

領域とその定義関数の Fourier-Laplace 変換の 零点集合について

東大 理 小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)

$\mathbb{R}^n$ の有界集合 Ω の定義関数の Fourier 変換 $\widehat{\chi}_\Omega(I) = \int_\Omega e^{i\langle x, I \rangle} dx$ は、 I の整関数となるが、その零点集合 $\mathcal{N}(\Omega)$ に着目する。
例えば、 Ω が球の時、 $\mathcal{N}(\Omega)$ は、可算無限個の同心球面になり、
 Ω が立方体の時は、 $\mathcal{N}(\Omega)$ は格子状になる。

素朴な疑問として次の問題が考えられる。

・ $\Omega \mapsto \mathcal{N}(\Omega)$ の対応は 1 対 1 か？

(即ち、零点は領域を決定するか？)

・ $\mathcal{N}(\Omega)$ は Ω の幾何的な量をどの様に反映しているか？

・ $\widehat{\chi}_\Omega(I)$ と格子点問題や偏微分方程式の問題との関連

この論説では、§ 1, § 2 で $\mathbb{R}^n$ 及び Riemann 対称空間 $SO_0(n,1)/SO(n)$ の場合、 Ω が strictly convex の時の $\mathcal{N}(\Omega)$ の形を調べ、特に、
 $\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近形から、 Ω を決定する支持関数に関する微分方程式が得られる事を見る。この結果から、特に $\mathbb{R}^2$ の強凸集合は零点によって決定される事が導かれる。

また、 $\mathcal{N}(\Omega)$ が球面を含む場合 Ω は球か？ (逆は正しい) という問題は、過剰決定問題や tomography 等 色々な問題と関連していて特に興味深い。この問題は Pompeiu の問題と言われ、同値な問題が約 60 年前に提起されたが、 $\mathbb{R}^2$ の凸領域に限っても、現在まだ未解決である。

§ 3 では、 $\Omega = \text{球}$ に振動を与えた時に、球関数を用いて Pompeiu の問題を論じる。

§ 1 $\mathbb{R}^n$ の凸集合と Fourier 変換の零点集合

この節では、 $\mathbb{R}^n$ の凸集合 Ω に対し、零点集合 $\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近的な形状を調べ、 $\mathcal{N}(\Omega)$ が Ω を決定するか？ という問題を扱う。

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界集合、 χ_Ω をその定義関数とする。

$$\begin{aligned}\chi_\Omega \text{ の Fourier 変換を } \widehat{\chi}_\Omega(I) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(x) e^{i\langle x, I \rangle} dx \\ &= \int_\Omega e^{i \sum_{j=1}^n x_j I_j} dx_1 dx_2 \cdots dx_n\end{aligned}$$

と定義する。 $\widehat{\chi}_\Omega(I)$ は、 $I = (I_1, \dots, I_n) \in \mathbb{C}^n$ の整関数である。

$$\widehat{\chi}_\Omega \text{ の零点集合を、 } \mathcal{N}(\Omega) := \{I \in \mathbb{C}^n : \widehat{\chi}_\Omega(I) = 0\}$$

$$\mathcal{N}(\Omega)_\mathbb{R} := \mathcal{N}(\Omega) \cap \mathbb{R}^n \quad \text{とおく。}$$

Ω が点対称の時、 $\widehat{\chi}_\Omega(I)$ は $I \in \mathbb{R}^n$ 上 real valued であるから、 $\mathbb{R}^n$ における零点集合 $\mathcal{N}(\Omega)_\mathbb{R}$ は、一般に $\mathbb{R}^n$ の余次元 1 の analytic set となる。一方 Ω も $\mathbb{R}^n$ の余次元 1 の集合である Ω によって決定

されるから、次元の観点から、 Ω が点対称の時の " $\Omega \mapsto \mathcal{M}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ " の対応は「適切」なものと考えられる。しかし、 Ω が点対称でない時、一般に $I \in \mathbb{R}^n$ だけで零点を考える事は不十分である。(実際、Cor 2-1) が成り立つ。) そこで、 Ω が点対称の場合に $\mathcal{M}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ を考えた拡張として、一般の Ω の場合には、実方向の complex lines $S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ で $\mathcal{M}(\Omega)$ を切って調べて

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (w, I) & \longmapsto & I \cdot w = (I w_1, \dots, I w_n) \end{array}$$

る事にする。

定義 $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω が strictly convex であるとは、

