

$GL_n(k)$ の既約表現の unitarizability について

京大理 松本茂樹

$k \in \text{non-archimedean local field}$ とするとき, $GL_n(k)$ の smooth な既約表現は, Zelevinsky [2] によって cuspidal 表現を modulo k として parametrize されている。本講演では, $GL_n(k)$ の表現の Whittaker model の degeneracy や, 表現の unitarizability が parameter の値にどう対応するの μ を述べる。

1. Zelevinsky's parametrization

$\rho \in GL_n(k)$ の cuspidal 表現とし, $\alpha \in \mathbb{C}$ を複素数とする。このとき $g \mapsto |\det g|^\alpha \cdot \rho(g)$ で定まる $GL_n(k)$ の (cuspidal) 表現を $\nu^\alpha \rho$ と書く。この記号のもとに, cuspidal 表現の有限集合で $\{\rho, \nu^1 \rho, \nu^2 \rho, \nu^3 \rho, \dots, \nu^l \rho\}$ の $\pi_3 \in \mathbb{Z}$ として l も π_3 (長さ π_3 の) segment と呼ぶ。

segment $\Delta = \{p, v^1 p, v^2 p, \dots, v^{l-1} p\}$ が与えらることを、次のようにして、 $GL_n(k)$ の表現 $\langle \Delta \rangle$ を定義する。(ただし p は $GL_n(k)$ の表現とする。) まず product $p \times v^1 p \times \dots \times v^{l-1} p$ を作る。これは $GL_n(k)$ の表現で、 $GL_n(k)$ の block diagonal $\cong GL_n(k) \times \dots \times GL_n(k)$ (l 個) 上に $p, v^1 p, \dots, v^{l-1} p$ の外部 tensor 積でえらる表現で、block 上三角に trivial に extend して $GL_n(k)$ の parabolic subgroup の表現をつくり、それを $GL_n(k)$ に induce up したものである。表現 $p \times v^1 p \times \dots \times v^{l-1} p$ は ($l \geq 2$ であるかぎり必ず) 可約だが既約部分表現をただひとつもつことがわかる。それを $\langle \Delta \rangle$ と書くのである。

次に $\alpha = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$ を segment の multiset とする。すなわち各 Δ_i は segment であり、同じものがあつてゐる場合はその重複度も考慮するものとする。このとき(上と同様にして) product $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$ をつくと、もし任意の $i < j$ に対して『 Δ_i が Δ_j に先行しない』という条件がみたされなければ、既約部分表現をただひとつもつことがわかるからそれを $\langle \alpha \rangle$ と書く。ただし“先行”の意味は次のとおり: $\Delta = \{p, v^1 p, v^2 p, \dots, v^{l-1} p\}$, $\Delta' = \{p', v^1 p', \dots, v^{l'-1} p'\}$ は 2 つの segment とする。 Δ が Δ' に先行してゐることは次の i) ~ iv) が同時に成立してゐるときをいう。

2

i) $\Delta \not\subset \Delta'$, ii) $\Delta' \not\subset \Delta$, iii) $\Delta \cup \Delta'$ は segment,

iv) $p' = \nu^k \cdot p$ とする $k > 0$ があつた。

segment の multiset の全体を $\mathcal{Q}$ と書く。 $\mathcal{Q}$ に次のようにして順序を入れる。 $a, b \in \mathcal{Q}$ に対して $a > b$ とは, multiset a から出発して, その中に含まれる segments Δ, Δ' での i) ~ iii) をみたすものが $\Delta \cup \Delta'$, $\Delta \cap \Delta'$ でおきかえるという操作を (1 回以上) 有限回行うことにより multiset b が得られることをいう。

R_n は長さ有限な smooth $GL_n(k)$ -modules のなす category の Grothendieck 群とする。 ただし $GL_0(k) = \{e\}$ とみなす。

$R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ に induction functor $R_n \times R_m \longrightarrow R_{n+m}$ による product $\times$ を入れる。 R は commutative algebra となる。

multiset $a = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$ に対して R の元 $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \in \pi(a)$ と書く。

$$\text{Irr} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{GL_n(k) \text{ の 既約表現 } \alpha \text{ (同値類) の全体}\}$$
 とおく。

