

Kac-Moody Lie 環に対する Kazhdan-Lusztig 予想について

京大 理 須藤 清一 (Kiyokazu Suto)

§ 1 序 Kac-Moody (K-M) Lie 環とは、複素半単純 Lie 環の形式的な一般化であり、複素半単純 Lie 環の、その Cartan 行列からの構成を、一般型 Cartan 行列 (GCM) と呼ばれるより広い範囲の正方行列に対して適用して得られる標数 0 の体の上の Lie 環である ([K1], [M] 参照)。以下では、係数体としては複素数体 $\mathbb{C}$ のみを考える。

K-M Lie 環の研究における最初の成果は、dominant integral な highest weight (h.w.) を持つ既約な h.w. module の指標公式である ([K2] 参照)。これは、複素半単純 Lie 環に対する Weyl の指標公式と全く同じ形をしており証明もほぼ同じである (Weyl-Kac の指標公式と呼ぶこともある)。Dedekind の η 関数の展開公式のような、無限和と無限積を結びつける公式の中の多くのものが、この指標公式の “specialization” として得られることが知られている。

では、h.w. が dominant integral でない既約 h.w. module の

指標はどのように計算されるが，という問題が考えられる。
 複素半単純 Lie 環の場合は，Verma module の組成列が完全に決定されれば，任意の既約 h.w. module の指標が計算でき Verma module の組成列の決定は，よく知られているように Kazhdan-Lusztig (K-L) 予想に帰着する ([J] 参照)。この予想は [B-K]，[B-B] によって独立に証明されている。

K-M Lie 環の場合もほとんど同様である。すなわち， $\mathfrak{g}$ を K-M Lie 環， $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とする。 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を h.w. に持つ Verma module を $M(\lambda)$ ，その既約な quotient を $L(\lambda)$ とする。 $M(\lambda)$ の既約 subquotient は $L(\mu)$ という形で，その重複度 $[M(\lambda):L(\mu)]$ が，複素半単純 Lie 環の場合の拡張として定義される。 $L(\lambda)$ の指標は，すべての重複度 $[M(\mu):L(\nu)]$ が計算できれば，計算可能となり， λ が integral の場合は， μ, ν とともに integral な場合だけを考えればよい。 $\mathfrak{g}$ が対称化可能な GCM に対応する場合，[D-G-K] では， $\mathfrak{g}$ の “good” な部分集合 K を考え，integral な $\mu, \nu \in K$ に対する $[M(\mu):L(\nu)]$ の計算がほぼ次に帰着することを示した。

$$[M(y\rho - \rho):L(w\rho - \rho)] \quad (y, w \in W)$$

ここで， W は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群， $\rho \in \mathfrak{h}^*$ は任意の単純 coroot 上 1 の値をとるもの。

[D-G-K] では, $[M(\varphi\rho-\rho):L(w\rho-\rho)]$ の値を次のように予想している。

予想 $[M(\varphi\rho-\rho):L(w\rho-\rho)] = P_{\varphi,w}(1),$

ここで, $P_{\varphi,w}$ は $\varphi, w \in W$ に対応する K - L 多項式である ([K-L] 参照)。

本論説では, まず, φ -modules の成すある Category と φ に標準的に含まれる複素半単純 L -環 φ_S 上の modules の成すある Category との間に自然な対応を与える。 φ_S の Weyl 群は自然に W の部分群と思えるのだが, φ と w がその部分群に属している場合は, 上の対応を用いて, 上の予想が φ_S に対する K - L 予想と一致することを示すことができる。従ってこの場合には上の予想が正しいことが証明されたことになるわけである (定理 4)。

§2 記号と準備 整数成分の正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ が次の (i) ~ (iii) を満たすとき, A を GCM と呼ぶ。

$$(i) \quad a_{ii} = 2 \quad \text{for } \forall i = 1, \dots, n$$

$$(ii) \quad a_{ij} \leq 0 \quad \text{if } i \neq j$$

$$(iii) \quad a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$$

3

以下 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ は常に GCM であるとする。

GCM $A = (a_{ij})$ に対して, 次の (i) ~ (iii) を満たす複素 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ が同型を除いて一意に存在する。

(i) $\mathfrak{g}$ の $2n = \text{rank } A$ 次元の可換部分環 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(A)$ で $\text{ad } \mathfrak{h}$ が同時対角化可能なものが存在して, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する同時固有空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ と書くと, $\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{h}$ と一致する。

(ii) $\mathfrak{h}^*$ の一次独立な部分集合 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ と, $\mathfrak{g}$ の 0 でない $2n$ 個の元 $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ が存在して, 次の (a) ~ (d) を満たす。

(a) $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{h}$ の $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ から生成される。

(b) $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C} e_i, \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C} f_i \quad \text{for } \forall i = 1, \dots, n$

