathcal{F}^{cs}, \mathcal{F}^{cu}$ が存在して, 各葉 $W_x^{cs} \in \mathcal{F}^{cs}$, $W_x^{cu} \in \mathcal{F}^{cu}$ は次の形で与えられる:

$$W_x^{cs} = \bigcup_{y \in \mathcal{G}(g)x} W_y^s, \quad W_x^{cu} = \bigcup_{y \in \mathcal{G}(g)x} W_y^u.$$

そこで $P = MAN$ とおくと, $gM \mapsto (gK, gP)$ によって G/M は $G/K \times G/P$ に G -同変微分同型である。上記のカチ系 $(\Gamma \backslash G/M, A, \gamma)$ について, $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^c$ を調べることにする。まず, カチ系 $(G/M, A, \varphi)$ に対して, $gM \in W_M^s$ ならば, G の smooth curve $g(t)$ で $g(0) = e$, $g(1)M = gM$, $\frac{d}{dt}(g(t)M) \in E_{g(t)M}^s$ となるものがとれる。 $X(t) = \frac{d}{ds}(g(t)^{-1}g(s)M) \Big|_{s=t} \in \pi^+$ ($t \in \mathbb{R}$) より, $\frac{d}{dt}g(t)M = \varphi_{g(t)}(X(t))$, $g(0)M = M$ をみたす。 $A(t) = \exp \int_0^t X(u)du$ が解となり, $A(t) \in N$ かつ $g(t)M = A(t)M$ となる。よって $(g(t)K, g(t)P) = (A(t)K, A(t)P) = (A(t)K, P) \in NK/K \times \{P\}$ となるので, $W_M^s \subset NK/K \times \{P\}$ となる。同様にして $W_M^{cs} \subset G/K \times \{P\}$ を得る。逆に $gM \in G/M$ ($g \in P$) について $gaM = nM$ なる $a \in A, n \in N$ がみつかる

ので $gM \in W_M^s$ となり $gM \in W_M^{cs}$ を得る. W_M^u, W_M^{cu} についても $G = NAK$, $P = NAM$ について同様な方法により形が決定される.

補助定理 2 *Anosov* カタ系 $(G/M, A, \rho)$ について, $G/M = G/K \times G/P$ とすると, $W_{gM}^s = NK/K \times \{gP\}$, $W_{gM}^{cs} = G/K \times \{gP\}$ ($g \in G$) となる. 又 $G/M = G/K \times G/P^-$ とすると, $W_{gM}^u = NK/K \times \{gP^-\}$, $W_{gM}^{cu} = G/K \times \{gP^-\}$ ($g \in G$) となる.

上記結果の幾何的意味は次の様である. 大島による, G/K を閉部分多様体として含み, G/P を G/K の境界として含むような変解折的閉多様体 $(G/K)^{\sim}$ を考える. G の岩沢分解 $G = NAK$ について, $N \times \mathbb{R}^L$ は $(G/K)^{\sim}$ に埋め込まれ, $N \times \mathbb{R}_+^L$ は G/K と $(\pi, e^{-\lambda_1(t)a}, \dots, e^{-\lambda_L(t)a}) \mapsto \pi a K$ によって同型である. ただし $L = \text{rank}_{\mathbb{R}} G$ であり $\{\lambda_i\}_{i=1}^L$ は制限された正の単純ルート系である. 更に G/P は $N \times \{0\}^L$ と同一視出来る. $g \exp(t \log a) K \rightarrow gP$ ($t \rightarrow \infty$) より, $gM, hM \in W^{cs}$ である為には測地半直線 $\{g \exp(t \log a) K\}_{t \geq 0} \subset \{h \exp(t \log a) K\}_{t \geq 0}$ が漸近的であればよい. 一方 W_{gM}^s は境界が gP を通る *homocycle* と解釈できる. W^{cu}, W^u も同様にして解釈される.

話をカタ系 $(\pi(G/M), A, \gamma)$ に移すと, *Anosov* 作用 γ による $\pi(G/M)$ 上の葉層連 $\tilde{\mathcal{F}}^s, \tilde{\mathcal{F}}^u, \tilde{\mathcal{F}}^c, \tilde{\mathcal{F}}^{cs}, \tilde{\mathcal{F}}^{cu}$ はカタ系 $(G/M, A, \rho)$ による G/M 上の葉層連 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u, \mathcal{F}^c, \mathcal{F}^{cs}, \mathcal{F}^{cu}$ のそれぞれ剰余葉層になっている. $\pi(G/M) = \pi(G/K \times G/P)$ より, $\pi(G/M)$ は $\pi(G/K)$ 上の G/P -バンドルになり, 又 G/P バンドルになる. 実際,

