

離散べき零群の表現

岡山大 教養 梶原毅

離散べき零群は、非 I 型群の一つの典型的な例であり、他の非 I 型群に比べると、べき零 Lie 群というモデルがあるので、理論を作り易く、古くから、研究されている。最初にこのような群の表現を研究したのは、R. Howe [7] である。彼は、有限生成でしかも torsion がないときに、Primitive ideal space を計算し、任意の既約表現が monomial 表現に弱同値であることを示した。また、任意の Primitive ideal に対して、ただ一つの指標が対応していることも示した。Howe の理論は、後に I. D. Brown [2] によって、必ずしも torsion free でない場合に拡張された。Primitive ideal space の位相については、D. Poguntke [9] が、 T^1 であることを示した。この後は、群に課せられた条件を緩めていく方向で、拡張が進められてきた。単なる離散べき零群に対して上のような命題が完全に成立するかどうかについてはまだ不明であるが、Australia の Carey, Moran 等の一派によって色々研究されていて、部分的ではあるが、興味深い結果が得られている。Carey, Moran [3], [4], [5], 等を参照されたい。L. Baggett [1], S. Kawakami [8] らの既約表現の分類、また因子表現の既約分解の理論も、特定の離散べき零群に対するものであると解釈することもできる。

非 I 型群の表現論におけるもう一つの流れは、A. Connes [6] による非可換積分論である。Connes 自身は foliation における index theorem を証明するためにこの理論を作ったのであるが、Belisard-Testard による未発表の論文によってこの理論の表現論への応用が示唆されるに至った。しかし、今まで応用とされるものはただ一つで、それは、C. E. Sutherland [10] である。彼は、Connes の理論を応用することによって、特定の非 I 型群に対して、既約表現を用いた Plan-

cherel 公式を書き下すことが出来ることを示し、分解に出てくる表現が、弱い意味ではどのような分解によって現れるものも同値であることを述べた。最後のことは、hyperfinite II_1 factor の Cartan sub-algebra の一意性によるものである。

ここでは、Sutherland の路線に従って、離散べき零群の Fourier algebra の元を random operator として表し、またその逆対応をある意味で具体的に書き下すことを考えた。このノートは3つの章からなる。最初の章では、必ずしも Groupoid にならない場合についての Connes の理論の一般化についてのべる。次の章では、有限生成で torsion free であるときの既約表現について論じる。最後の章で、前の結果を用いて、Fourier algebra の元を書き下すことと、適当な意味における逆対応を具体的に書き下すことを行う。

§1. G は locally compact group, N は normal な maximal abelian subgroup で N から適当な G -invariant conull subset Λ を選んで、 $x \in \Lambda$ に対して $\text{Ind}_{N \uparrow G} x$ が irreducible となると仮定する。上の group extension は必ずしも split しないので、 $\hat{N} \times G/N$ の型の groupoid には必ずしもならないが、このような場合においても、Connes, Bellisard, Testard と同様の singular integral direct integral theory を考えることができる。 $\alpha \in \Lambda$ をとる。 $L^2(G, N, \alpha)$ で $\text{Ind}_{N \uparrow G} \alpha$ の表現空間を表す。 $\xi \in L^2(G, N, \alpha)$ は、 $\xi(ng) = \langle \alpha, n \rangle \xi(g)$ $g \in G, n \in N$ をみたし、 $\text{Ind}_{N \uparrow G} \alpha$ は、その空間の上に右移動として作用している。 λ で G の $L^2(G)$ 上の右正則表現を表す。 $\mathcal{U} = \text{Ind}_{N \uparrow G} \alpha$ とおくことによって、

$$\lambda(g) \cong \int_{\Lambda}^{\oplus} U^{\alpha} d\alpha$$

と既約分解される。これは N に関する Fourier 変換である。

$\hat{N}$ には G/N が作用しているので、groupoid like structure が考え

られる。これを用いて、Connes-Bellissard-Testard 理論を今の場合に拡張する。 $L^2(G, N, \alpha)$ 上の closed operator の measurable family $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を考える。これが "random operator" であるための条件を考えたい。 $L^2(G, N, \alpha)$ から $L^2(G, N, g \cdot \alpha)$ への unitary operator $V^\alpha(g)$ を、 $\xi \in L^2(G, N, \alpha)$ に対して $(V^\alpha(g)\xi)(g') = \xi(g^{-1}g')$ で定義する。