このとき次が成立する:

Theorem (Zelevinsky [2])

(1) $\mathcal{Q} \ni a \longmapsto \langle a \rangle \in \text{Irr}$ は bijective

(2) $(\pi(a))_{a \in \mathcal{Q}}$ は R の $\mathbb{Z}$ -basis i.e. R は

$\{\langle \Delta \rangle \mid \Delta: \text{segment}\}$ を変数とする $\mathbb{Z}$ 上の多項式環である。

定理の(1)の対応で parameter ($\in \mathbb{Q}$) と表現の同値の対応が

あり:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{length } n \text{ の segment} \\ \text{からなる multiset} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \{(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 0 \dots 0 & 1 \end{smallmatrix})\} \text{ の } \# \text{ の} \\ \text{subgroup に restrict した既約} \end{array} \right\} \\
 \cup & & \cup \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{length } 1 \text{ の segment 1 個のみ} \\ \text{からなる multiset} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \text{cuspidal representations} \right\} \\
 \cap & & \cap \\
 \left\{ \begin{array}{l} \{ \{p\}, \{v|p\}, \dots, \{v^d|p\} \} \text{ の} \\ \# \text{ の multiset} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{square integrable} \\ \text{representations} \end{array} \right\} \\
 \cap & & \cap \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{length } 1 \text{ の segment } n \text{ 個} \\ \text{からなる multiset} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{non-degenerate Whittaker} \\ \text{model を持つ rep.} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

最後の $\longleftrightarrow$ は表現の derivatives に関する Zelevinsky の結果による証明で与える。

degenerate $\hookrightarrow$ Whittaker model $\hookrightarrow$ 度 $\hookrightarrow$ 同値の結果で与える。

命題の中の, 既約表現の level (of non-degeneracy) は表現に対応する multiset $\in Q = \{ \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r \}$ とし, Δ_i は $GL(n_i, \mathbb{k})$ の cuspidal からなるとするときは $\sum_{i=1}^r n_i$ とし計算される量である。

Proposition $\psi \in GL_n(k)$ の上三角 unipotent 行列の全体 U に対し $\psi \in k$ の additive character $\neq 1$, $S \in \{n-r+1, n-r+2, \dots, n-1\} \subset S$, $S \subset \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ を満たす集合, $\chi \in (u_{ij}) \mapsto \psi(\sum_{i \in S} u_{i+i+1})$ である ψ の character となる. このとき $\text{Ind}_U^{GL_n(k)} \chi$ の既約表現の level は $\geq r$ である.

Remark. 上の命題で $r=n$ の場合を考えると, χ は non-degenerate な, ψ の character となり, $\text{Ind}_U^{GL_n(k)} \chi$ の既約部分表現の level は n , すなわち対応する multiset 内の segment はすべて長さ 1 となる. またこの最後の条件は multiset が $\mathbb{Q}$ の順序で maximal になることと同値である.

2. Bernstein's unitarizability criterion

$\pi \in GL_n(k)$ の既約表現とする. π が hermitian であるとは, π の表現空間に, $GL_n(k)$ -不変な non-degenerate sesquilinear form が存在することという. また π が unitarizable とは $GL_n(k)$ -不変な positive-definite sesquilinear form が存在することという. unitarizable なる hermitian 表現の逆は成り立たない.

Bernstein の unitarizability criterion を述べるために記号を用意する.
また segment $\Delta = \{p, v^1 p, v^2 p, \dots, v^{l-1} p\}$ に対して

$$v^{\frac{1}{2}} \Delta = \{v^{\frac{1}{2}} p, v^{\frac{3}{2}} p, v^{\frac{5}{2}} p, \dots, v^{l-\frac{1}{2}} p\},$$

$$\Delta' = \{v^{\frac{1}{2}} p, v^{\frac{3}{2}} p, v^{\frac{5}{2}} p, \dots, v^{l-\frac{3}{2}} p\} \text{ となる.}$$

R は $\{\langle \Delta \rangle \mid \Delta: \text{segment}\}$ 変数である多項式環 $/\mathbb{Z}$ である

$$\langle \Delta \rangle \longmapsto \langle v^{\frac{1}{2}} \Delta \rangle + \langle \Delta' \rangle$$

なる対応 $\in R$ の ring endomorphism $\mathcal{D}$ によって拡張される.

multiset $a = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$ に対して $a' = \{\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r\}$

とおく.