(c) $[e_i, f_j] = 0 \quad \text{if } i \neq j$

(d) 各 i に対して $\alpha_i^\vee = [e_i, f_i]$ とおくと, $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ は $\mathfrak{h}$ の一次独立な部分集合であって

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij} \quad \text{for } \forall i, j$$

(iii) $\mathfrak{g}$ の ideal で $\mathfrak{h}$ との交わりが 0 になるのは, 0 のみ。

この $\mathfrak{g}$ を, A を Cartan 行列に持つ Kac-Moody Lie 環と呼び, $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環と呼ぶ。

$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ なる $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus 0$ を $\mathfrak{g}$ の root と呼ぶ。root の全体を $\Delta = \Delta(A)$ と書くと

4

$$\Delta = \Delta_+ \sqcup (-\Delta_+)$$

ただし, $\Delta_+ = \Delta \cap (\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i)$ とおいた。そこで, $\pi_{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\pm}} \mathfrak{g}_{\pm} \alpha$ とおけば, $\pi_{\pm}$ は共に $\mathfrak{g}$ の部分環であって

$$\mathfrak{g} = \pi_- + \mathfrak{h} + \pi_+ \quad (\text{直和})$$

$$[\mathfrak{h}, \pi_{\pm}] \subset \pi_{\pm}$$

なる三角分解を得る。従って各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, $\lambda \in \mathfrak{h}$.w. に持つ $\mathfrak{h}$.w. module, Verma module 等の概念が定義される。

$\lambda \in \mathfrak{h}$.w. に持つ Verma module を $M(\lambda)$, その既約 quotient を $L(\lambda)$ と書く。

$\mathfrak{g}$ -module M と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$M_{\mu} = \{v \in M \mid \mathfrak{h} \cdot v = \mu(\mathfrak{h})v \text{ for } \forall \mathfrak{h} \in \mathfrak{h}\}$$

において, $M_{\mu} \neq 0$ ならば $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に持つ weight space と呼ぶ。

$M_{\mu} \neq 0$ のとき μ を M の weight と呼び, M の weight の全体を $P(M)$ と書く。

$\mathfrak{g}$ -modules の成す Category $\mathcal{O}$ を以下の通りに定義する。 $\mathcal{O}$ の objects は次の (i) と (ii) を満たす $\mathfrak{g}$ -modules M である。

(i) M は有限次元の weight spaces の直和に分解する。すなわち,

$$M = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*}^{\oplus} M_{\mu}$$

$$\dim M_{\mu} < +\infty \quad \text{for } \forall \mu \in \mathfrak{h}^*$$

(ii) $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合 $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ が存在して

$$P(M) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} (\mu_i + \sum_{1 \leq j \leq k} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j)$$

を満たす。

$\mathcal{O}$ の morphisms は $\mathcal{O}$ -homomorphisms とする。

任意の h.w. module は $\mathcal{O}$ の object である。特に,

$$M(\lambda), L(\lambda) \in \mathcal{O} \quad \text{for } \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$$

また, $\mathcal{O}$ の object の既約 subquotient は必ず $L(\mu)$ ($\mu \in \mathfrak{h}^*$) という形をしている。特に, $\mathcal{O}$ の既約 object は $L(\mu)$ ($\mu \in \mathfrak{h}^*$) で尽きる。

$\mathcal{O}$ の object は必ずしも長さ有限の組成列を持たないが, 次の意味で “局所” 組成列 (local composition series, l.c.s.) を持つ。 $M \in \mathcal{O}$ と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, M の l.c.s. at λ とは, M の submodules の成す有限列 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_e = M$ で次の条件を満たすものをいう。

$$\exists J \subset \{1, \dots, e\} \text{ s.t. } j \in J \Rightarrow M_j/M_{j-1} \simeq L(\mu_j)$$

$$\text{for } \exists \mu_j \in \lambda + \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$$

$$j \notin J \Rightarrow (M_j/M_{j-1})_\mu = 0$$

$$\text{for } \forall \mu \in \lambda + \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$$

この l.c.s. によって $\mathcal{O}$ の object の既約 subquotient の重複度が次のように定義される。 $M \in \mathcal{O}$ と $\mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を $\mu \in \lambda + \sum_{1 \leq i \leq m} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ とするようにつく, M の l.c.s. at λ を

上の通りにとると, $\bar{j} \in \bar{J}$ のうち $\mu_{\bar{j}} = \mu$ となるものの個数は, λ のとり方にも l.c.s. のとり方にもよらない。そこで

$$[M: L(\mu)] = \#(\{\bar{j} \in \bar{J} \mid \mu_{\bar{j}} = \mu\})$$

において, $[M: L(\mu)]$ を $L(\mu)$ の M における重複度と呼ぶ。

$[M: L(\mu)] \neq 0 \iff L(\mu)$ は M の subquotient が成り立つ。

各 $i = 1, \dots, n$ に対して, $\mathfrak{g}^*$ 上の linear operator r_i を

$$r_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i \quad \text{for } \lambda \in \mathfrak{g}^*$$