定義 1. $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が random operator であるとは、全ての $g \in G$ に対して、次をみたしていることである。

$$V^\alpha(g)T^\alpha = T^{g\alpha}V^\alpha(g).$$

$\text{esssup} \|T^\alpha\| < \infty$ となる random operator $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 全体を、" $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \sim \{T'^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \Leftrightarrow T^\alpha = T'^\alpha$ on some G -invariant conull subset of Λ " で類別したものを $\text{End}_\mu(G)$ と表す。これは、 G が N と G/N の semi-direct product の場合には Connes の定義と一致する。ただし、ここでは簡単のため、unimodular なものだけを考えている。 N 上の Haar measure μ は、Connes の定義した、transverse measure に対応している。

Connes と同様にして、任意の α に対して $T^\alpha \geq 0$ のときには、 $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対して、 $\text{End}_\mu(G)$ 上の weight ϕ_r を定義することができる。 $f \in M^+(G/N)$ (G/N 上の関数で値が 0 以上) に対して M_r は全ての $\alpha \in \Lambda$ に対して、 $\xi(g) \mapsto f(\dot{g})\xi(g)$ ($\dot{g}$ は G/N における g の像) の形で表せる。 $A \in \text{End}_\mu(G)^+$ を固定する。写像

$$M^+(G/N) \ni f \mapsto \text{Tr}(M_r(A^\alpha)^{1/2} T^\alpha (A^\alpha)^{1/2})$$

を考えれば、これは G/N 上の positive measure の族 $\{\text{Tr}(T^\alpha A^\alpha)\}$ を与え、これらは $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\{A^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ の性質より、ある種の covariance condition をみたす。即ち、Connes の random variable に類似のものである。 $\int_{G/N} f(g) dg = 1$ となる $f \in M^+(G/N)$ (partition of unity) を一つとって、

$$\int_{\hat{N}} \text{Tr}(M_f(A^\alpha)^{1/2} T^\alpha (A^\alpha)^{1/2}) d\alpha$$

を考えると、この値は上の f のとり方によらない。これを $\phi_T(A)$ とかくと、 $\text{End}_\mu(G)^* \ni A \mapsto \phi_T(A)$ は $\text{End}_\mu(G)$ の weight を与える。Connes と同様に、逆に次の補題を得る。

補題 2. $\text{End}_\mu(G)$ 上の任意の weight ϕ に対して positive random operator $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ が存在して、 $\phi = \phi_T$ となる。

この補題は、 $\text{End}_\mu(G)$ 上の weight ϕ の $\hat{N}$ 上の "singular" な分解を与えていると考えることができる。これを、 $\phi_T \equiv \int_{\hat{N}/\sim} \text{Tr}(T^\alpha) d\alpha$ と書くことにしよう。これを $\text{End}_\mu(G)$ 上の Haar weight ψ に対して適用すると、次の "singular Plancherel formula" が得られる。 $\hat{N}$ 上の Haar measure μ , G/N 上の Haar measure の適当な normalization のもとで、

$$\text{命題 3. } \psi(A) = \int_{\hat{N}/\sim} \text{Tr}(1 \cdot) d\alpha.$$

これは、"singular Plancherel formula" を考えることによって、Plancherel measure の通常の Trace による正規化が可能であることを示している。

$A(G)$ で G の Fourier 環を表す。 $A(G)$ は canonical に、 $\lambda(G)''$, すなわち $\text{End}_\mu(G)$ の predual と同型である。従って、 $A(G)$ の positive part は $\text{End}_\mu(G)$ 上の bounded normal weight と対応している。即ち、random operator $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ で、 $T^\alpha \geq 0$, $\phi_T(1) < \infty$ を与えれば、 $A(G)$ の positive part が与えられる。これは、 $G = N$ で G が可換の場合には、 $L^1(G)$ から $A(G)$ への Fourier 変換にあたる。そこで Fourier 逆変換に当たるものを具体的に記述しなければならない。群 G を限定してこの問題を考えよう。

§ 2. G は離散 torsion free 有限生成べき零群とする。一つの正規可換部分群の中で極大なもの N をとる。 G がべき零であることから、次の補題が従う。

補題 5. N は maximal abelian である。

この補題により、maximal abelian subgroup のなかで normal なものが必ず取れる。それを一つ固定して、改めて N とおく。 $\chi \in N$ を一つ取る。Mackey 理論によって、 $\text{Ind}_{N \uparrow G} \chi$ が既約になることは、 $g \cdot \chi = \chi$ が $g \in N$ を導くことと同値になる。 μ で N の一つの Haar measure を表す。

