

特殊函数についての特殊な視角

— q -analogue を軸として —

京大理 梅田 亨 (Tôru UMEDA)

Introduction

"群の表現論とは特殊函数論である" という考え方があ
る。これは通常、両者の "Laplacian の固有値問題" としての面を
指して言う。一方で表現論は特殊函数を統制する視角である
し、また他方特殊函数を用いて表現を構成することは表現論
の重要な内容であり手段である。併し乍ら、特殊函数には狭
い意味で直接 Laplacian の固有値問題に結びつくもの以外に
も表現論と深いつながりをもつものも多く、また表現論で扱
う群も Lie 群に限られたものではない。冒頭に述べた考え方
はむしろ「対称性」を通じてつながったより本質的なものを
も表していると解釈すべきであろう。

さて、以下にのべようとする主題は「 q -analogue」である。
「 q -analogue」の世界には一見奇妙なことに「通常の」特殊函数
とパラレルな（として $q \rightarrow 1$ とすると通常のものが復元される）
特殊函数が存在し、その中には表現論と密接につながるもの

もある。そこに注目し、「表現論と特殊函数」のつながりを改めて考える時、特殊函数を統制する群論的な原理の多くと一部が浮かびあがってこようし、 q -analogue についてもより進んだ理解が得られるであろうと期待するのである。

q -analogue とはいえ、まず特に興味を惹かれるものとして級数と乗積の転換 ($\Sigma = \Pi$) の公式がある。それは更に、例えば (1) sl_2 の表現論とか (2) 等分論 (特に円分論) などの重要な原理 (モチーフ) と思い起こさせる。それらが実際深くかかわりあっていることはよく知られていることであるが、 q -analogue の歴史を辿るときにもはっきりあられる。

q -analogue はまた、意外なほど多くの数学の分野に顔を出す。これは単なる偶然ではない筈である。その理由を認識することが即ち q -analogue の本質を知ることであり、更に「表現論と特殊函数」のつながりに対する把握を深めることになると思われる。

以上の様なものの見方はたしかに特殊で一面的であろうし、何よりも充分つまみつきで考察するには時間も労力も多くのもを必要とする。また多くの例証とともによほど深い考察を示してみせなくてはならぬであろう。いづれにしても私の手に負えるものではない。ここはごく粗いメモとして q -analogue の紹介を試みるのみである。

§0. q -analogue とはどのようなものか.

q -analogue ということは(乃至考え方は), たとえば, 数学辞典の新版(オックスフォード版)にも登録されていないという意味では常識とまではいえないのであろうが, 近年一般的なものとして普及しつつあるものといえてよいだろう. 一見するとそれは特殊で, 趣味的とすら見えるかも知れないが, それがかかわる分野は広く, 興味深いものをもつていえる.

q -analogue ということは自体は勿論数学的に厳密に定義されるようなものではない. それは大雑把に言うと通常の数 x の代りに $[x] = (q^x - 1)/(q - 1)$ という“数”を基礎において“数学”を展開するものといえる. ここに q はパラメーター(或いは不定文字)であって q を base, $[x]$ を q を base とする basic number ということもある. そして, q -analogue of $**$ のことを $q-**$ とか basic $**$ と接頭辞又は形容詞をつかっていうこともある.(文献によって異なる. ただし q -数というとき量子力学の用語とまぎらわしいのでいわない). さてここぞ $q \rightarrow 1$ とおくと $[x] \rightarrow x$ となり通常のもものが復元される. その意味で q -analogue は通常の数的一种の deformation であり, 「量子化」とも似た面をもつ. このことは単に形式上のことではないと思われる.

0.1. これだけの説明では判りにくいから、ひとつ例をあげる。それは二項定理の q -analogue (q -binomial theorem) というもので、簡単ではあるが、最も重要な例のひとつである。

まず、 q -binomial coefficient (q -二項係数) とは

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[r]! [n-r]!} \quad , \quad \text{但 } [a]! = [a][a-1] \cdots [1].$$

これは別名 Gauss 多項式ともいう (q について多項式となる)。

二項定理の q -analogue (むしろは単純な case) は

$$(0.1) \quad (1+x)(1+qx) \cdots (1+q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r$$

というものである。この式は丁度「近世数学史談」の Gauss の項にあらわれるものである。いま " n 乗の q -analogue" として

$$f(x)^{[n]} = f(x)f(qx) \cdots f(q^{n-1}x)$$

と考へれば、(0.1) はより尤もよく見える：

$$(0.1') \quad (1+x)^{[n]} = \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q x^{[r]}$$