$\partial \Omega \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ に対する Gauss 曲率 $K: \partial \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が、任意の連結 C^∞ 点で正の値をとる時をいう。

この時、Gauss map $e: \partial \Omega \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$ は C^∞ -diffeo

Ω の支持関数 $h: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(w) := (w, e^{-1}(w)) = \sup_{x \in \Omega} (x, w)$

で定義する。支持関数 h から、凸領域 Ω は容易に再現される。

$d: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ map を次の式で定義する。

$$d(w) := \frac{\log K \circ e(-w) - \log K \circ e(w)}{2 (h(w) + h(-w))}$$

この時、 $\mathcal{M}(\Omega)$ を $S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}$ で切った切り口の漸近形が、年輪状になるという事を精密に述べたのが次の定理である。

定理 1 Ω を $\mathbb{R}^n$ の strictly convex domain とする.

$$d := \max_{w \in S^{n-1}} |d(w)|$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}$$

$$W := \left\{ (w, \xi + i\eta) : |\eta| < d+1, |\xi| > \frac{\pi(2m_0 + \frac{n-2}{2})}{h(w) + h(-w)}, w \in S^{n-1} \right\} \Big/_{\mathbb{Z}_2} \subset_{\text{open}} S^{n-1} \times \mathbb{C} \Big/_{\mathbb{Z}_2}$$

$$\text{この時. } \mathcal{N}(\Omega) \cap W = \bigsqcup_{m \geq m_0} \mathcal{N}_m$$

ここで、各 $m \geq m_0$ に対し、 $\mathcal{N}_m \subset S^{n-1} \times U$ は S^{n-1} と

C^ω -diffeo to regular submanifold である。

$$\mathcal{N}_m^0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (w, \frac{\pi(2m + \frac{n-1}{2})}{h(w) + h(-w)} + i d(w)) : w \in S^{n-1} \right\} \Big/_{\mathbb{Z}_2} \subset S^{n-1} \times U \Big/_{\mathbb{Z}_2} \text{ とおく.}$$

$\mathcal{N}_m$ は $\mathcal{N}_m^0$ に $S^{n-1} \times \mathbb{C} \Big/_{\mathbb{Z}_2}$ の距離 (正確には、その compact subset 全体における通常の max-min metric) で $m^{-\frac{1}{2}}$ の order で近づく ($m \rightarrow \infty$)。

この定理から、 $\mathcal{N}(\Omega)$ が与えられた時、その漸近形から、

$d(w)$ と $h(w) + h(-w)$ 、従って $\frac{koe(w)}{koe(-w)}$ と $h(w) + h(-w)$ が読みとられる。

よって、『零点から凸領域が決定されるか?』——(A) という

問題は、『直径と 'antipodal' な点の Gauss 曲率の比が決まった

時、strictly convex domain は unique に決まるか?』——(B) という微分幾何の

問題に帰着される。 $n \geq 3$ では、筆者は (B) の解答を得ていな

いが、 $n=2$ の時は正しい事が証明できる。

Cor 1 $\mathbb{R}^2$ の strictly convex domain は. Fourier 変換の零点集合
によって決定される.

更に, 定理 1 から, $\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近形と Ω の幾何的な関係が
得られる. 即ち,

Cor 2. Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界な strictly convex domain とする. この時,

i) Ω が点対称 $\iff \mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ が無限個の境界のない hypersurface を含む.

ii) Ω が 球 $\iff \mathcal{N}(\Omega)_{\mathbb{R}}$ が無限個の hypersphere を無限個含む.

iii) Ω が定幅曲面 $\iff \mathcal{N}(\Omega) \cap (S^{n-1}_{x_2} \subset \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{R}^n$ の像が無限個の
hypersphere を含む.

$$\text{但 } (\text{pr}_1: S^{n-1}_{x_2} \subset \mathbb{C} \ni (w, \xi + i\eta) \mapsto (\xi w_1, \dots, \xi w_n) \in \mathbb{R}^n$$

注意 (1.1) 定理 1 で, $S^{n-1}_{x_2} \{ \xi + i\eta \in \mathbb{C} : |\eta| : \text{有界}, |\xi| \text{ 十分大} \}$ の
領域を用いたが, 逆に $S^{n-1}_{x_2} \{ \xi + i\eta : |\eta| : \text{十分大}, |\xi| \text{ 有界} \}$ の
領域と $\mathcal{N}(\Omega)$ の交わりは空集合となる. 尚, いずれ
の評価も $|\xi| \sim \log |\eta|$ が境目となる.