補題 6. G -invariant な N の部分集合 Λ が存在して、 $N \setminus \Lambda \ni \chi$ に対して、 $g \cdot \chi = \chi$ から $g \in N$ となる。

§ 3. § 2 の結果により、 G が有限生成、torsion free であるときに、§ 1 の結果を適用することができる。この種の群に対して、§ 1 の終わりに述べた "Fourier 逆変換" を調べることにする。

G/N は離散群だから、quotient map の countable section $X \subset G$ をだし $e \in X$ を取ることができる。 $g \in G$ は X によって unique に $g = nx$ と分解される。

$L^2(G, N, \alpha)$ の元 ξ_x^α を、 $\xi_x^\alpha(g) = \langle \alpha, n \rangle$ ($g = \bar{x}$)、 $\xi_x^\alpha(g) = 0$ ($g \neq \bar{x}$) とおく。 $\{\xi_x^\alpha\}_{x \in G/N}$ は、 $L^2(G, N, \alpha)$ のひとつの CONS をなす。これを一つ固定しよう。この CONS を用いて、operator の行列要素を考える。非有界作用素に対しては注意深く考察しなければならないが、random operator $\{B_{x,y}^\alpha\}_{x,y \in G/N}$ に対して、 $B_{x,y}^\alpha = \langle B^\alpha \xi_y^\alpha, \xi_x^\alpha \rangle$ とおく。

$\phi_T(1) < \infty$ のときは、 ϕ_T は state だから、positive とは限らない元を代入することができる。関数 $g \mapsto \phi_T(\lambda(g))$ を考えると、こ

れが positive definite な Fourier 環の元である。この関数から、
 もとの random operator $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を何らかの意味で復元することを考えよう。
 ただし前に現れた ϕ_T の式は $(A^\alpha)^{1/2}$ の形を含んでいるので $U^\alpha(g)$ を
 代入するには不適である。そこで次のように改良する必要がある。

命題 7. $\phi_T(1) < \infty$ とする。そのとき、 $\{A^\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \text{End}_\mu(G)^+$ に対して

$$\int_{\hat{N}} \text{Tr}(T(A^\alpha)^{1/2} M_f(A^\alpha)^{1/2}) d\alpha = \int_{\hat{N}} \text{Tr}(M_f A^\alpha T^\alpha) d\alpha.$$

$(U_g^\alpha)_{i,j}$ で、誘導表現の行列要素を表す。 $\lambda(g)$ を代入することによ
 って次の式を得る。

$$\phi_T(\lambda(g)) = \int_{\hat{N}} \text{Tr}(M_f U^\alpha(g) T^\alpha) d\alpha$$

この式の左辺から T^α の行列要素を復元することを考える。

$L^2(G, N, \alpha)$ の CONS $\{\xi_x^\alpha\}_{x \in G/N}$ に関する $U^\alpha(g)$ の行列要素を計算する。
 ただし一般の $U^\alpha(g)_{i,j}$ の形は必ずしもきれいなものではないので、
 covariance condition を考えて、 $U^\alpha(g)_{i,j}$ の形のものを考える。

命題 8. $U^\alpha(g)_{i,j} = \delta_{j,i} \langle \alpha, n \rangle.$

以上のことから次の定理を得る。

定理 $T_{p,i}^\alpha = \sum_{n \in N} \phi_T(\lambda(n, p)) \overline{\langle \alpha, n \rangle}.$

References

- [1] L. Baggett, Representation of the Mautner group I, Pac. J. Math., 77(1978), 7-22
- [2] I. D. Brown, Representations of finitely generated nilpotent groups, Pac. J. Math., 45(1971), 13-26
- [3] A. L. Carey, W. Moran, Non-monomial unitary representations

- of nilpotent groups. preprint
- [4] A.L.Carey, W.Moran. Nilpotent groups with T^1 primitive spaces. preprint
 - [5] A.L.Carey, Characters of nilpotent groups. preprint
 - [6] A.Connes. Sur la theorie non commutative de l'integration
Lecture notes in Math., 725, Springer, 1978
 - [7] R.H.Howe, On representations of discrete, finitely generated torsion free nilpotent groups, Pac.J.Math., 73
(1977). 281-305
 - [8] Kawakami, S. Irreducible representations of non-regular semidirect product groups, Math.Japon., 26(1981),
667-693
 - [9] D.Poguntke, Discrete nilpotent groups have T^1 primitive ideal spaces, Studia Math., 71(1981), 271-275
 - [10] C.E.Sutherland, Cartan subalgebras. transverse measure and non-type I Plancherel measure, J.Funct.Anal., 60
(1985). 281-308