Criterion (Bernstein [1])

$a \in \mathcal{Q}$ に対し, $\langle a \rangle$ が unitarizable であるための必要十分条件は

次の (i) ~ (iii) が成り立つことである:

(i) $\langle a \rangle$ が hermitian

(ii) $\langle a' \rangle$ が unitarizable

(iii) $\mathcal{D}(\langle a \rangle) \in (\pi(b))_{b \in \mathcal{Q}}$ が $\mathbb{Z}$ -linear かつ

展開し $\deg(\langle b \rangle) > \deg(\langle a' \rangle)$,

$e(\langle b \rangle) \leq 0$ である b に対応する $\pi(b)$

の係数は 0 である.

$\pi \in GL_n(k)$ の既約表現とすると $\deg(\pi)$ とは自然数 n のこと, また $e(\pi)$ とは π の central character $\in \chi$ であること
 $|\chi(\lambda)| = |\lambda|^{e(\pi)}$ ($\lambda \in k^\times$) で定まる $e(\pi) \in \mathbb{R}$ である.

次に $\mathbb{F}$ 上の criterion として $GL_3(k)$ の既約表現が unitarizable となる条件を書き下せば以下のようになる.

segment, multiset	unitarizable の条件
(1) $\{\{p\}\}$ ($p \in C_3$)	$e(p) = 0$
(2) $\{\{p_1\}, \{p_2\}\}$ ($p_1 \in C_1, p_2 \in C_2$)	$e(p_1) = e(p_2) = 0$
(3) $\{p, \nu^1 p, \nu^2 p\}$ ($p \in C_1$)	$e(p) = -1$
(4) $\{p_1, \nu p_1, p_2\}$ ($p_1, p_2 \in C_1$)	$e(p_1) = -\frac{1}{2}, e(p_2) = 0$
(5) $\{p, \nu^1 p, \nu^2 p\}$ ($p \in C_1$)	$e(p) = -1$
(6) $\{p_1, \nu^1 p_1, p_2\}$ ($p_1, p_2 \in C_2$ かつ $p_2 \notin \{\nu^1 p_1, \nu^2 p_1\}$)	$e(p_1) = -\frac{1}{2}$ $e(p_2) = 0$
(7) $\{p_1, p_2, p_3\}$ ($p_1, p_2, p_3 \in C_1$ かつ $\{p_1, p_2, p_3\}$ は $\mathbb{Q}$ の "順序" minimal)	$\forall i, 1 \leq i \leq 3$ $\nu^{-2e(p_i)} p_i \in \{p_1, p_2, p_3\}$ $-\frac{1}{2} < e(p_i) < \frac{1}{2}$

$C_n = \{ GL_n(k) \text{ の cuspidal 表現の全体} \}$ とする.

Proposition $\rho \in \text{cuspidal 表現}$ である. このとき 表現

$\rho \times \nu^1 \rho \times \nu^2 \rho \times \dots \times \nu^d \rho$ は長さ 2^d であり, 2^d 個の
組成列系表現のうち unitarizable なものの個数は 0
又は 2 である. 2 となるのは $e(\nu^{\frac{d-1}{2}} \rho) = 0$ のとき
かつそのときで, その 2 個は multiset $\{\rho, \nu^1 \rho, \dots, \nu^d \rho\}$
と $\{\{\rho\}, \{\nu^1 \rho\}, \{\nu^2 \rho\}, \dots, \{\nu^d \rho\}\}$ に対応する.

証明は, criterion の (iii) により $e(\langle \lambda \rangle)$ の値を具体的に計
算することにより行う.

