ユニタリ表現論セミナー報告集 VI, 1986
pp.19-31

対称リーマン空間上のHausdorff-Young定理

広大総科　江口正晃（Masaaki Eguchi）
広大総科　小泉伸（Shin Koizumi）
広大理　田中祥平（Shohei Tanaka）

§0. 序

G/K を non-compact な対称リーマン空間とする。[1] において、G/K 上の左 K 不変な L^p function $(1<p<2)$ の spherical transform について、調べられ、そのような変換は tube domain $T_p(C\mathfrak{a}_c^*)$ まで、正則に拡張でき、しかも、Hausdorff-Young 不等式が成り立つことが示された。

ここでは、G/K 上の K-finite な L^p-function $(1<p<2)$ の Fourier transform $\pi_\lambda(f)=\int_G f(x)\pi_\lambda(x)\,dx$ について、同様の結果が得られることを述べる。

§1. 記号と準備

G を中心有限連結実半単純リー群，$\mathfrak{g}$ をそのリー環，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を killing form とし，$G = KAN$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ を岩沢分解とすると，$x\in G$ に対し，$x = k(x)\exp H(x)\, n(x)$，$k(x)\in K$　$H(x)\in\mathfrak{a}$　$n(x)\in N$ と一意に表わされる。

M', M をそれぞれ，K における $\mathfrak{a}$ の normalizer，centralizer とし，$W = M'/M$ を Weyl 群とする。$\mathfrak{a}^*$ に岩沢分解と，コンパティブルな order を入れておき，Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の正 root 全体，$m(\alpha) = \dim \mathfrak{g}^{\alpha}$，$\Sigma_0 = \{\alpha\in\Sigma \mid \frac{1}{2}\alpha\notin\Sigma\}$，$\rho = 2^{-1}\sum_{\alpha\in\Sigma} m(\alpha)\alpha$，$a(\alpha) = m(\alpha) + m(2\alpha)$　$(\alpha\in\Sigma_0)$ とする。

$\mathfrak{a}_+^*$ を positive Weyl chamber，$\mathfrak{a}_+$ をその dual cone とし，任意の $\varepsilon\geq 0$ に対し，

$$C_{\varepsilon\rho} = \left\{\lambda\in\mathfrak{a}^* \;\middle|\; |(s\lambda)(H)|\leq \varepsilon\rho(H),\ \text{for all } H\in\mathfrak{a}_+,\ s\in W\right\}$$

とし，Tube domain T_p を $\mathfrak{a}^* + \sqrt{-1}\, C_{\varepsilon\rho}$　$(\varepsilon = \frac{2}{p} - 1,\ 1\leq p<2)$ と定義する。

$\hat{K}$ を K のユニタリキャラ表現の equivalent class 全体，$\hat{K}_M$ を $\hat{K}$ の元で M に関してクラス 1 の表現になるもの全体，F を $\hat{K}_M$ の finite sub-set とする。$\tau\in\hat{K}_M$ に対し $d(\tau)$，χ_τ をそれぞれ，τ の次元，character とする。

$$C_{0F}^{\infty}(G/K) = \{ f \in C_0(G) \mid f(gk) = f(g) \quad g \in G \quad k \in K$$
$$\bar{\chi}_F * f = f \quad (* \text{ is convolution}) \}$$
$$\text{但し}. \quad \bar{\chi}_F = \sum_{\tau \in F} d(\tau) \bar{\chi}_\tau$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{G/K} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$
$$f \in C_{0F}^{\infty}(G/K)$$

とし、$L_F^p(G/K)$ を $C_{0F}^{\infty}(G/K)$ の completion とする。

$\mathcal{H}$ を complex Hilbert space $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator 全体とし、$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ のとき

$$\|B\|_p = \begin{cases} (\mathrm{tr}(B^* B)^{p/2})^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \text{operator norm} & (p = \infty) \end{cases}$$

(但し、B^* は B の adjoint op.)

とする。

$\omega \in \mathfrak{a}_c^*$, P ; minimal Parabolic subgroup of G

$\pi_\omega \equiv \mathrm{Ind}_P^G |\otimes e^{\omega}|$ とし

$$\pi_\omega(f) = \int_G f(x) \pi_\omega(x) dx \qquad f \in C_0^{\infty}(G/K)$$

とすると、$\pi_\omega(f)$ は $L^2(K/M)$ 上の bounded linear operator で、f の Fourier transform と呼ばれる。

よく知られているように、次の Parseval equality, inversion formula が成り立つ。

$$\|f\|_2^2 = [W]^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*}\|\pi_\nu(f)\|_2^2\,|c(\nu)|^{-2}\,d\nu \qquad (1.1)$$

$$f(x) = [W]^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*} \mathrm{tr}(\pi_\nu(f)\pi_\nu(x^{-1}))\,|c(\nu)|^{-2}\,d\nu \qquad (1.2)$$

(ただし $[W]^{-1}$ は W の order

$c(\nu)$ は Harish-Chandra c-function.)

