ユニタリ表現論セミナー報告集 V, 1985
pp.61-72

$sl(n,m)$ 型 Lie Superalgebra の real form の unitary 表現について

京大 理　　古津 博俊 (Hirotoshi - Furutsu)

§0. 序　素粒子論においては，粒子の全体は，ボゾンとフェルミオンの2種類に分けられる。これらの特徴としては，各粒子を self-adjoint operator $(A, B, \cdots)$ で表わした時に，ボゾン同志ならば それらの相互作用は交換関係 $[A, B]\ (=AB-BA)$ を満たし，フェルミオン同志ならば それらの相互作用は反交換関係 $[A, B]_+\ (=AB+BA)$ を満たすことがあげられる。この2種類の粒子を含む場を同時に扱おうとして 考えられた理論として supersymmetry があり，この時に用いられるのが Lie superalgebra である。物理では 量子化された物理量として self-adjoint operator のみを扱うので，各 Lie superalgebra に対して，そのユニタリ表現を求めることが重要な問題である。これは数学的にも興味深く，また内容の豊富な問題である。

§1. 記号と準備　体K上の Lie superalgebra $\mathfrak{g}$ とは，集合

1

としては，K上のベクトル空間であり，そこに積[,]が入っていて，次の条件(1),(2)を満たすもののことである。

(1) $\mathfrak{g}$はベクトル空間として，2つの部分空間$\mathfrak{g}_0$と$\mathfrak{g}_1$との直和である。（ここで　$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ ）

(2) $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, bilinear で次の(i),(ii),(iii)を満たす。

(i) $[\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_t] \subset \mathfrak{g}_{s+t}$　　for $s, t \in \mathbb{Z}_2$

(ii) $[x, y] = -(-1)^{st}[y, x]$　　for $x \in \mathfrak{g}_s$, $y \in \mathfrak{g}_t$

(iii) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{st}[y, [x, z]]$　　〃　　$z \in \mathfrak{g}$

この時 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$をそれぞれ，$\mathfrak{g}$の even part, odd part と呼ぶ。定義より，$\mathfrak{g}_0$は通常の Lie algebra になる。（[2]）

以後　$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。

Lie superalgebra の表現は，Lie algebra の表現の定義の拡張として，以下のように定義される。

(π, V) が Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ の表現であるとは，次の条件(1),(2)を満たすことである。

(1) 複素ベクトル空間Vは，2つの部分空間V_0とV_1との直和である。

(2) $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V) = \mathfrak{gl}(V)$, linear で次の(i),(ii)を満たす。

(i) $\pi(\mathfrak{g}_s)V_t \subset V_{s+t}$　　for $s, t \in \mathbb{Z}_2$

(ii) $\pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - (-1)^{st}\pi(y)\pi(x)$　　for $x \in \mathfrak{g}_s$, $y \in \mathfrak{g}_t$

この時　V_0, V_1 はそれぞれ $\mathfrak{g}_0$-module になる。（[2]）

実 Lie superalgebra のユニタリ表現は，Lie algebra のユニタリ表現の定義を参考にして，以下のように定義できる。

(π, V) が実 Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ のユニタリ表現であるとは，次の条件(1),(2)を満たすことである。

(1)　(π, V) は $\mathfrak{g}$ の表現である。$(V = V_0 \oplus V_1)$

(2)　V の正定値な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と -1 の4乗根 j が存在して次の(i),(ii)を満たす。

(i)　$\langle i\pi(x)v, v' \rangle = \langle v, i\pi(x)v' \rangle$　for $x \in \mathfrak{g}_0,\ v, v' \in V$

(ii)　$\langle j\pi(y)v, v' \rangle = \langle v, j\pi(y)v' \rangle$　for $y \in \mathfrak{g}_1,\ v, v' \in V$

この時，$(\pi|_{\mathfrak{g}_0}, V_0)$，$(\pi|_{\mathfrak{g}_0}, V_1)$ はそれぞれ $\mathfrak{g}_0$ のユニタリ表現になる。（[2]）

§2. U.E.問題

以上のことより，次の問題が考えられる。

Probrem A（U.E.問題）（[1]）

(ρ, V_0) を irreducible unitarizable $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module とする時，(ρ, V_0) の irreducible unitary extension (U.E.) が存在するか？ 又，存在するとして，何通りに拡張できるか？

