

直交群の極大トーラスの共役類の分類について

尾道短大 刈山和俊

§1. 昨年の表現論シンポジウムにおいて、任意の無限体上の GL_n , SL_n , Sp_{2n} の極大トーラスの共役類の分類はその体上の可換半単純多元環あるいはそれらの2つの組の同値類の分類とそれらの多元環より得られるトーラスのガロアコホモロジーのある商の構造とを調べることに帰着されることを見た。今回、J. Milnor [3], T. A. Springer, R. Steinberg [4] 等の結果を用いることにより、基礎体を局所体に制限すると、更に特殊直交群における極大トーラスの共役類の分類は Sp_{2n} の場合と“(ほぼ)”同じような結果となることをここに報告する。

記号.

k : 標数2でないある局所体

V : k 上の n 次元ベクトル空間

$\langle, \rangle$: $V \times V$ 上のある非退化対称双線型形式

$GL(V)$: V の全線型群 (general linear group)

$O(V)$: $\langle, \rangle$ が定義する2次形式の直交群

$SO(V)$: $\langle, \rangle$ が定義する 2 次形式の特異直交群

§ 2. $GL(V)$ のある正則半単純元 x が $O(V)$ に属するならば, x の最小多項式 $m(X)$ は次の条件を満たすことがわかる ([3], [4])。

$$m(X) = \prod_{i=1}^n m_i(X) \quad \text{s.t.}$$

(i) $1 \leq i \leq n$, $m_i(X)$: 既約モニック多項式 s.t.

$$m_i(X) = m_i^*(X)$$

(ii) $n+1 \leq i \leq n$, $m_i(X) = p_i(X) p_i^*(X)$, $p_i(X)$: 既約モニック多項式 s.t.

$$p_i(X) \neq p_i^*(X)$$

(iii) $i \neq j$ ならば, $m_i(X) \neq m_j(X)$

ここで, あるモニック多項式 $f(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ に対して

$$f^*(X) = a_d^{-1} X^n f(X^{-1})$$

とする。

今後, 上の条件 (i), (ii), (iii) を 条件 (I) と呼ぼう。このとき, おのずと $x \in SO(V)$ であることを注意しておく。一方 V を上の記号のようとして, $\langle, \rangle$ をある非退化交代双線型形式とすると, Sp 群 に関しては, 昨年の結果

[2] から、正則半単純元 $x \in GL(V)$ が $x \in Sp$ となるのは、その最小多項式 $m(X)$ は上と同様の分解と条件 (I) を満たし、更に逆も成り立つことがわかる。それでは、 $O(V)$ に関して条件 (I) を満たす $GL(V)$ の正則半単純元 x はいつも $O(V)$ に属すだろうか。この問いに関して次の命題が成り立つ。

命題 1. (J. Milnor [3]) $GL(V)$ のある正則半単純元 x に対して、 $x \in O(V)$ ($\in SO(V)$) となるための必要十分条件は x の最小多項式 $m(X)$ が条件 (I) を満たすように分解され、更に条件

$$\det V_{m_i(x)} \equiv m_i(1) m_i(-1) \pmod{(k^\times)^2}$$

$$1 \leq i \leq \lambda, \quad m_i(X) \neq X \pm 1$$

を満たす。ただし、 $V_{m_i(x)} = \{ v \in V \mid m_i(x)^e v = 0, \text{ } e \text{ は十分大} \}$ 、そして $\det V_{m_i(x)}$ は V 上の対称形式 $\langle, \rangle$ を $V_{m_i(x)}$ に制限して得られる形式の定義する対称行列の行列式とする。今後これらの条件を 条件 (II) と呼ぶ。

§ 3. G. E. Wall, J. Milnor, Springer, Steinberg 等々、多くの人々により $O(V)$ の元の共役類は、エルミート形式よりなる系列の同値類と 1 対 1 対応が存在することから知られている。更にまた $O(V)$ の元の中心化群 (centra-

lizer) はそのエルミート形の直交群と同型であることも知られている。例えば, Springer-Steinberg [4] を見よ。特に $O(V)$ の正則半単純元に関しては、簡単な練習問題であり次のような結果が得られる。

命題 2. α を $O(V)$ のある正則半単純元とし, その最小多項式 $m(X)$ が条件 (I) を満すとせよ。 $1 \leq i \leq \lambda$ に対し $E_i = k[X]/(m_i(X))$ とし, E_i の $X \mapsto X^{-1}$ で定義される k 上の同型の固定体を K_i とする。 $\lambda+1 \leq i \leq n$ に対し $K_i = k[X]/(p_i(X))$ とする。