さて (0.1) で $n=2N$, $x \mapsto q^{-2N+1}x$, $q \mapsto q^2$ として $q^{N^2}x^{-N}$ に両辺にかけ、さらに $N \rightarrow \infty$ と極限移行すると ($|q| < 1, q \in \mathbb{C}$), theta 函数の有名な Jacobi の三重積公式 (従つてその Cor. である Euler の五角数公式や Jacobi の公式) が得られる：

$$(0.2) \quad \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{2j})(1+q^{2j-1}x)(1+q^{2j-1}x^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} x^r$$

(Jacobi の三重積公式)

$$(0.3) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} \quad (\text{Euler の五角数公式})$$

$$(0.4) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (\text{Jacobi の公式})$$

さて (0.1) に戻って両辺の x^r の係数を比較するとにより,

$$(0.5) \quad \sum_{0 \leq l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{r-1} \leq n-r} q^{l_0 + \dots + l_{r-1}} = \left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]$$

を得るが、これより特に $\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]$ が q の多項式となつてゐる事がわかる。この式は (0.1) の或る意味での "dual" と見る事ができるかも知れない。これらのさまざまの解釈も興味深い (たとえば (0.5) は Grassmann 多様体の Poincaré 多項式をあらわしてゐる)。

(0.1) 及それから得られる結果 (楕円函数, モデル函数) が Gauss の遺稿中にあることは「近世数学史談」にあるので周知のとおりと思う。また Gauss は Gauss 和の符号の決定に (0.1) と類似の

$$(0.6) \quad (1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2n-1}) = \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r \left[\begin{matrix} 2n \\ r \end{matrix} \right]$$

を用いてゐる。これが平方剰余の相互法則の第四証明 (1811)

というもので、のちに A. Weil の "Sur certains groupes d'opérateurs unitaires" (1964) などに至る解析学と数論の重要な交点となる源となる。(その証明の分析については何よりもまず久保田 "整教論の発展をめぐって" (数学の歩み '61.8-4) を見るべきである)。

上で (0.1) から Jacobi の三重積公式を出す方法は、本質的には Gauss のものといえるが、論文として発表されたものとして Cauchy によるというのがよくも知られない (C.R. 1843; Œuvres 1^{re} série tome VIII pp. 42 冊, 番号 225-232, 236 等)。つまり Jacobi の "Fundamenta Nova" (1829) の結果の簡単な証明ということであるが、二項定理との類似も意識しているようである。二項定理のアナロジーということについては Jacobi 自身も論文を書いている (1844 Crelle J) と、Eisenstein にもある。そのいづれも Euler をふまえている。

§1. q -analogue の歴史を語る

「 q -analogue」という言葉自体がいつごろから使われ出したか、それを特定するのは難しい。けれども ordinary theory から q -theory への移行に大きな可能性を見出し、組織的にその研究をはじめたおそらく最初の人である F.H. Jackson にその起源をまとめるのはそれほど見当ちがいない。

はいえないだろう. 少なくとも彼は単に「generalized」とか
「generalization of ...」とか q はなく「basic」又は「 q -...」,
「 q -form of ...」のことはを使用していない.

Frank Hilton Jackson (1870-1960) は有名な数学者ではないけれども, T.W. Chaundy による追悼文 (J. London Math. Soc. 37 (1962) 126-128) がある q でいくらか知ることもができる. そこには 49 にのぼる論文の目録があるが, 殆どが q -analogue (of hypergeometric functions) に関するものである. (但, 中には少なくとも三編の論文が抜けている. 二編は最も初期のもの q -analogue を扱ったものではない. もう一編 1950 年のもの q 妙なことに Chaundy 自身がかかわっている.) q -analogue に至る動機が得られないかと初期の論文に実際にあたってみると少し興味ある記述を見出すことができる. Proc. London Math. Soc. の meeting の記録 (Thursday, June 10th, 1897) には次の一文がみえる: Mr. Love, Hon. Sec., read "A Generalized Form of the Binomial Theorem", which had been sent by the Rev. F.H. Jackson. The Chairman (Major MacMahon) stated that the form was a known one.

ここにのべられた Jackson の論文は当然雑誌には掲載されてはいないが, 推測するに先にのべた (0,1) か或いはそれをもう少し拡張したような二項定理の q -analogue にはなかつたか

と思われる。ただそれに先立つ (Received March 27th, 1897.