と定義すると, $r_i^2 = \text{Id}_{\mathfrak{g}^*}$ である。特に,

$$\{r_1, \dots, r_n\} \subset GL(\mathfrak{g}^*)$$

$\{r_1, \dots, r_n\}$ が生成する $GL(\mathfrak{g}^*)$ の部分群 $W = W(A)$ において, W の Weyl 群と呼ぶ。 $(W, \{r_1, \dots, r_n\})$ は Coxeter 系を成す。

以上については [K2] に詳しい。

§3 標準的部分環 index set $\{1, \dots, n\}$ の部分集合 S で $A_S = (a_{ij})_{i,j \in S}$ が, ある複素半単純 Lie 環の Cartan 行列になるものをとり,

$$\mathfrak{g}_S = \sum_{i \in S} \mathbb{C} \alpha_i^\vee, \quad \Delta_S = \Delta \cap \sum_{i \in S} \mathbb{Z} \alpha_i$$

$$\Delta_{S,+} = \Delta_S \cap \Delta_+, \quad \pi_{S,\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_{S,+}} \sigma_{\pm \alpha}$$

$$\sigma_S = \pi_{S,-} + \mathfrak{g}_S + \pi_{S,+}$$

7

とかく。すると $\mathfrak{g}_S$ は $A_S \ni \text{Cartan 行列}$ に持つ複素半単純 Lie 環になり, $\mathfrak{h}_S$ はその Cartan 部分環, $\mathfrak{h}_S + \mathfrak{n}_{S,+}$ は Borel 部分環, $\mathfrak{n}_{S,+}$ は $\mathfrak{h}_S + \mathfrak{n}_{S,+}$ の nilradical, Δ_S は $(\mathfrak{g}_S, \mathfrak{h}_S)$ の root 系, $\Delta_{S,+}$ は $\mathfrak{h}_S + \mathfrak{n}_{S,+}$ に対応する positive root の全体となる。

注意 A_S は非退化な行列だから $\{\alpha_i | \alpha_i \in \Delta_S, 1 \leq i \leq l\}$ は一次独立である。そこで, $\sum_{i \in S} \mathbb{C} \alpha_i \ni \lambda \mapsto \lambda | \mathfrak{h}_S \in \mathfrak{h}_S^*$ によって $\mathfrak{h}_S^* \ni \sum_{i \in S} \mathbb{C} \alpha_i \subset \mathfrak{h}_S^*$ と同一視した。

category $\mathcal{O}$ の定義の中で, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 及び $\mathfrak{h}^*$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_S$, $\mathfrak{h}_S$ 及び $\mathfrak{h}_S^*$ におきかえて定義される, $\mathfrak{g}_S$ -modules の成す category を $\mathcal{O}_S$ と書く。当然 $\mathfrak{g}_S$ 上の任意の f.w module は $\mathcal{O}_S$ の object である。 $\lambda \in \mathfrak{h}_S^*$ に対し f.w. に持つ Verma module を $M_S(\lambda)$, その既約 quotient を $L_S(\lambda)$ と書く。

§ 4 主定理 $Q_S = \sum_{i \in S} \mathbb{Z} \alpha_i$ において, 加法群としての quotient $\mathfrak{h}_S^* / Q_S$ を考える。 $\Lambda \in \mathfrak{h}_S^* / Q_S \ni M \in \mathcal{O}$ に対して, $M^\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ とおくと, M^Λ は M の $\mathfrak{g}_S$ -不変部分空間で $\mathfrak{g}_S$ -module として, $M^\Lambda \in \mathcal{O}_S$ である。また $M = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{h}_S^* / Q_S} M^\Lambda$ であり, この分解は $\mathfrak{g}_S$ -module としての M の直和分解である。

8

任意の $M \in \mathcal{O}$ と M の $\mathcal{H}$ -submodule N に対して

$$N_\mu = N \cap M_\mu \quad \text{for } \forall \mu \in \mathcal{H}^*$$

であることから次の補題が容易に出る。

定理 1 任意の $\Lambda \in \mathcal{H}^*/Q_S$ に対して, $\mathcal{O} \ni M \mapsto M^\Lambda \in \mathcal{O}_S$ は完全関手である。

$\lambda \in \mathcal{H}^*$ に対して, λ を含む剰余類 $\in \mathcal{H}^*/Q_S$ を $[\lambda]$ と書く。
すると次の補題が成り立つ。