$G/P = G/P^- = K/M$ である。補助定理 2 より次がなりたつ：

補助定理 3 葉層化多様体 $(\Gamma \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^j)$ ($j = cs, cu$) は $\Gamma \backslash G/K$ 上の葉層化 K/M -バンドルであり、その全ホロミー群は Γ の G/P (又は G/P^-) 上の左移動により生成される群である。

$\Gamma \backslash G$ は $\Gamma \backslash G/M$ 上の主 M -バンドルであり、 π をその射影とすると容易に次がなりたつ：

補助定理 4 葉層 $\tilde{\mathcal{F}}^j$ ($j = s, u$) の π による引き戻し $\pi^*(\tilde{\mathcal{F}}^j)$ は $\Gamma \backslash G$ 上のそれぞれ MN , NM の右移動による軌道葉層に他ならない。

$\tilde{\mathcal{F}}^j$ ($j = s, u, cs, cu$) のホロミー一群は明らかに Hausdorff 空間であるから、補助定理 3 と 夏目-高井 より次の同型性が成り立つ：

補助定理 5 Anosov 葉層化多様体 $(\Gamma \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^j)_{j=cs, cu}$ について、

$$\begin{cases} C^*(\Gamma \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs}) \simeq (C(G/P) \times_{\lambda} \Gamma)_r \otimes C(L^2(\Gamma \backslash G/K)) \\ C^*(\Gamma \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cu}) \simeq (C(G/P^-) \times_{\lambda} \Gamma)_r \otimes C(L^2(\Gamma \backslash G/K)) \end{cases}$$

がいえる。ただし $(C(G/P) \times_{\lambda} \Gamma)_r$ は $C(G/P)$ の Γ の左移動 λ による縮約積合積であり、 $C(L^2(\Gamma \backslash G/K))$ は $L^2(\Gamma \backslash G/K)$ 上のコンパクト作用素全体のなす C^* -環である。

方, $(C(G/P) \times_{\lambda} P)_r$ は $C(P \backslash G) \times_{\rho} P$ に安定同型である. ただし ρ は P の $P \backslash G$ 上への右移動である. $N = \theta(N)$ (θ は G の Cartan 対合) より, $C^*(P \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs})$ は $C^*(P \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cu})$ と安定同型になる. また補助定理 4 により次がなりたつ:

補助定理 6.

$$\begin{cases} C^*(P \backslash G, \pi^*(\tilde{\mathcal{F}}^s)) \simeq C(P \backslash G) \times_{\rho} NM \\ C^*(P \backslash G, \pi^*(\tilde{\mathcal{F}}^u)) \simeq C(P \backslash G) \times_{\rho} NM \end{cases}$$

がいえる. ただし ρ は NM, NM の $P \backslash G$ 上への右移動作用である.

更に一般に次の事が云える. 今某層化多様体 $(M, \mathcal{F})$ を与えたとき, M 上のバンドル ξ でそのファイバーがコンパクト多様体 F であるとする. ξ の M への射影 π による $\mathcal{F}$ の引き戻し $\pi^*(\mathcal{F})$ に関して某層 C^* -環 $C^*(\xi, \pi^*(\mathcal{F}))$ をとると, $(M, \mathcal{F})$ の C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ との関係は次で与えられる:

補助定理 7

$$C^*(\xi, \pi^*(\mathcal{F})) \simeq C^*(M, \mathcal{F}) \otimes C(L^2(F))$$

従って補助定理 6, 7 を合わせると次の結果が得られる:

補助定理 8

$$\begin{cases} C^*(P \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^s) \otimes C(L^2(M)) \simeq C(P \backslash G) \times_{\rho} NM \\ C^*(P \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^u) \otimes C(L^2(M)) \simeq C(P \backslash G) \times_{\rho} NM \end{cases}$$

さて, 補助定理 5, 8 より解析的 K -群 $K_*(P \backslash G/M, \tilde{\mathcal{F}}^j)$ ($j = s, u, cs, cu$) を

作ると, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^s) = K_2(\pi G, NM)$, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^u) = K_2(\pi G, NM)$,

$K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs}) = K_2(G/P, \Pi)$, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cu}) = K_2(G/P, \Pi)$ となる.

$(C(G/P) \times_{\lambda} \Pi)_+$, $(C(G/P) \times_{\lambda} \Pi)_-$ はそれぞれ $C(\pi G) \times_{\lambda} P$, $C(\pi G) \times_{\lambda} P^-$ と同型

であるから, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs}) = K_2(\pi G, P)$, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cu}) = K_2(\pi G, P^-)$

となる. 他方 $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ の双対法バンドル ν^* は $\pi G/M$ 上の G^*/P^* -バンドルであり,

$\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ の和ミーム群は $\pi(G/K \times G/K \times G/P)$ であるから, $(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs})$ の幾何

的 K -群 $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs})$ は定義により $K_2(\pi G, P)$ に一致する. 同様に

1 $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cu}) = K_2(\pi G, P^-)$, $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^s) = K_2(\pi G, NM)$,

$K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^u) = K_2(\pi G, NM)$ となる.