§2. 主定理

Theorem 1

$1<p<2$ $1/p+1/q=1$ とする。

π_ν ($\nu\in\mathfrak{a}^*$) において Fourier transform は $L_F^p(G/K)$ まで拡張できて positive constant C_{pF} が存在して

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*}\|\pi_\nu(f)\|_q^q\,|c(\nu)|^{-2}\,d\nu\right)^{1/q} \le C_{pF}\,\|f\|_p \quad \text{for all } f\in L_F^p(G/K)$$

が成り立つ。

Theorem 2

$1<p<2$, $1/p+1/q=1$ $\varepsilon=\frac{2}{p}-1$ とする。$f\in L_p^F(G/K)$ に対し Fourier transform $\pi_\nu(f)$ は tube domain T_p まで正則に拡張でき 任意の $\eta\in C_{\varepsilon\rho}$ に対し positive constant $C_{p,F,\eta}$ が存在して

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} \|\mathcal{F}_{\nu+\sqrt{-1}\eta}(f)\|_q^q \, |c(\nu)|^{-2} \, d\nu\right)^{1/q} \leq C_{p,F,\eta} \|f\|_p$$

for all $f \in L_p^F(G/K)$

が成り立つ。

$f \in C_0^\infty(G/K)$ とする。Th 1 Th 2 から f の Radon-Fourier transform

$$\hat{f}(kM, \nu) = \int_{A \times N} f(kan) e^{(-\sqrt{-1}\nu+\rho)(H(a))} \, da \, dn$$

$(kM \in K/M \quad \nu \in \mathfrak{a}^*)$

に対しても、同様の結果として、次の主張が成り立つ。

<u>Theorem 3.</u>

$1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$ $\varepsilon = \frac{2}{p} - 1$, $\eta \in C_{\varepsilon\rho}$

において positive constant $C_{p,F,\eta}$ が存在して、

$$\int_{K/M \times \mathfrak{a}^*} |\hat{f}(kM, \nu+\sqrt{-1}\eta)|^q \, |c(\nu)|^{-2} \, d\nu \leq C_{pF\eta} \|f\|_p$$

for all $f \in L_F^p(G/K)$

が成り立つ。

§3. 補間法について.

証明に際して、以下の lemma を用いる.

<u>Lemma</u> — (X, μ) (X', μ') を σ-finite measure space

$\mathcal{S}(X\ \mathbb{C}^d) = \{ \varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^d) : X \longrightarrow \mathbb{C}^d \mid \varphi^i$ は compacting supported simple functions on $X \}$

とし、T を $\mathcal{S}(X\ \mathbb{C}^d)$ から X' 上の μ'-measurable function 全体への linear map で、$1 \leq p_i, q_i \leq \infty$ $1/p_i + 1/q_i = 1$ $(i = 0, 1)$ に対し

$\exists k_i > 0$; $\|T\varphi\|_{q_i} \leq k_i \|\varphi\|_{p_i}$ for all $\varphi \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C}^d)$

$\Rightarrow$

任意の $0 < t < 1$ なる実数 t に対し、p_t, q_t を

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

とおく

$$\|T\varphi\|_{q_t} \leq d k_0^{1-t} k_1^{t} \|\varphi\|_{p_t} \quad (\varphi \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C}^d))$$

が成り立ち さらに $p_t < \infty$ ならば、T は $L^{p_t}(X, \mathbb{C}^d)$ まで拡張でき さらに上の不等式を満たす。

(注) Lemma 1 は Riesz - Thorin theorem からの容易な帰結である。

Y を第2可算公理を満たす局所コンパクト空間、ω を Y の regular measure、$a, b \in \mathbb{R}$ $b > a$ とし

$$D = D(a, b) = \{ z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im} z \leq b \}$$

とする。

lemma 2

$1 \le p_0, p_1 \le \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ $\quad \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1 \quad (i = 0, 1)$ とし、

$T_z \ (z \in D)$ を $\mathcal{S}(X, \mathbb{C}^d)$ から Y 上の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-valued measurable function 全体への linear map とし $\{T_z \mid z \in D\}$ は D 上の admissible family を成し、さらに

$$\|T_{x+\sqrt{-1}a}(\varphi)\|_{q_0} \le A_0(x)\|\varphi\|_{p_0} \qquad (A_i \ (i=0,1) \text{ は admissible growth})$$

$$\|T_{x+\sqrt{-1}b}(\varphi)\|_{q_1} \le A_1(x)\|\varphi\|_{p_1}$$

for all $\varphi \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C}^d)$

$\Longrightarrow$

任意の $a < t < b$ なる実数 t に対し $\tau = (t-a)/(b-a)$、

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\tau}{p_0} + \frac{\tau}{p_1} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\tau}{q_0} + \frac{\tau}{q_1}$$