(1.2) Cor 2 - ii) は, ($\mathbb{R}^2$ で) Ω が一般に単連結領域の時
に Berenstein が得た結果の特別な場合である. ([Be])
(我々は, 強凸を仮定している.)

(1.3) 定理 1 の後に述べた問題 (B) について:

D^2 を S^{n-1} 上の hessian とする。この時、 $\mathcal{N}(\Omega)$ から読みとられる関数 $A, B \in C^\infty(S^{n-1})$ を用いて、支持関数 h に関する S^{n-1} 上の次の形の微分方程式が表される： $\therefore$ (尚、⑥ が Yes. $\Leftrightarrow$ ① が E. (53) を除いて解が一意的)

$$\det(D^2 h + h) = A \det(D^2(B-h) + B-h) \quad \text{--- ①}$$

① は Monge-Ampère を組み合わせた非線型楕円型の偏微分方程式である ($n \geq 3$) (cf. [Sa])

(1.4) Ω に全く条件をつけない時、 $\Omega \mapsto \mathcal{N}(\Omega)$ の対応は単射

ではない。実際、 $\mathbb{R}^1 \supset \Omega := \bigcup_{j=1}^k (a_j, b_j)$ の形で、

$\Omega \neq \Omega'$ & $\mathcal{N}(\Omega) = \mathcal{N}(\Omega')$ の例を作る事ができる。

従って、この直積によって $\mathbb{R}^n$ における反例も得られる。

(1.5) Ω が一般の有界領域 (且 Ω は滑らか) の時、 $\hat{\chi}_\Omega$ は '十分' 多くの零点を持つ事が、定理 1 と同様の方法で示される。

(1.6) 我々は、 $\mathcal{N}(\Omega)$ の無限遠での漸近形から、 Ω に関する情報を読みとったが、一方 $\mathcal{N}(\Omega)$ の有界な部分から、 Ω に関する情報を得る事は、難しい問題であると思われる (cf. §3)。

この節の最後に、凸領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が '角' を持ったり、

flat な部分を持つ場合を考えよう。この場合、零点 (の適当な断面) が年輪状になるという定理 1 は成り立たない。(例、 Ω が正方形 $\Rightarrow \mathcal{N}(\Omega)$ は格子状) 簡単のため、 Ω を $\mathbb{R}^2$ の原点対称で、且 Ω は区分的に C^∞ とす

る。(但し、flat な点や $C^{n+\varepsilon}$ ($n \geq 1$) 級の特異点は無制限に許すか。
 C^1 級の特異点 (角) は高々 2 個とする。)

$\theta \in [0, 2\pi]$ に対し、 θ 方向の半直線上にある零点集合 $\mathcal{N}(\Omega)_\theta$ を、
 $\mathcal{N}(\Omega)_\theta := \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathcal{N}(\Omega)_\mathbb{R} : r > 0 \}$ で定義する。

Prop 1. $\mathcal{N}(\Omega)_\theta$ は、可算無限の点列 $\{ r_j(\theta) (\cos \theta, \sin \theta) : j=1, 2, \dots \}$ から成る

Dirichlet 級数 $f(\theta, t) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-r_j(\theta)t}$ ($t > 0$) とおく。

この時、 $f(\theta, t)$ は $t \downarrow 0$ で次の漸近展開をもつ。

$$f(\theta, t) \sim \frac{1}{t} (A(\theta) + B(\theta)t + \dots)$$

$A(\theta), B(\theta)$ は、 Ω と次の様な関係がある。

$$1) \quad \Omega \text{ の支持関数 } h(\theta) = \pi A(\theta)$$

更に、 $B_0(\theta) := B(\theta) - [B(\theta)]$ (B の小数部分) とおくと、

$$2) \quad a) \Omega \text{ は strictly convex} \iff B_0(\theta) \equiv \frac{1}{4} \quad (\forall \theta)$$

$$b) \Omega \text{ は線分を含む} \iff B_0(\theta) = \frac{1}{2} \quad (\exists \theta)$$

$$c) \Omega \text{ は角を持つ} \iff B_0(\theta) = \frac{3}{4} \quad (\exists \theta)$$

尚、 $\frac{1}{3} \leq B_0(\theta) < \frac{1}{2}$ の時、 θ に対応する点で、 $\partial \Omega$ は $\frac{2B_0}{1-2B_0}$ (≥ 2) 次の order で、接線に接する。