ここで，$\mathfrak{g}$-module (π, V) が $\mathfrak{g}_0$-module (ρ, V_0) の拡張であるとは，次の条件

$$(V \text{ の even part}) \cong V_0 \quad (\text{as } \mathfrak{g}_0\text{-module})$$

を満たすこと。

この Probrem A を考えることが本論文の主目的であるが，参考として，より一般的な次の問題も述べておく。

Probrem B（E.問題）（[1]）

(ρ, V_0) を irreducible $\mathfrak{g}_0$-module とする時 (ρ, V_0) の irreducible extension が存在するか？ 又，存在するとして，何通りに拡張できるか？

以下，U.E. が存在するための必要十分条件を求める。
この節では，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ を real Lie superalgebra，(ρ, V_0) を $\mathfrak{g}_0$ の既約表現とする。

Lemma 2.1 (π', V') を (ρ, V_0) の拡張であって，$\pi'(\mathfrak{g}_1)V_0' = V_1'$ を満たすものとする。（$V' = V_0' \oplus V_1'$）この時，

$$\mathfrak{m} = \{v' \in V_1' \mid \pi'(\eta)v' = 0 \text{ for } {}^{\forall}\eta \in \mathfrak{g}_1\} \subset V_1'$$

は，V の $\mathfrak{g}$-不変部分空間になる。この時，商空間 $V = V'/\mathfrak{m}$

4

上にπ'から誘導された$\mathfrak{g}$の表現πは，(ρ, V_0)の既約な拡張になる。

$\mathfrak{g}$の表現(π, V)に対して，$\xi, \eta \in \mathfrak{g}_1$とする時，$V_0$から$V_0$への写像$B(\xi, \eta)$を

$$B(\xi, \eta) v = \pi(\xi)\pi(\eta) v \qquad \text{for } v \in V_0$$

で定義する。この時，　$B: \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_0)$, bilinear

Lemma 2.2　(π, V)を(ρ, V_0)の既約な拡張とする時

(i)　V_1の任意の元は，$\pi(\xi)v$　$(\xi \in \mathfrak{g}_1, v \in V_0)$の形の元の一次結合で書ける。

(ii)　$V_1 \ni v$に対して　　$v = 0 \iff \pi(\eta) v = 0$ for $\forall \eta \in \mathfrak{g}_1$

(iii)　$V_1 \ni \sum_i \pi(\xi_i) v_i$　$(\xi_i \in \mathfrak{g}_1, v_i \in V_0)$に対して，

$$\sum_i \pi(\xi_i) v_i = 0 \iff \sum_i B(\eta, \xi_i) v_i = 0 \quad \text{for } \forall \eta \in \mathfrak{g}_1$$

$\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}$を$\mathfrak{g}_1$の複素化とし，これを$\mathfrak{g}_0$-moduleと思うと，$W = \mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_0$は$\mathfrak{g}_0$-moduleになる。$p: W \longrightarrow V_1$, canonical $\mathfrak{g}_1$-homom.を，$p(\xi \otimes v) = \pi(\xi) v$　$(\xi \in \mathfrak{g}_1, v \in V_0)$で与えると，$\pi$の既約性より，$p$はsurjectiveになる。又，$\mathfrak{M} = \ker p$とすると，

$$\mathfrak{M} = \left\{ \sum_i \xi_i \otimes v_i \,\middle|\, \xi_i \in \mathfrak{g}_1, v_i \in V_0,\ \sum_i B(\eta, \xi_i) v_i = 0 \text{ for } \forall \eta \in \mathfrak{g}_1 \right\} \quad (2.1$$

となる。

$\tilde{W} = W/\mathfrak{M}$ とし，$\eta \otimes v$ $(\eta \in \mathfrak{g}_1, v \in V_0)$ で代表される $\tilde{W}$ の元を $[\eta \otimes v]$ で表わす。この時，p によって，$\tilde{W}$ と V_1 は $\mathfrak{g}_0$-module として同値になる。$\tilde{W}$ 上の $\mathfrak{g}_1 \ni \xi$ の作用を

$$\tilde{W} \ni [\eta \otimes v] \xmapsto{\ \xi\ } B(\xi, \eta) v \qquad (2.2)$$

と定義できる。

従って，既約な拡張 (π, V) を以下のように構成できる。

(1) $W = \mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} V_0$ を $\mathfrak{g}_0$-module とし，$\mathfrak{M}$ を (2.1) で定義する。