Read April 8th, 1897) 同に Proceeding には "An Extension of the Theorem $\frac{\pi(r-\alpha-\beta-1)\pi(r-1)}{\pi(r-\alpha-1)\pi(r-\beta-1)} = F_1(\alpha, \beta, r)$ " という

Gauß の公式 (超幾何超幾何に属する) の q -analogue についての論文が生じている (Jackson の論文としてはこれが q -analogue についての最初の論文であろう)。どうやら Jackson は先行する研究とは独立に q -analogue を発見したらしい。

"Series connected with the enumeration of partitions" (Proc. London Math. Soc. (2) 1 1903/04, 63-88) では上の Gauß の公式のさらなる拡張を扱っている。そして先ほどのハミルトン二項定理の q -analogue について Cauchy, Euler, Gauß の名を挙げているのは 1897 June 10th の meeting での MacMahon による注意によったのかと知られない。

ともかく以後 1950 年(?) にいたる迄 q -analogue の論文が次々と発表されることになる。

注意すべきは、我々は q -analogue と気軽にいつていているが、Jackson の初期の論文では q ではなく p という文字を使っている (p は partition の p か?) ことである。(たとえば有名な Watson の Bessel function の本 (pp. 43-44) でこうと紹介されている basic Bessel function)。Jackson が p から q へと変更したのは恐らく 1908 年頃であるが、その論文自体を見ることはできない。

ない。ただそれに続く 1910 年の "q-Difference Equations" を見ると E. Heine の "Kugelfunctionen (球函数論)" (1878) 及び Thomae の論文 (Crelle J. Vol LXX 1869) を引用しているのど、推測ばかりしているが、多分その頃からこれら Heine や Thomae の論文を知り「q-form」, 「q-…」という用語にきりかえられたらう。

ところで実際に Proc. London Math. Soc. に見ていると否応なしにもうひとつの q-analogue に出会う。L. J. Rogers の一連の論文である。例えはのちに Rogers-Ramanujan identities として知られる

$$(1.1) \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q) \cdots (1-q^m)} = \prod_{r=0}^{\infty} ((1-q^{5r+1})(1-q^{5r+4}))^{-1} \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2+m}}{(1-q) \cdots (1-q^m)} = \prod_{r=0}^{\infty} ((1-q^{5r+2})(1-q^{5r+3}))^{-1} \end{cases}$$

は 1894 年の Second memoir にあるわけだし, "On a Three-fold Symmetry in the Elements of Heine's Series" (1893) というものもある。

Jackson はこれらの Rogers の論文に全く注意を拂わなかったのだらうか? そのあたりは事情はわからない。(彼が「牧師」であって "professional 数学者" でないことが関係するのかわかりか)

* * *

たしかに Jackson はそれが q-analogue の開拓者であったと

いうてよいと思うが、それ以前にもその可能性に気づいていた数学者はいる。二項定理の q -analogue については既に述べたように Gauss, Cauchy, Jacobi, Eisenstein などの人々がいる。しかし何と云っても E. Heine の名にのびるわけにはいかない。彼は超幾何級数の q -analogue を扱ったのである。その著書、「球函数論」(1878 vol I) の中には附録として q -analogue にページを割いている (pp. 97 附 & pp. 284-285)。実際彼は論文としてはもっと古く (Crelle J. 1846 及 47) に、のちに Heine の級数として知られる

$$(1.2) \quad 1 + \frac{(q^{\alpha}-1)(q^{\beta}-1)}{(q^{\alpha}-1)(q^{\beta}-1)} x + \frac{(q^{\alpha}-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^{\beta}-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q^{\alpha}-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^{\beta}-1)(q^{\beta+1}-1)} x^2 + \dots$$

を論じている (Crelle J. 32 pp 210-212 及 34 pp 285-328)。

この頃の Crelle J. (= J. für reine u. angew. Math.) をみているととりわけ Jacobi 及 Eisenstein による楕円函数 (特にまた elliptic theta functions) の研究が精力的になされているのが目立つ。超幾何級数は Euler や Gauss によって研究されているわけだが、連分教展開と深い関係がある。実は Heine は上記の論文のちに theta 函数の連分教展開を扱った ("Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche" (Crelle J. 32 (1846) 205-209)。このあたりにどうやら級数 (1.2) を考えた動機があるようである。(1.2) だけを見ていて、一体どうしてこのようになるかと思ひ

ついに q かと思議に思っていた(「数学辞典」の超幾何函数の項にある)のだが、当時のこのような楕円函数や超幾何函数の研究状況を考えれば、或る程度納得がいくように思う。こゝまで溯つてみると ordinary も q -analogue も意識の上で区別するようなものではないといえる。