注意(1.7) $b)$ の θ は孤立点、 $c)$ の θ はある open set で成り立つ。

§ 2 $H^n(\mathbb{R}) = SO_0(n, 1) / SO(n)$ の場合

この節では、§ 1 の結果を、負の定曲率空間 $H^n(\mathbb{R})$ における
 ‘凸集合’ の場合に拡張する。

一般に、 G を連結実半単純 Lie 群

$A: G \rightarrow \mathcal{A}_P := \text{Lie}(A_P)$ を $G = N A_P K$ に対応した岩沢 projection,

$P \in \mathcal{A}_P^*$ を $\mathcal{N} := \text{Lie}(N)$ に対応する root の和の半分.

$M := Z_K(A_P)$, dx を $X = G/K$ の G -不変測度とする.

Riemann 対称空間 $X = G/K$ の Fourier 変換を.

$$C_0^\infty(X) \ni F \longmapsto \tilde{F} \in C^\infty(\mathcal{A}_{P\mathbb{C}}^* \times K/M)$$

$$\tilde{F}(I, b) := \int_X F(x) e^{\langle I+P, A(b^{-1}x) \rangle} dx \quad \text{で定義する.}$$

以下、 $G = SO_0(n, 1) \equiv SO(n, 1)$ の e を含む連結成分とする.

岩沢分解 $G = N A_P K$ を固定する.

$\alpha \in \mathcal{A}_P^*$ を $\mathcal{N}$ に対応する unique な positive root, $\rho = \frac{n-1}{2} \alpha$

$\mathcal{A}_{P\mathbb{C}}^* \ni I \alpha \longleftrightarrow I \in \mathbb{C}$ により、 $\mathcal{A}_{P\mathbb{C}}^*$ と $\mathbb{C}$ を同一視する.

$$A_P^+ := \{ \exp H : H \in \mathcal{A}_P, \alpha(H) > 0 \}$$

$X \equiv H^n(\mathbb{R}) := G/K \ni o := eK$ には、断面曲率 $-k^2$ ($k > 0$)

を与える Riemann 計量を入れる.

$a_0 \in A_P^+$ を $a_0^t := \exp(t \log a_0) \in A_P$ ($t \in \mathbb{R}$) の X での orbit が

長さ t で parametrize された測地線となる unique な元とする.

即ち、 $\alpha(\log a_0) = k$

X の N -orbit $g, N g_2 \cdot o$ ($g, g_2 \in G$ fix) を horosphere と呼ぶ。

この時、次の事実が成り立つ。(1), (2) は良く知られている, (3) は簡単な計算)

Fact 1. 1) horosphere の全体は $K_M \times A_T$ で parametrize される。

対応は $(k \bmod M, a) \leftrightarrow k a N \cdot o$

2) 各 horosphere は、 X の超球面の半径 $\uparrow \infty$ の極限として得られる。特に、 X からの induced metric で $\mathbb{R}^n$ (standard) と等長

3) 各 horosphere の、 X の余次元 1 の submanifold としての主曲率 (すなわち基本形式の固有値) は、各点で $\underbrace{k_1, \dots, k_{n-1}}_{n-1 \text{ 個}}$

定義 X の有界領域 Ω が strictly convex であるとは、

境界 $\partial\Omega$ が連結な C^∞ submanifold で、 $\partial\Omega \hookrightarrow X$ から決まる各点の任意の主曲率 $> k$ を満たす時をいう。

例 X の測地的球は、上の意味で strictly convex

注意 (2.1) Fact 1 - 3) より、strictly convex domain は、horosphere の包絡面に囲まれる領域となる。従って Fact 1-2) の立場では、 $\mathbb{R}^n$ における convex の概念の拡張になっている。一方、 $\mathbb{R}^n$ と違い、測地的凸より真に強い概念である。

X の strictly convex domain Ω に対し、

支持関数 $C_i: K_M \ni b \bmod M \mapsto C_i(b) \in \mathbb{R}$ ($i=1, 2$) を、

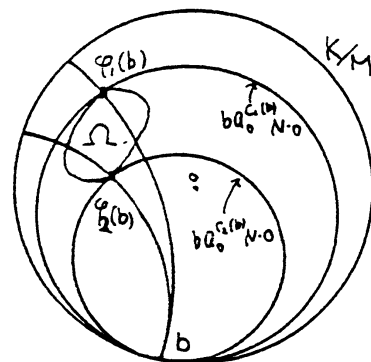
$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(b) < C_2(b) \quad b \in K/M \\ \exists \eta_i = \eta_i(b) \in N \text{ at } b a_0^{C_i(b)} N \cdot o \text{ が } b a_0^{C_i(b)} \eta_i \cdot o \text{ で } \Omega \text{ に接する.} \end{array} \right.$$