(2) $\tilde{W} = W/\mathfrak{M}$ を V_1 とし，$\mathfrak{g}_1 \ni \xi$ の V_1 上の作用を (2.2) で，V_0 上の作用を (2.3) で定義する。

$$V_0 \ni v \xmapsto{\ \xi\ } [\xi \otimes v] \in \tilde{W} \qquad (2.3)$$

以上のように，(ρ, V_0) に対して 既約な拡張 (π, V) が存在すれば，それは $B(\ ,\ )$ によって一意的に決まる。従って $B(\ ,\ )$ の満たすべき条件を求めればよい。

Theorem 2.3 (ρ, V_0) を $\mathfrak{g}_0$ の表現とする。

(i) (π, V) $(V = V_0 \oplus V_1)$ を (ρ, V_0) の $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ への拡張であって，$\pi(\mathfrak{g}_1) V_0 = V_1$ を満たすものとする。この時，

$$B(\xi, \eta) v = \pi(\xi) \pi(\eta) v \qquad v \in V_0,\ \xi, \eta \in \mathfrak{g}_1$$

と定義すると，$B(\ ,\ )$ は次の条件 (EXT 1～3) を満たす。

$$B({}^{X}\xi,\eta)+B(\xi,{}^{X}\eta)=[\rho(X),B(\xi,\eta)] \quad \text{for } X\in\mathfrak{g}_0,\ \xi,\eta\in\mathfrak{g}_1 \qquad (\mathrm{EXT}\ 1)$$

$$B(\xi,\eta)+B(\eta,\xi)=\rho([\xi,\eta]) \quad \text{for } \xi,\eta\in\mathfrak{g}_1 \qquad (\mathrm{EXT}\ 2)$$

$$B(\tau,\xi)B(\eta,\zeta)+B(\tau,\eta)B(\xi,\zeta)=B(\tau,{}^{[\xi,\eta]}\zeta)+B(\tau,\zeta)\rho([\xi,\eta])$$
$$\text{for } \tau,\xi,\eta,\zeta\in\mathfrak{g}_1 \qquad (\mathrm{EXT}\ 3)$$

[但し、${}^{X}\xi=[X,\xi]$ for $X\in\mathfrak{g}_0,\ \xi\in\mathfrak{g}_1$
又、(EXT 1) の右辺は、$[A,B]=AB-BA$ for $A,B\in\mathfrak{gl}(V_0)$]

(ii) 逆に、$B(\ ,\ )$ を $\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1$ から $\mathfrak{gl}(V_0)$ への bilinear map であって条件 (EXT 1〜3) を満たすものとする。この時、$W=\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}\otimes_{\mathbb{C}}V_0$ とし、W の $\mathfrak{g}_0$-submodule $\mathfrak{M}$ を (2.1) で定義し、$\tilde{W}=W/\mathfrak{M}$ を V_1 とし、$V=V_0\oplus V_1$ 上の $\mathfrak{g}_1$ の作用を (2.2), (2.3) で定義すると、これは (ρ,V_0) の $\mathfrak{g}$ への拡張になる。

さらに、(ρ,V_0) の拡張 (π,V) $(V=V_0\oplus V_1)$ であって、次の条件 (a), (b) を満たすものは、(同値を除いて) すべてこの方法で得られる。

(a) $\pi(\mathfrak{g}_1)V_0=V_1$

(b) $V_1\ni v$ に対して、

$$v=0 \iff \pi(\eta)v=0 \quad \text{for } {}^{\forall}\eta\in\mathfrak{g}_1$$

以上のことより、(ρ,V_0) の $\mathfrak{g}$ への拡張 (π,V) を求めることは、条件 (EXT 1〜3) を満たす $B(\ ,\ )$ を求めることと同値である。