補題 2 M を $\lambda \in \mathcal{H}^*$ を h.w. に持つ $\mathcal{H}$ 上の h.w. module とすると, $M^{[\lambda]}$ は $\lambda|_{\mathcal{H}_S} \in \mathcal{H}_S^*$ を h.w. に持つ $\mathcal{H}_S$ 上の h.w. module である。
さらに,

$$(i) \quad M(\lambda)^{[\lambda]} \simeq M_S(\lambda|_{\mathcal{H}_S})$$

$$(ii) \quad L(\lambda)^{[\lambda]} \simeq L_S(\lambda|_{\mathcal{H}_S})$$

第一の主張は $M^{[\lambda]}$ の定義からすぐわかる。これと, Verma module が $U(\mathcal{N}_-)$ (or $U(\mathcal{N}_{S,-})$)-module としては, h.w. vector を free basis に持つ, rank 1 の free module であることから, (i) がわかる。(ii) の同型は, h.w. module が既約になるための必要十分条件は, その上の contravariant

9

bilinear form が非退化 になること, 及び weight spaces Λ の分解が contravariant bilinear form に関する直和分解である, という2つの事実から出る。

$\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$ と同じ剰余類 $\in \mathfrak{h}^*/Q_S$ に属するものとする。

$M(\lambda)$ の d.c.s. に対し λ' に関し $\Theta \ni M \mapsto M^{[\lambda]} = M^{[\lambda']} \in \Theta_S$ を apply すると, 補題 1 及び 2 により, 次の命題の成り立つことがわかる。

命題 3 $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*, \lambda - \lambda' \in Q_S$ とすると

$$[M(\lambda):L(\lambda')] = [M_S(\lambda|_{\mathfrak{h}_S}):L_S(\lambda'|_{\mathfrak{h}_S})]$$

が成り立つ。

この命題を用いて我々の主定理を証明する。

$\{t_i | i \in S\}$ が生成する W の部分群を W_S と書く。すると W_S は $\mathfrak{h}_S^* \subset \mathfrak{h}^*$ を不変に L , $\mathfrak{h}_S$ の Weyl 群とみなせる。

$\rho \in \mathfrak{h}^*$ とし, $\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$ for $i=1, \dots, n$ なるものとする。

また, $\rho_S = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{S,+}} \alpha \in \mathfrak{h}_S^*$ とおく。 $(\rho - \rho_S)|_{\mathfrak{h}_S} = 0$ 故

$$v_i(\rho - \rho_S) = \rho - \rho_S \quad \text{for } \forall i \in S$$

従って

$$w(\rho - \rho_S) = \rho - \rho_S \quad \text{for } \forall w \in W_S$$

10

よって, 任意の $w \in WS$ に対して

$$\begin{aligned} w\rho - \rho &= w(\rho_S + \rho - \rho_S) - \rho_S - (\rho - \rho_S) \\ &= w\rho_S - \rho_S \in Q_S \end{aligned}$$

従って命題3の λ, λ' として $y\rho - \rho, w\rho - \rho$ ($y, w \in WS$)
をとる二ことができて

$$[M(y\rho - \rho): L(w\rho - \rho)] = [M_S(y\rho_S - \rho_S): L_S(w\rho_S - \rho_S)]$$

が成り立つ。 y, w に対する K - L 多項式は, 考える Coxeter
群を W としても WS としても同じものになることが定義から
容易にわかるから, (複素半単純 Lie 環における結果を既知
として) 次の定理を得る。

定理4 $[M(y\rho - \rho): L(w\rho - \rho)] = P_{y,w}(1)$
for $\forall y, w \in WS$

注意 定理4の証明には, A が対称化可能という仮定は必
要ない。

参考文献

[B-B] A. Beilinson - J. Bernstein, Localization
de $\mathcal{O}$ -modules, C.R. Acad. Sci. Paris, 292(1981), 15-18.

[B-K] J. L. Brylinski - M. Kashiwara, Démonstration

II

de la conjecture de Kazhdan - Lusztig sur les modules de Verma, C.R. Acad. Sci. Paris, 291 (1980), 373-376.

[D-G-K] V. V. Deodhar - O. Gabber - V. G. Kac, Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras, Adv. in Math., 45 (1982), 92-116.

[K 1] V. G. Kac, Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth, Math. USSR-Izv., 2 (1968), 1271-1311.

[K 2] _____, Infinite dimensional Lie algebras and Dedekind's η -function, Funct. Anal. Appl. 8 (1974), 68-70.

[K 3] _____, Infinite dimensional Lie algebras; Birkhäuser, Boston, 1983.

[K-L] D. A. Kazhdan - G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math., 53 (1979), 165-184.

[M] R. V. Moody, A new class of Lie algebras, J. Alg., 10 (1968), 211-230.

[J] J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht, Lec. Notes in Math., 750 (1979), Springer.