(i) n が奇数ならば, $m_i(X) = X+1$ または $X-1$ となるものが唯一存在する。そこで $m_i(X) = X \pm 1$ とおこう。すると, k 上の群スキームとしての同型

$$Z_{O(V)}(\alpha) \simeq \mu_2 \times \prod_{i=2}^{\lambda} R_{K_i/k}(SO(N_{E_i/K_i})) \times \prod_{i=\lambda+1}^n R_{K_i/k}(GL_1)$$

が存在する。

(ii) n が偶数ならば,

$$Z_{O(V)}(\alpha) \simeq \prod_{i=1}^{\lambda} R_{K_i/k}(SO(N_{E_i/K_i})) \times \prod_{i=\lambda+1}^n R_{K_i/k}(GL_1).$$

が存在する。

ここで, $\mu_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $SO(N_{E_i/K_i})$ はノルム写像 N_{E_i/K_i} と E_i の定義する K_i 上の 2 次形式空間の特殊直交群, GL_i は k 上の乗法代数群として $R_{K_i/k}$ は Weil 制限である。

この命題より直ちに、次の系が得られる。

系 3. 記号を命題 2 のようにする。すると $O(V)$ または $SO(V)$ の k 上の極大トーラスは、

$$\prod_i R_{K_i/k}(SO(N_{E_i/K_i})) \times \prod_j R_{K_j/k}(GL_j)$$

と k 上同型である。

§ 4. Sp_{2n} に関する [2] の結果を思い起こしてみよう。条件 (I) のような多項式 $m(X) = \prod_{i=1}^n m_i(X)$ に対し命題 2 で定義された体 E_i ($1 \leq i \leq n$), K_i ($1 \leq i \leq n$) により、半単純可換多元環の組 $(\bigoplus_{i=1}^n E_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n K_i, \bigoplus_{i=1}^n K_i)$ が得られる。このような組 $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$ に対し

$$(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2) : \text{同値}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sigma_i \simeq \sigma'_i \quad k\text{-同型}, \quad i=1, 2$$

であり、 Γ 。すると

$$\begin{aligned} & \{ (\sigma_1, \sigma_2) \mid \text{上のような組} \} / \sim \\ &= \{ m(X) = \prod_{i=1}^n m_i(X) \mid \text{条件 (I) を満たす} \} \end{aligned}$$

となる。後者の集合を $\mathcal{M}_I$ と表わそう。[2]の結果は次のように言える。

命題 4. 記号は上のようとする。 Sp_{2n} の k 上の極大トラスの k 上共役類の集合から集合 $\mathcal{M}_I$ への全射 ψ が存在する。 $m(X) \in \mathcal{M}_I$ とする。 $m(X)$ から得られる体 E_i , K_i に対し, (E_i, K_i) ($i=1, \dots, t$) を互いに同値でない組とせよ。すると, $\psi^{-1}(m(X))$ は $K_i / N_{E_i/K_i}(E_i^\times)$ のある商達 ($i=1, \dots, t$) の直積と 1 対 1 対応である。

(注) その商の詳細は略すが、完全に記述することか出来る。

k は局所体であるから、更に

$$K_i / N_{E_i/K_i}(E_i^\times) \simeq \text{Gal}(E_i/K_i)$$

でもある。

§ 5. 話を簡単にするために、 n が奇数の場合 (B-型) を見よう。集合

$$\mathcal{M}_{\text{II}} = \left\{ m(X) = \prod_{i=1}^n m_i(X) \mid \text{条件 (II) を満たす} \right\}$$

としよう。

すると、 SO の k 上のある極大トーラス T に対し、

$x \in T(k)$ s.t. $T = Z_{SO}(x)^0$ となるものが存在する

(Borel [1])。 x は SO の正則半単純元であるから

命題 2 より その最小多項式 $m(X)$ は $\mathcal{M}_{\text{II}}$ に属する。この

$m(X)$ は T の共役類と上のような x のとり方に依らないことが

示される。従って上の対応が SO の k 上の極大トーラス

の k 上共役類の集合から $\mathcal{M}_{\text{II}}$ への写像 ψ を定義する。この

ψ に関して次の定理が成り立つ。

定理. n を奇数とし、記号は上の通りとせよ。すると

ψ は全射であり、各 $m(X) \in \mathcal{M}_{\text{II}}$ に対して、 $\psi^{-1}(m(X))$

は $m(X)$ に対し命題 4 のように定義された集合と 1 対 1 対応である。

REFERENCES

- [1] A. Borel, Linear algebraic groups, Benjamin, New York, 1969.
- [2] K. Kariyama, Classification of conjugacy classes of maximal tori in GL_n , SL_n and Sp_{2n} , Seminar Reports of Unitary Representation No.4, 1984.
- [3] J. Milnor, On isometries of inner product spaces, Invent. Math., 8 (1969), 83-97.
- [4] T.A.Springer and R.Steinberg, Conjugacy classes, Seminar on algebraic groups and related finite groups, Springer Lecture Notes, 131 (1970).