以後、(ρ,V_0) を $(\mathfrak{g}_0,K_0)$-module であって unitarizable なものとし、

$\langle\ ,\ \rangle_0$ を V_0 上の $\mathfrak{g}_0$ 不変正定値内積とする。以下，この (ρ, V_0) に対して U.E. が存在するための条件を求める。

(π, V) を (ρ, V_0) の quasi-unitary extension であって，Theorem 2.3 の (a),(b) を満たすものとし，$\langle\ ,\ \rangle$ を，V 上の $\mathfrak{g}$ 不変非負定値内積であって，$\langle\ ,\ \rangle_0$ の拡張になっているものとし，その V_1 上への制限を $\langle\ ,\ \rangle_1$ とする。

Theorem 2.4　$\mathfrak{g}_0$ を reductive とし，(ρ, V_0) を unitarizable $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module とする。$B(\ ,\ )$ を条件 (EXT 1〜3) を満たすものとし，(π, V) をこの $B(\ ,\ )$ から作られるものとする。この時，

(i)　(π, V) が quasi-unitary ならば必らずユニタリになる。

さらに，$V_1 \ni v = \sum_i \pi(\xi_i) v_i$ $\left(\xi_i \in \mathfrak{g}_1, v_i \in V_0\right)$ に対して，

$$\langle v, v \rangle_1 = j^2 \sum_{k,\ell} \langle B(\xi_k, \xi_\ell) v_k, v_\ell \rangle_0$$

となる。

(ii)　(π, V) がユニタリになるための必要十分条件は，$B(\ ,\ )$ が条件 (UNI) を満たすこと。特に

$$j^2 B(\xi, \xi) \geqq 0 \qquad \text{for } {}^\forall \xi \in \mathfrak{g}_1 \qquad (\mathrm{UNI}')$$

を満たすことが必要である。但し，条件 (UNI) は，

$$j^2 \sum_{k,\ell} \langle B(\xi_k, \xi_\ell) v_k, v_\ell \rangle \geqq 0 \qquad \text{for } {}^\forall \xi_i \in \mathfrak{g}_1, {}^\forall v_i \in V_0$$

である。（j は -1 の 4 乗根）

§3. $sl(n.m)$型 Lie superalgebra　Lie superalgebra $l(n.m)$ を以下のように定義する。集合としては，$l(n.m) = M(n+m;\mathbb{C})$ であって，そこに $\mathbb{Z}_2$-grade を，

$$l_0(n.m) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \middle| A \in M(n;\mathbb{C}),\ D \in M(m;\mathbb{C}) \right\}$$

$$l_1(n.m) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \middle| B \in M(n,m;\mathbb{C}),\ C \in M(m,n;\mathbb{C}) \right\}$$

で入れ，積 $[\ ,\ ]$ を，

$$[x, y] = xy - (-1)^{st} yx \quad \text{for } x \in l_s(n.m),\ y \in l_t(n.m)$$

で定義したものである。この $l(m,n)$ の元 $x = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ に対して supertrace を $\operatorname{str} x = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} D$ で定義する。そして，$l(n.m)$ の subalgebra $sl(n.m)$ を，

$$sl(n.m) = \{ x \in l(n.m) \mid \operatorname{str} x = 0 \}$$

で定義する。$n \neq m$ の時，これは simple になる。$n = m$ の時は，$sl(n.n)$ は 1 次元イデアル $\langle 1_{2n} \rangle$ を含む。よって，A 型 Lie superalgebra を次で定義する。([2],[3])

$$A(n.m) = \begin{cases} sl(n+1, m+1) & \text{if } n \neq m \\ sl(n+1, n+1)/\langle 1_{2n+2} \rangle & \text{if } n = m \end{cases}$$

U.E.問題を考えるためには，real Lie superalgebra でなければならないので，$sl(n.m)$ の real form を考える。$sl(n.m)$ の real form としては，次のものが考えられる。([2])

(A)　$sl(n.m;\mathbb{R}) = \{ x \in sl(n.m) \mid x \in M(n+m;\mathbb{R}) \}$

(B)　$su(n.m;p,q)$　$(0 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq m)$

ここで，$su(n.m;p,q)$は，行列 $J \in M(m+n;\mathbb{C})$ を

$$J = diag(\underbrace{1,\cdots,1}_{p\text{個}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{(n-p)\text{個}},\underbrace{i,\cdots,i}_{q\text{個}},\underbrace{-i,\cdots,-i}_{(m-q)\text{個}})$$