とすると、

$$\exists C_t > 0 \ ; \ \|T_{\sqrt{-1}t}(\varphi)\|_q \le d C_t \|\varphi\|_p \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(X, \mathbb{C}^d))$$

が成り立つ。

(注) *See* Kunze-Stein interpolation theorem ([3])

§4 証明の前に

§3 の *lemma* を用いるために、simple function の概念と $\|T_z\|_\infty$ の評価が必要になる。ここでは、それについて述べる。

$f \in C_{cF}^{\infty}(G/K)$. $a \in A$ に対し、$f^{a}(kM) = f(ka)$ で K/M 上の function を定義する。$\{\Phi_1, \cdots, \Phi_d\}$ を $L_F^2(K/M)$ の orthonormal basis とすると、

$$f^{a}(kM) = \sum_{i=1}^{d} f^{i}(a)\Phi_i(kM) \qquad (4.1)$$

と表わせる。(c.f. [4])

$$C_c(A^+, \mathbb{C}^d) \equiv \{ \varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^d) : A^+ \longrightarrow \mathbb{C}^d \mid \varphi^i \in C_c^{\infty}(A^+) \quad 1 \leq i \leq d \}$$

$$(A^+ = \exp \mathfrak{a}_+)$$

$$\|\varphi\|_p^p = \int_{A^+} \sum_{i=1}^{d} |\varphi^i(a)|^p \delta(a)\, da \qquad (\varphi \in C_c(A^+ \mathbb{C}^d))$$

$$\delta(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0} (\sinh \alpha(\log a))^{m(\alpha)}$$

とし、上の norm に関する

(4.1) を使って自然な linear isomorphism

$$D : C_{cF}^{\infty}(G/K) \longrightarrow C_c^{\infty}(A^+, \mathbb{C}^d)$$

を定義する。

<u>lemma 3</u>

$f \in C_{cF}^{\infty}(G/K)$ に対し、

$$d^{-2+1/p} \|f\|_p \leq \|Df\|_p \leq d^{1+1/p} \|f\|_p$$

$$(1 \leq p < \infty)$$

i.e. $L_F^p(G/K) \underset{D}{\cong} L^p(A^+, \mathbb{C}^d)$

従って simple function を以下のように定義することができる。

$$\mathcal{S}(A^+, \mathbb{C}^d) = \{ \varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^d) : A^+ \longrightarrow \mathbb{C}^d \mid \varphi^i \text{ は compactly supported simple function on } (A^+, \delta) \}$$

さらに (4.1) と Helgason - Johnson の定理 ([2]) から次の主張を得る。

<u>Lemma 4</u>

$f \in C_{0F}^{\infty}(G/K)$ に対し

$$\| \pi_\nu(f) \|_\infty \leqq d^3 \| f \|_1 \qquad (\nu \in T_1)$$

<u>Corollary</u>

$\varphi \in L^1(A^+, \mathbb{C}^d)$ に対し.

$$\| \pi_\nu(\varphi^+) \|_\infty \leqq d \| \varphi \|_1 \quad (\nu \in T_1).$$

where $\dagger = D^{-1}$

§5. 定理の証明.

<u>Theorem 1 の場合</u>

2つの measure space $(A^+, \delta(a)da)$, $(\mathfrak{a}^*, [W]^{-1}|c(\lambda)|^{-2} d\lambda)$ を考え. T^i $(i = 1, \cdots, d)$ を $\mathcal{S}(A^+, \mathbb{C}^d)$ から $\mathfrak{a}^*$ 上の $\mathbb{C}$- valued function 全体への linear map として.

$$T^{i}(\varphi)(h) = (\pi_h(\varphi^+)\Phi_i, \Phi_i) \qquad \text{for } \varphi \in \mathcal{S}(A^+\ \mathbb{C}^d)$$

（但し $\Phi_i(kH) = 1$ for all $k \in K$）

と定義する。

$T^{i}(\varphi)$ は $\mathcal{T}^{A}$ 上の measurable function で

$$\pi_h(\varphi^+)\Phi_i = \sum_{i=1}^{d} T^{i}(\varphi)\Phi_i \qquad (5\ 1)$$

$$\|\pi_h(\varphi^+)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |T^{i}(\varphi)|^2\right)^{1/2} \qquad (5\ 2)$$