という条件で特徴づけられる関数とする。

Ω が strictly convex という仮定から、 $\eta_i(b)$ は unique に定まり、

C_i は well-defined な C^∞ -関数となる。

($i=1, 2$ は「内接」「外接」に対応する。)



$$\begin{array}{ccc} \text{更に. } \varphi_i: K/M & \xrightarrow{\cong} & \partial\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ b \bmod M & \longmapsto & b a_0^{C_i(b)} \eta_i(b) \cdot o \end{array}$$

とおく。 φ_i ($i=1, 2$) は C^∞ -diffeo となる。

$\varphi_1^{-1}(\varphi_2^{-1})$ は $\partial\Omega \hookrightarrow X$ の inner(outer) normal vector に沿った測地線の boundary $K/M \cap$ の極限に他ならない。 $\mathbb{R}^n$ の hypersurface の Gauss map に相当すると考えられる。

次に、 $\partial\Omega \hookrightarrow X$ の主曲率を $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ とする ($\forall \lambda_j > k$)。
 λ_i の対称式は $\partial\Omega$ 上の C^∞ 関数として well-defined である事に注意すると、 φ_i による K/M と $\partial\Omega$ の同一視を用いて、

$$\begin{aligned} K_i: K/M \ni b \bmod M &\xrightarrow{C^\infty} K_i(b) \in \mathbb{R}_+ \quad (i=1, 2) \\ \begin{cases} K_1(b) := \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - k) \circ \varphi_1(b) \\ K_2(b) := \prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_j + k) \circ \varphi_2(b) \end{cases} &\text{が定義される.} \end{aligned}$$

$$d: K/M \ni b \bmod M \longmapsto \frac{\log K_1(b) - \log K_2(b)}{2(C_2(b) - C_1(b))} \in \mathbb{R} \quad \text{とおく.}$$

d は negative valued の C^∞ 関数である。

定理 2. $X = H^n(\mathbb{R})$ の strictly convex domain Ω の特性関数を χ_Ω とする。

$\widehat{\chi}_\Omega(I, b)$ の零点集合を $\mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}^* \times K_M \simeq \mathbb{C} \times K_M$ とおく。

$$d := \max_{b \in K_M} |d(b)|$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{C} \times K_M \supset_{\text{open}} W := \bigcup_{\text{def}} \left\{ (I, b) \in \mathbb{C} \times K_M : |I_m| < \frac{d}{R} + \frac{n}{2}, |Re I| > \frac{\pi(2m_0 + \frac{n-2}{2})}{R(C_2(b) - C_1(b))}, b \in K_M \right\}$$

$$: \text{ の 時, } \mathcal{N}(\Omega) \cap W = \bigcup_{m=m_0}^{\infty} (\mathcal{N}_m^+ \sqcup \mathcal{N}_m^-)$$

$\mathcal{N}_m^\pm$ ($\mathbb{N} \ni m \geq m_0$) は、 $\mathcal{N}_m^{+0}$ または $\mathcal{N}_m^{-0}$ に、 $m \rightarrow \infty$ の時、

$\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}^* \times K_M$ の距離で、 $m^{-\frac{1}{2}}$ の order で漸近的に近づく、

$\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathbb{C}}^* \times K_M$ の、 $K_M \simeq S^{n-1}$ と analytic diffeo な、可算無限個

の disjoint な regular submanifold である。

$$\text{但し, } \begin{cases} \mathcal{N}_m^{+0} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\frac{\pi(2m + \frac{n-1}{2})}{R(C_2(b) - C_1(b))} + i \left(\frac{d(b)}{R} - \frac{n-1}{2} \right), b \right) : b \in K_M \right\} \\ \mathcal{N}_m^{-0} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (I, b) ; (-\bar{I}, b) \in \mathcal{N}_m^{+0} \right\} \end{cases} \quad \mathbb{N} \ni m \geq m_0$$