とし，$su(n.m;p.q)_r = \{x \in sl(n.m)_r \mid Jx + (-1)^r\, {}^t\bar{x} J = 0\},\ r=1,2$

で定義されたもの。

これらの real form に対して U.E.問題を考える。

Theorem 3.1　$\mathfrak{g} = sl(n.m;\mathbb{R})$ の時，$\mathfrak{g}_0$ の自明な表現に自明な U.E.が存在し，他は存在しない。

以後　$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = sl(n,1)$ で考える。この時，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の even part $\mathfrak{g}_{\mathbb{C},0}$ は

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C},0} = sl(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}c \qquad \left(sl(n.\mathbb{C})\text{は左上部分},\ c=diag(1,\cdots,1,n)\right)$$

となる。　$\mathfrak{g} = su(n,1;p,1)$ とする。この時，

$$\mathfrak{g}_0 = su(p,n-p) \oplus \mathbb{R}ic$$

Proposition 3.2　$L(\Lambda)$ を，$sl(n,\mathbb{C})$ の highest weight Λ の irreducible highest weight module とし，$(\rho.V_0)$ を，$\mathfrak{g}_0$ の表現であって，その $su(p.n-p)$ への制限が $L(\Lambda)$ から定まるものであり，$\rho(ic)=im$ を満たすものとする。さらに，$(\rho.V_0)$ は，unitarizable $(\mathfrak{g}_0.K_0)$-module とする．この時，n が 3 以上ならば，U.E.が存在する m の値は有限個（$2(n+1)$ 以下）である。

$n=2$ の時　即ち，$\mathfrak{g}=su(2,1;2,1)$ or $su(2,1;1,1)$ の時には，U.E.問題の解が求まっている。

Theorem 3.3　$\mathfrak{g}=su(2,1;2,1)$ の時　(ρ, V_0) を irreducible unitarizable $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module とすると，$\dim_{\mathbb{C}} V_0 < +\infty$。今 $\dim_{\mathbb{C}} V_0 = n$, $\rho(ic)=im$ とすると，(ρ, V_0) が U.E. を持つための必要十分条件は以下のようになる。

(a)　$n=1$ の時　$m=0, \pm 2$

(b)　$n=2$ の時　$m \in \mathbb{R}$, $|m| \geqq 1$

(c)　$n \geqq 3$ の時　$m = \pm(n-1), \pm(n+1)$.

さらに，上の条件を満たす (ρ, V) に対して，拡張は，$(n, m) = (2, \pm 3)$ の時に限り 2 通り，その他の時は 1 通り。

Theorem 3.4　$\mathfrak{g}=su(2,1;1,1)$ の時　(ρ, V_0) を irreducible unitorizable $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module とすると，(ρ, V_0) が U.E. を持つためには，(ρ, V_0) が trivial 又は，holomorphic discrete series (D.S.) 又は，limit of holomorphic discrete series (L.D.S.) であることが必要である。今，$\rho(ic)=im$ とすると，(ρ, V_0) が U.E. を持つための必要十分条件は以下のようになる。

(ρ, V_0) が trivial の時　$m=0$

(ρ, V_0) が (D.S) 又は (L.D.S.) の時 $\left(\mho^{\pm n} \quad , n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, n>0 \quad [4] \right)$

(a) $n = \frac{1}{2}$ の時 $m = 1, -1$

(b) $n = 1$ の時 $m = 0, 2, -2$

(c) $n \geqq \frac{3}{2}$ の時 $m = 2n, 2n-2, -2n+2, -2n$

さらに、上の条件を満たす (ρ, V_0) に対して、拡張は $(n, m) = (1, 0)$ の時に限り2通り、その他の時は1通り。

文献

[1] T. Hirai, *Unitary representations of a Lie superalgebra*, to appear

[2] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Adv. in Math. 26 (1977), 8-96

[3] V. G. Kac, *Representations of classical Lie superalgebras*, Lecture Notes in Math. 676 (1978), 597-626

[4] M. Sugiura, *Unitary representations and harmonic analysis*, Kodansha, 1975