こゝでいふことは、何故 q という文字を使うのかということに触れる。Heine 自身はたしかに q を使っていたが、これは Jacobi の "Fundamenta Nova" (1829) で使われたからだろう。(q は quantity の q か (少なくとも語源的に)) Gauss, Cauchy, Jacobi, Eisenstein (或いはまた Euler) は場面によつて $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ の記号を用いてゐるのど「 q 」が特定の意味をもつようになったのはやはり Heine に責任があるのだと思う。

* * *

上のようなことと q -analogue の誕生の時刻と一応 Heine の 1846 年の論文とみなすのは無理である。しかし一方 θ 函数に、また一方 q -超幾何函数に起源をもつわけど、その両者、さらには q -スケートの等分や Gauss 和の符号の決定という解析の問題も殆ど同じ起源をもち、その全てが Gauss につながる。さらにはまた Euler もその前にいる。特に組合せ(分割数)の問題から発見された「五角数公式」(0.3) 及類似の等式があつてのはいまりであるように思う。

§2. いくつかの topics

今度は歴史を下って駆け足で (敵数も残り少ない) 現在に至るいくつかの話題を見てみる (全2を網羅する = とはとてできない).

2.1 特殊函数の q -analogue

既に見てきたように 1846 年 Heine の q -hypergeometric series から本格的な q -analogue が始った. Gauß 以後超幾何函数の理論はさまざまに拡張され整備されてきた. Riemann による P 函数の理論はそのひとつだが, それに対応するものとして J. Thomae によるものがある ("Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe: ..." (1869 Bochart+J. 70)).

Thomae はまた Gauß の超幾何級数を拡張して multiple GHS を導入した (注: 「数学辞典」では J. Thomas と誤記されていゝ). さらに Thomae 自身この q -analogue を扱った (Annali di Matematica IV (1870) pp 105-139). 即ち

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a^{(0)}]_n \cdots [a^{(k)}]_n}{[1]_n [b^{(1)}]_n \cdots [b^{(k)}]_n} x^n, \quad \text{但} [a]_n = \frac{[a+n-1]!}{[a-1]!}$$

いゝと $q \rightarrow 1$ とすると Barnes の ${}_2F_1$ ${}_2F_1(a^{(0)} \cdots b^{(1)}; x)$ というものになる (${}_2F_1$ が Gauß の超幾何級数.)

以後さまざまな形の q -hypergeom. funct. 及其特殊化について (特に Jackson 及それ以後) 研究がなされてきた. その

方面のまとまった書物として H. Exton "q-Hypergeometric Functions and Applications" (1983) がある.

q-series は特に組合せ論の興味から多く研究されてゐる.

(たとえば G.E. Andrews "The Theory of Partitions")

2.2 Macdonald identities, Rogers-Ramanujan identities

$\prod (1-q^n)$ 及 $\prod (1-q^n)^3$ の級数展開は Euler, Jacobi による 2 つ知られてゐるが, さらに一般に $\prod (1-q^n)^N$ を展開する公式 (むしろ Jacobi の三重積公式の一般化というべき) が Macdonald identities である. (N = 複素単純 Lie 環の次元).

その証明として ⁽¹⁾Kac-Moody Lie 環の Weyl の分母公式を見ることが見通しがよく, 単一の q に特殊化するものは sl_2 と同型な subalg. (主に principal TDS) に表現を制限する ことにある (詳しくは Kac の "Infinite dimensional algebras").

Rogers-Ramanujan identities (R-R) は既に (1.1) で見た. これも最近(?) では Kac-Moody 環を使う証明もあるのと, 特に興味をもたれてゐるし, 統計力学の分配函数の等式としての意味がある (R.J. Baxter). 初等的な証明は D.M. Bressoud による 2 つ得られてゐる ("An easy proof of the Rogers-Ramanujan id." (J. Number Theory 16 (1983) 235-241)). これは q -binomial theorem から極限移行による 2 三重積公式を導くのと同じように, 有限級数の等式から R-R を導くのである.

§3. q -analogue とは何なのだろうか

前節までに q -analogue についてごく大雑把に眺めてきたが, q -“analogue” が単に形式上の類似にとどまるなるは興味も少ない。ここではもう少しだけ手がかりをつけて, その理解への (粗雑な) 踏み台とした。

3.1. q -analogue の解釈と不思議

既に我々は q -analogue の歴史をたどって, theta 函数や modular 函数にその源があるのを見た。さらに Euler によって漸増と分割数の母函数という組合せ論的意味があった。ところで q -analogue にはもうひとつの重要な解釈がある。それは Rota - Goldman (“The Number of Subspaces in a Vector Space” (1969)) に注意で, たとえば q -二項係数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元 vector space の中の r 次元 linear subspaces の数である, というものがある。(即ちこの場合有限体上の Grassmann variety の点の個数ともいえる。)

このように q -analogue は q として不定文字 q とって母函数を考える以外にも q を特殊化して

$|q| < 1$ theta function etc.