注意(2.2) 特に、零点集合の漸近形から、 $b \in K_M$ 方向の Ω の

‘直径’ $C_2(b) - C_1(b)$, 及び対応する‘曲率’の比 $K_1(b)/K_2(b)$ の

情報が読みとられる。一方 $K_i(b)$ はそれぞれ $C_i(b)$ の微分

を用いて表されるから、結局 $\mathcal{N}(\Omega)$ の漸近形から、例

えば C_1 に関する K_M 上の単独微分方程式 ($n=2$ で非線型) を得る。

尚、 X の強凸領域 Ω は、 C_1 (及び C_2) から再現可能である事に注意。

§ 3 球の振動と Pompeiu の問題 ($\mathbb{R}^n$ の場合)

さて、 $\hat{\chi}_\Omega$ の零点が球面になる場合には、色々な問題と関連して興味がある。

簡単のため、 $\mathbb{R}^2 \supset \Omega$ が有界凸集合とする。

Fact 2 ($[Br-K], [Br-T], [Be]$)

$M(2) := O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ を Euclid motion group とする。

$\alpha \in \mathbb{C}^*$ に対し、 $M_\alpha := \{I = (I_1, I_2) \in \mathbb{C}^2 : I_1^2 + I_2^2 = \alpha\}$ (複素球面)

この時、 Ω に関する次の4つの条件は同値

i) $M_\alpha \subset \mathcal{N}(\Omega)$

ii) $C(\mathbb{R}^2) \ni^3 f \not\equiv 0$ st $\forall \sigma \in M(2), \iint_{\sigma \cdot \Omega} f(x, y) dx dy = 0$

iii) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{O}(\mathbb{C}) \ni^3 f$ st $\forall \sigma \in M(2), \iint_{\sigma \cdot \Omega} f(z) dz = 0$
holomorphic

iv) $C^1(\mathbb{R}) \ni^3 u \not\equiv 0$ st
$$\begin{cases} \Delta u + \alpha u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = \text{const} & \text{on } \partial \Omega \end{cases}$$

$\Omega = \text{円板}$ は i) ~ iv) を満たす例である。一方、 $\Omega = 99$ 角形領域は、i) ~ iv) を満たさない事が知られている。

$\partial \Omega \simeq S^1$ (homeo) の時に ii) を満たす Ω は円板に限るだろうという予想が Pompeiu の予想 (1929)、ii) を満たす Ω ($\partial \Omega$ の条件をつけない) の例を求める問題が Pompeiu の問題と言われる。

i) はこの論説の動機となった問題であり、iii) は複素関数論

で有名な Morera の定理の逆にあたる事から Morera の問題と言われ、iv) は plasma physics や nuclear reactor の問題に関連する微分方程式である。一方 iv) に類似した、流体力学に現れる問題『 $\Delta u = -1$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \text{const} \Rightarrow \Omega$ は円板』は、

Serrin により、肯定的に解決された ([Se], [W])。

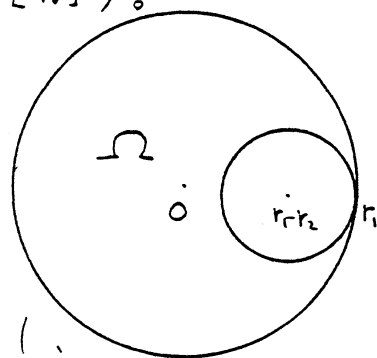
Pompeiu の問題に関しては、円板以外の例

として、例えば、 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r_1^2, (x - r_1)^2 + y^2 < r_2^2\}$

(但し、 $r_1 > r_2$ は $J_1(r) = 0$ の根) は、

i) ~ iv) を満たす単連結な領域である。しかし、

この様に円板を組み合わせた領域以外に i) ~ iv) を満たす例は知られていない。



Pompeiu 予想に関しては、 $\mathbb{R}^2$ の凸領域に限っても、現在なお open である。[Brk] では、部分積分を用いる簡単な評価によって、i) ~ iv) を満たす $\mathbb{R}^2$ の凸集合の直径の min と max の比が 2 以下である事を指摘した。即ち、i) ~ iv) を満たす Ω は、円板にある程度 '近い'。

この節では、逆に Ω が球に充分 '近ければ'、球以外には、i) ~ iv) の性質を持つ Ω が存在しない事を示す。

$\Omega = \text{unit ball} \subset \mathbb{R}^n$ の滑らかな変形 Ω_t を考える。この時、凸集合であるという性質は open condition であるから、

変形は極座標を用いて定義できる (即ち Ω_x は原点 0 に関して星状領域としてよい.)