が成り立つ。

(5.1) (5.2) §4の Corollary から

$$\|T^{i}(\varphi)\|_\infty \leqq d\,\|\varphi\|_1$$

また (5.2) (1,1) lemma 3 から

$$\|T^{i}(\varphi)\|_2 \leqq d^{3/2}\|\varphi\|_2$$

従って lemma 1 から 次の主張を得る。

<u>lemma 5</u>

$1<p<2$ $1/p + 1/q = 1$ に対し 各々の T^{i} は $L^p(A^+, d)$ まで拡張できて、さらに positive constant C'_{pF} が存在して

$$\|T^{i}(\varphi)\|_q \leqq C'_{pF}\|\varphi\|_p \qquad (\varphi \in L^p(A^+, \mathbb{C}^d))$$

が成り立つ。

Lemma 5. (4.3) Minkowski 不等式から. Theorem 1 の主張を得る。

<u>Theorem 2 の場合</u>

2つの measure space $(A^+, \delta(a)da)$, $(\mathfrak{a}^*, d\omega(\mu) = \prod_{\alpha\in\Sigma_0}(1+|\langle\mu,\alpha\rangle|)^{a(\alpha)} d\omega)$ を考え $\eta \in C_{\epsilon\rho}$ $(\eta \neq 0)$ に対し $\mathfrak{a}^*$ の orthonormal basis $\mu_1, \cdots, \mu_d$ を $\mu_1 = \eta/|\eta|$ を満たすようにとる。

$D = D(0, |\eta|/\epsilon)$, $\varphi \in \mathcal{S}(A^+, \mathbb{C}^d)$ に対し

$$F_{z\mu_1}(\varphi)(\mu) = \pi_{z\mu_1+\mu}(\varphi^+) \prod_{\alpha\in\Sigma_0}(1+|\langle\mu,\alpha\rangle|)^{-1}|\langle z\mu_1+\mu, \alpha\rangle|$$
$$(z \in D,\ \mu \in \mathfrak{a}^*)$$

$$T_z : \varphi \longmapsto F_{z\mu_1}(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(A^+, \mathbb{C}^d))$$

とする。

$$(\pi_\mu(\varphi^+)\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^{d} T^i(\varphi)(\mu)(\Phi, \Phi_i)(\Phi_i, \Psi)$$

より $\{T_z \mid z \in D\}$ は admissible family

$\xi = x + \sqrt{-1}\eta/\epsilon$ $(x \in \mathbb{R})$ とすると §4 の Corollary から

$$\|T_\xi\|_\infty \leqq A_1(x)\|\varphi\|_1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A_1 は admissible growth

なる A_1 が存在する。

一方 $\xi = x$ $(x \in \mathbb{R})$ とすると

lemma 7（検証） lemma 3 (1,1) より

$$\| T_\xi(\varphi) \|_2 \leq A_0(\xi) \| \varphi \|_2 \qquad \varphi(A^+, \mathbb{C}^d))$$

A_0 は admissible growth

なる A_0 が存在する。

従って lemma 2 より

$$\exists C > 0 \ ; \ \| T_{\overline{\Pi}\eta}(\varphi) \|_q \leq d C \| \varphi \|_p$$

for all $\varphi \in \mathcal{S}(A^+ \mathbb{C}^d)$

が成り立ち 以下の主張を得る。

<u>lemma 6</u>

$1 < p < 2$ $1/p + 1/q = 1$ $\varepsilon = 2/p - 1$ $\eta \in C_{\varepsilon p}$ とすると positive constant $C_{pF\eta}$ が存在して

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} \| \pi_{\mu+\overline{\Pi}\eta}(\varphi^+) \|_q^q \, |c(\mu)|^{-2} \, d\mu \right)^{1/q} \leq C_{pF\eta} \| \varphi \|_p$$

for all $\varphi \in \mathcal{S}(A^+, \mathbb{C}^d)$

が成り立つ。

一方

<u>lemma 7 (cf. [1])</u>

$\exists B_1, B_2$ positive constant s.t

$$B_1 |c(\mu)|^{-2} \leq \prod_{\alpha \in \Sigma_0} |\langle \mu, \alpha \rangle|^2 (1 + |\langle \mu \ \alpha \rangle|)^{a(\alpha)-2} \leq B_2 |c(\mu)|^{-2}$$

for all $\mu \in \mathfrak{a}^*$

が成り立つことより、Lemma 6 Lemma 7 から Theorem 2の主張が得る。

参考文献

[1] M. Eguchi and K. Kumahara, An L^p Fourier analysis on symmetric spaces. J. Functional Analysis 47 (1982) 230 – 246

[2] S. Helgason Groups and Geometric Analysis. Academic press New York 1984

[3] R. A. Kunze and E. M. Stein. Uniformly bounded representations and harmonic analysis on the 2×2 real unimodular group. Amer. J. Math. 82 (1960). 1 – 62

[4] N. R. Wallach, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. Marcel Dekker. New York. 1973.