$q = 1$ 普通の「数」, 「組合せ」

$q = p^{\wedge k}$ 有限体上の linear variety の数

としての意味をもち, 4 かけ上かなり異なったものを思いこむ。

るところが不思議に思える。また $q \in 1$ の p 根としたときには平方剰余の相互法則の Gauss の q の 4 証明とも結びついた。

さて $q=1$ (or $|q|=1$) の場合は別として、 $|q|<1$ と $q=p^{1/p}$ の場合でみかけは大変異なるようではあるが、よくよく考えてみるとそこに共通するものがないわけではない。どちらも“線型”空間と関係した modular な世界にあるということである。

(「普通」のものを Boolean (lattice) と考えての対比をここで言う。)

3.2. 唐突ではあるが「量子化」ということについて思い出そう。量子力学では観測量は linear operator, 状態はベクトルであると考えられる。また古典力学で「数」だったものが「operator」になることを「量子化」というわけだ(もちろんごく大雑把に言うている)。operator とは vectors の(多次元的な)「比」と考えられる。たとえば「位置」というのも古典的には実数 a であると考えられているところを、量子力学では位置作用素の“固有ベクトル”である δa というデルタ函数(ではある linear subsp.)であると考えられていると考へる。このように量子力学では線型部分空間が基本的な構成要素を有している。

さてさきほどの q -analogue の解釈で $q=p^{1/p}$ の場合はそのまま線型空間が登場したが、 $|q|<1$ の場合にはどうか。もっとも modular 函数の語源として「modulus」という語は「量」の比であり、特に elliptic modular の場合、elliptic curve をあつた

す $\mathbb{C}$ 内の lattice の basis の比 $\tau \in \mathcal{H} = \text{上半面}$ を変数と考へた
 からなうけろぬものであらう. このとき g は $g = e^{2\pi i \tau}$ と
 いう形で $q = 1$ に入る. 従つてここでは「線型」といふ
 ことも係数を $\mathbb{Z}$ にした module と拡大解釈する. しかし modular
 lattice などという場合「環係数」の module を抽象化したと思へば
 線型という語が適切でなくとも modular なものかと思う.

3.3. (群のユニタリ) 表現論自体, もともと量子力学から生
 れたとも言えるが, 群の元を線型作用素として実現すること
 以上に言ふたような意味で modular なものがある. (物理量
 として扱はれる Lie 環の表現という方がよい.) 或る場合には
 表現の実現が量子化によはれる.

(ユニタリ) 表現に限らなくとも線型群の場合既にそれ自体
 自然に線型構造と かかわつた多くのものをもちつゝゐる. たと
 えば Borel (or parabolic) subgroup や maximal compact subgroup
 にしても flag variety に作用するものとして群をとるとき
 き自然にあはれる. それは代数群などの場合考へる環など
 をかえても (おこくるものは当然異なるが) 共通して是れと
 ころをもちつゝ.

q -analogue が特殊化によつて異なつたものを持つるのも同様の
 理由であらう. たとえば Hecke 作用素 (古典的) という
 のもとに $\mathbb{Z}$ -module である lattice (格子) があり, それを

素直 (ゆえ含め) で考えると, (各々で少しは異なるが)
 q -analogue としての形式をみせる のであろう.

注意したいのは, ここでは全く単独の q というものがあるわけではないうことで, これは一変数の函数である. 実際には多変数があるわけでもよし, 環上のものはいろいろの語でも現れはいるが, たとえば Macdonald id. q と m に q と m と触れ込むように sl_2 (principal TDS) に制限して変数を一つにするとかしていろいろある.

3.4. 以上かなり杜撰で, 言い方も適切でないばかりか, きちっと考えていることまで書いてしまったので, 大変読みづらいものとなった.

いづれにせよ, まとめていふことを書くならば, q -analogue は背後に「線型」(modular) なものをもっている筈(?) ながらそれとどういふことが鍵であろう, そして特殊化したものが異なって見えても, 係数環が $\mathbb{Z}$ であるときのように global なものをもっていることがそれらをきく部分ではないかということである. 更には「普通の」Boolean なものをその limit として考える modular な数学の一部として q -analogue というものを位置づけしてみた. q -analogue をそれだけで割り切るわけにはいかないかとも思うが, そういふ部分は決して小さくはないように思う.