よって、 Ω の平行移動は、Fourier変換に絶対1の関数がかかるだけであるから、特に $\mathcal{M}(\Omega)$ は不変である。従って、 Ω の変形を考える時 平行移動を modulo にして考える必要がある。

$\mathbb{R}^n$ から induce された metric に関する S^{n-1} 上の Laplacian $\Delta_{S^{n-1}}$ の固有空間分解を、

$$L^2(S^{n-1}) \cong \sum_{k=0}^{\infty} \oplus E_k \quad \textcircled{2} \quad E_k \text{ は } \Delta_{S^{n-1}} \text{ の固有値 } -k(k+n-2) \text{ に対応する固有空間。}$$

$\Omega = \text{unit ball}$ の平行移動の第1変分 (正確には平行移動の作る vector 場と、 S^n の法 vector の内積が作る S^n 上の関数) が、 E_1 に対応する事は容易にわかる。

以上から、 $\Omega = \text{球の近くで}$ 、その Fourier変換の零集合が球面を含むのは、その領域が球の時に限るという定理の定式化を次の様に得る。

定理3. $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^{n-1} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ を

$$\begin{cases} g(0, \eta) = 1 & \forall \eta \in S^{n-1} \\ \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{t=0} = h(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\eta) \quad (\textcircled{2} \text{ の分解}) \\ \text{この時 } h_1(\eta) = 0 \quad \& \quad h \neq \text{const.} \end{cases}$$

更に $\|h\|_{L^\infty(S^{n-1})} = 1$, $|g_{xt}(t, w)| < D$ ($\forall t, w$) とする。

Ω_t を、 $\partial\Omega_t = \{g(t, w) \cdot w \in \mathbb{R}^n; w \in S^{n-1}\}$ で囲まれる星状領域とする。 $\Omega_0 =$ 単位球 である。

$\forall R > 0$ fix

$J_{\frac{n}{2}}(r) = 0$ の $0 < r < R$ なる解を $r_1, r_2, \dots, r_k$ とする。

この時、次元 n と R のみによって決まる定数 $C(n, R)$ が存在して、

$0 < t < \frac{C(n, R)}{1+\delta} \min_{1 \leq j \leq k} \left[\sum_{k \neq 0} \|\hat{h}_k\|_{L^2(S^{n-1})}^2 J_{k+\frac{n}{2}-1}(r_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ の時、

$\mathcal{M}(\Omega_t)$ は $\{I \in \mathbb{R}^n: |I| < R\}$ の実超球面を決して含まない。

注意 (3.1) 右辺 $\neq 0$

これは、 $\nu \in \mathbb{Q}$ の時、 $J_\nu(r)$ と $J_{\nu+m}(r)$ ($m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$) は $r = 0$ 以外に零点を共有しない ([Er]) という定理から従う。

(3.2) 定理3より、特に $\{I \in \mathbb{R}^n: |I| < R\}$ の中で原点を中心とする超球面が $\mathcal{M}(\Omega_t)$ に含まれない事から、 $\Omega_0 =$ 球の '近く' (1 parameter の意味で) には $\nu \sim \nu_0$ を満たす領域は、球に限る事がわかる。(定理3は、中心が原点とは限らない超球面の可能性も否定している。)

最後に、1 parameter の振動の考察を、微分方程式の立場から見よう。簡単のため、 $n = 2$ で考える。

$\mathbb{R}^2$ の領域 Ω の滑らかな変形は、 $(\partial\Omega$ 方向の調整をする事に

より) 第1変分は $\partial\Omega$ の normal 方向としてよい。この normal 方向の成分を $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ とする。

今、boundary の滑らかな領域 Ω の滑らかな変形を $\{\Omega_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ とした時、 $\exists \alpha \neq 0$, $\mathcal{M}(\Omega_t) \supset M_\alpha(\frac{t}{\alpha})$ とする。この時、Fact 2 より、 $\Delta u + \alpha u = 0$ in Ω_t ; $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_t} = 0$, $u|_{\partial\Omega_t} = 1$ なる解 $u(t; x, y)$ が存在する (解は一意的)。

$v := \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ は Ω 上、次の微分方程式を満たす。

$$\Delta v + \alpha v = 0 \text{ in } \Omega; \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \alpha f \text{ on } \partial\Omega \quad \textcircled{3}$$