そこで我々は次に述べる2つの結果を用いることにする:

補助定理 9 (Connes)

微分力学系 (M, G, ρ) について, G が単連結可解

Lie 群であれば Baum-Connes 予想 II は正しい. 即ち $K_*(M, G) = K_*(M, G)$

が K -指数写像 μ のもとでなりたつ. そのとき特に $K_2(M, G) = K_2^{G/M}(M)$.

補助定理 10 (Atiyah-Singer)

(M, G, ρ) を上記と同じ力学系とし,

G がコンパクトであれば 予想 II は正しい.

即ち, 例えば $K_2(\pi G/M, \tilde{\mathcal{F}}^{cs}) = K_2(\pi G, P)$ かつ $P = MAN$ より,

$K_2(\pi G, P) = K_2(\pi G \times_s M, AN)$, AN は単連結可解 Lie 群であるから,

補助定理 9 より $K_2((\pi G \times_s M)^*, AN) = K_2(\pi G \times_s M, AN) = K_2^{AN}((\pi G \times_s M)^*)$

となる。ただし $(\mathcal{A}G \times_s M)^*$ は 群 $\mathcal{A}G \times_s M$ の C^* -環を意味する。 $K_*((\mathcal{A}G \times_s M)^*)$
 $= K_* (\mathcal{A}G, M)$ で M はコンパクト群より、補助定理 10 により $K_* (\mathcal{A}G, M) =$
 $K_* (\mathcal{A}G, M)$ である。一方 $K_*^{\text{LAW}} (\mathcal{A}G, M) = K_* (\mathcal{A}G \times_s M, AN) = K_* (\mathcal{A}G, P)$
 となるから、 $K_* (\mathcal{A}G/M, \tilde{\mathcal{K}}^{cs}) = K_* (\mathcal{A}G/M, \tilde{\mathcal{K}}^{cs})$ を得る。 $\tilde{\mathcal{K}}^{ca}, \tilde{\mathcal{K}}^s, \tilde{\mathcal{K}}^u$
 も同様である。これらをまとめると次の主結果を得る：

定理 11 葉層化多様体 $(\mathcal{A}G/M, \tilde{\mathcal{K}}^j)_{j=cs, ca, s, u}$ について、 Baum-Comnes 予想 I は 肯定的である。

注意 2. $\mathcal{A}G/M$ 上の任意葉層 $\mathcal{F}$ と $\tilde{\mathcal{K}}^j$ との関係は明らかではない。

例 12 H^n を n -双曲的多様体とし、 $\pi_1(H^n)$ をその球面バンドルとする。
 $\pi_1(H^n)$ 上の測地線流から作られる Anosov 葉層 $\mathcal{F}_\lambda$ に対して $(\pi_1(H^n), \mathcal{F}_\lambda)$
 は Baum-Comnes 予想 I をサポートする。

文献

- [1] P. Baum and A. Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, Preprint (1982).
- [2] A. Connes, A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symp. Pure Math., 38 (1982) I, 521-628.
- [3] M. Gromov and H.B. Lawson, Spin and scalar curvature in

the presence of a fundamental group, *Ann. Math.*, 111 (1980), 209-230.

- [4] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press (1978).
- [5] M. Hirsch and W. Thurston, *Foliated bundles, invariant measures, and flat manifolds*, *Ann. Math.*, 101 (1975), 369-390.
- [6] G. G. Kasparov, *Group C^* -algebras and higher signatures*, Preprint (1981).
- [7] T. Natsume and H. Takai, *Connes algebras associated to foliated bundles*, Preprint Series, Univ. Roma (1982).
- [8] T. Oshima, *A realization of Riemannian symmetric spaces*, *J. Math. Soc. Japan* 30 (1978), 117-132.
- [9] J. Rosenberg, *C^* -algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture*, *Publ. Math. IHES.*, 58 (1983), 197-212.
- [10] H. Takai, *C^* -algebras of Anosov foliations*, Springer Lecture Notes in Math., 1132 (1985), 509-516.
- [11] H. Takai, *KK -theory of C^* -algebras for Anosov foliations*, Research Notes in Math., 123 (1986), Pitman.
- [12] H. Takai, *Foliation C^* -algebras and their K -theory*, *Sem. Appl. Func. Anal.*, 6~7 (1984), 75-78.
- [13] H. Takai, *C^* -algebras of Anosov foliations II*, in preparation (1986).