3. Zelevinsky's duality and Bernstein conjecture

その定義と同じ注意で" 対応

$\langle \{\rho, \nu^1 \rho, \nu^2 \rho, \dots, \nu^d \rho\} \rangle \mapsto \langle \{\{\rho\}, \{\nu^1 \rho\}, \dots, \{\nu^d \rho\}\} \rangle$ は
 $\mathbb{R}$ の ring endomorphism とくびける. この $\pm \in \text{duality}$ とする.

$\pm$ は involutive であり, $\text{Irr} \in \text{Irr}$ となる.

Bernstein は [1] において次の conjecture を述べている.

Conjecture duality $\pm$ は 既約表現の unitarizability を変換

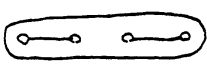
Bernstein 自身は [1] において Conjecture が $\pi(a) = \langle a \rangle$ なる表現について正しいことを示している。

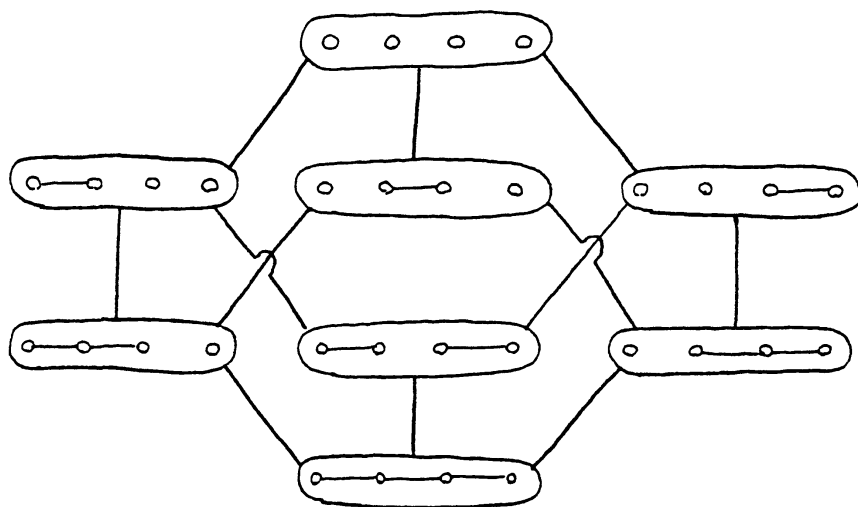
$GL_3(k)$ の既約表現の η ページの list $\mathcal{L}$ は duality によって

$$(3) \xleftrightarrow{\pm} (5), \quad (4) \xleftrightarrow{\pm} (6), \quad \text{その他は self-dual}$$

となっており、この場合も Conjecture が正しいことがわかる。

また先の命題にあるわけが $p \times v^1 p \times v^2 p \times \dots \times v^H p$ の 2^H 個の組成剰余表現に対する $\pm$ の作用がどのように振る舞われることがわかる。この場合についても Conjecture が正しいことがわかる。

かんたんなために $p \times v^1 p \times v^2 p \times v^3 p$ i.e. $l=4$ で説明するが、一般の l についても同じことである。さて segment の multiset, たとえば $\{\{p, v^1 p\}, \{v^2 p, v^3 p\}\}$ には  に対応させることで $p \times v^1 p \times v^2 p \times v^3 p$ の組成剰余表現の lattice を図示すると次のようになる。ここで線分をつたってむすばれる multiset での上下関係が $\mathbb{Q}$ の順序関係をあらわしている。



そこ2"

Proposition 上の作用は $\bigcirc$ の中、 $\circ$ の置換と 変換 と
 1対1に対応することにより得られる。 e.g.

$$\langle \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \rangle \longmapsto \langle \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \rangle$$

証明には Möbius の反転公式 (の類似物) 等を用いる。 ブール束
 の分解で Q に関する induction に基づく。

- [1] I.N. Bernstein, P -invariant distributions on $GL(n)$,
Springer Lecture Notes No. 1041.
- [2] A.V. Zelevinsky, Induced representation of reductive p -adic
groups II, Ann Scient. Ecole Norm. Sup. 13 (1980),
165-210.