一方、 $\mathcal{M}(\Omega) \supset M_\alpha$ という条件は $O(2) \times \mathbb{R}^2 \curvearrowright \Omega \subset \mathbb{R}^2$ の作用で不変である事に注意すると 次の Prop 2 を得る。

Prop 2 Ω が円板の時 $\Rightarrow h(\Omega, \alpha) = 2 \quad (\alpha > 0)$

円板以外の Ω が (i) ~ (iv) を満たす $\Rightarrow h(\Omega, \alpha) \geq 3$

$$\text{但し } h(\Omega, \alpha) := \dim \{v \in C^1(\bar{\Omega}) : (\Delta + \alpha)v = 0 \text{ in } \Omega, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

注 (3.3) [FTY] で、単連結領域全体が作る Hilbert 多様体 (境界の Sobolev norm による位相) の中で、 $\{\Omega : h(\Omega, \alpha) \leq 1 \text{ for } \forall \alpha\}$ は residual (i.e. open dense な可算個の集合の共通集合) である事を示している。従って Prop 2 より、(i) ~ (iv) を満たさない単連結領域も同様に residual である。

§4 証明の方法

詳しい証明は、別の機会に譲ることにし、ここでは証明の方針を述べる。

定理1, 定理2は、 χ_Ω をまず Radon 変換 ($\mathbb{R}^n$ では超平面、 $H^n(\mathbb{R})$ では horosphere 上の積分) し、その singularity (Ω の幾何学的量で表される) か、動径方向 (1次元) の Fourier 変換で、無限遠の漸近挙動にどう反映されるかを計算してやればよい。

Cor1 は、 $n=2$ では h と K が線型常微分方程式の関係である事より、 $\mathcal{M}(\Omega)$ の情報から h の単独線型常微分方程式が得られ、簡単に証明ができる。

Cor2 の i), ii) は、Alexandroff-Fenchel-Jessen-Chern ([Ch]) の定理:

□ $K \in C^1: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ が一致する strictly convex domains は、平行移動で互いに移りあう □ (Minkowski の定理の一意性) を使って示される。

定理3 は、Fourier 変換の parameter $\mathbb{C}^n \ni \mathbb{R}^n \ni \mathbb{I}$ を極座標 (r, ω) を用いて表した次の式を用いて証明される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \hat{\chi}_{\Omega_t}(r, \omega) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{r^{\frac{n}{2}-1}} \sum_{k=0}^{\infty} i^k h_k(\omega) J_{k+\frac{n}{2}-1}(r) \\ \hat{\chi}_{\Omega_0}(r, \omega) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{r^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(r)\end{aligned}$$

References

- [Be] C. A. Berenstein: An inverse Spectral theorem and its relations to the Pompeiu problem, *J. D'analyse Math.* 37 (1980), 128-144
- [BeY] C. A. Berenstein, P. Yang: Overdetermined Neumann problem in the unit disk, *Advances in Math.* 44, (1982), 1-17
- [BrK] L. Brown, J. P. Kahane: A note on the Pompeiu problem for convex domains, *Math. Ann.* 259, 107-110 (1982)
- [BrST] L. Brown, B. Schreiber, B.A. Taylor: Spectral synthesis and the Pompeiu problem, *Ann. Inst. Fourier, Gren.* 23, 125-154 (1973)
- [C] S. S. Chern: Integral formulas for hyper surfaces in Euclidian space and their applications to uniqueness theorems, *J. Math and Mech.* 8 (1959), 947-955
- [E] A. Erdélyi et. al.: Higher transcendental functions, Vol. 2 McGraw-Hill, 1953
- [H] S. Helgason: Groups and geometric analysis, AP (1984)
- [G] I. M. Gelfand et.al: Generalized functions (translation) Vol 1, 5, AP (1964, 1966)
- [FTY] D. Fujiwara, M. Tanikawa, S. Yukita: The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. 1, *Proc. Japan Acad.* 54, (1978) 87-91
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry, Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc. (1969)
- [M] J. Milnor: Morse Theory, *Annals of Math Studies*, No. 51, Princeton, N. J., 1963
- [Sa] T. Sasaki: Minkowski's problem and real Monge-Ampère equations (in Japanese), *Gekkan. Math.* 1 No. 7 (1980), 522-532
- [Se] J. Serrin: A symmetry problem in potential theory, *Archiv. for Rat. Mech and Anal* 43 (1971), 304-318
- [W] H. F. Weinberger: Remark on the preceding paper of Serrin, *Archiv. for Rat. Mech and Anal.* 43 (1971), 319-320