

Exponential group の単項表現について

九 大 ・ 理 藤 原 英 徳

Exponential group の単項表現に関する幾多の興味ある考察の中で、ここでは特に次の諸結果に注目しよう： exponential 対称空間に対する Benoist の仕事 [1], [2]； Corwin - Greenleaf / Grélaud の重複度公式 [4]； Penney の抽象 Plancherel 公式 [7] 及び Vergne の重複度公式 [8]。

Γ -群 G の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\alpha$ へのユニタリ表現 α に対し C^∞ -ベクトルの空間を $\mathcal{H}_\alpha^\infty$ 、 Γ の anti-dual 空間を $\mathcal{H}_\alpha^{-\infty}$ で表わし、 $\mathcal{H}_\alpha^{-\infty}$ の元を α の generalized vector と呼ぶことにしよう。 G の閉部分群 K と Γ の指標 $c: K \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、

$$(\mathcal{H}_\alpha^{-\infty})^{K, c} = \{ a \in \mathcal{H}_\alpha^{-\infty} ; \alpha(k)a = c(k)a \text{ for } \forall k \in K \}$$

とおく。又 $\langle a, b \rangle$ は $a \in \mathcal{H}_\alpha^{\pm\infty}$ の $b \in \mathcal{H}_\alpha^{\mp\infty}$ における値を表わす。

$G = \exp \mathfrak{g}$ をリ-環 $\mathfrak{g}$ をもつ exponential group、 $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対ベクトル空間とする。 G は $\mathfrak{g}^*$ に coadjoint action で作用し、Kirillov - Bernat 対応 $\theta: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$ により G のユニタリ

dual $\hat{G}$ is orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ is represented. $\mathfrak{g}^*$ from $\mathfrak{g}^*/G$ to the projection π is represented.

Let us take $f \in \mathfrak{g}^*$ and $\mathfrak{g}$ of the pair $(f, \mathfrak{g})$ with $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ and start from it. The analytic subgroup $H = \exp \mathfrak{g}$ of the $\mathfrak{g}$ has the index χ_f , $\chi_f(\exp X) = e^{\langle f, X \rangle}$ ($X \in \mathfrak{g}$), from which we derive the G -unitary representation $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ to consider.

τ has the canonical central decomposition

$$\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi) \quad (1)$$

Let us assume that $\mathfrak{g}$ is a real polarization of f [8] or, G is a Cartan subgroup [4] etc. In this case, the class of ν is $f + \mathfrak{g}^\perp$, $\mathfrak{g}^\perp = \{ \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}^* : \mathfrak{h}|_{\mathfrak{g}} = 0 \}$ and the Lebesgue measure on $\mathfrak{g}^*$ is the measure on $\mathfrak{g}^\perp$ and the class of ν is the image of $f + \mathfrak{g}^\perp$ under the map $\theta \cdot p$ and the multiplicity $m(\pi)$ is the number of H -orbits in $\theta^{-1}(\pi) \cap (f + \mathfrak{g}^\perp)$.

Let Δ_G (resp. Δ_H) be G (resp. H) modular function and $\Delta_{H,G} = \Delta_H / \Delta_G$ and let τ be the decomposition (1) and let φ be a generalized vector $\varphi \in (\mathcal{M}_\tau^{-\infty})^{H, \Delta_{H,G}^{1/2} \chi_f}$,

$$\varphi : \mathcal{M}_\tau^{-\infty} \ni \varphi \mapsto \overline{\varphi(e)} \in \mathbb{C}$$

of the decomposition (1) (Penney's abstract Plancherel formula [7]). That is,

semi-invariant generalized vectors $\varphi_k \in (\mathcal{M}_\tau^{-\infty})^{H, \Delta_{H,G}^{1/2} \chi_f}$ ($1 \leq k$

$\in m(\pi)$ が存在して

$$a_\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \hat{a}_\pi d\nu(\pi), \quad \hat{a}_\pi = (a_\pi^1, \dots, a_\pi^{m(\pi)}). \quad (2)$$

今 $\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対し、 H 上の Haar 測度 dh を用いて

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_H \varphi(gh) \Delta_{H,G}(h)^{-\frac{1}{2}} \chi_f(h) dh \quad (g \in G)$$

とおくと、②より (cf. [3])

$$\langle \tau(\varphi) a_\tau, a_\tau \rangle = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\varphi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi).$$

従って dh を適当に正規化し、 G の単位元を e で表わすと、

$$\tilde{\varphi}(e) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\varphi) a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi). \quad (3)$$

このような状況で例えは次のような問題を考えたい。

問題. ① ν の class を決定せよ (cf. [4]).

$$\textcircled{2} \quad m(\pi) \stackrel{?}{=} \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}} \chi_f} \quad (\text{相互律. cf. [1], [6]})$$

$$\stackrel{?}{=} \theta^-(\pi) \cap (f + \mathfrak{g}^\perp) \text{ における } H\text{-orbit の個数.}$$

(cf. [1], [4], [8])

③ Penney の Plancherel 公式 (3) をみたす a_π^k を求めよ。

(cf. [2], [5])

こゝでは exponential 対称空間に対する Benoist の仕事を再

びとりあげよう。 $\alpha \in \text{Aut}(G)$ を involution、 H を α の固定点集合、 $\mathfrak{g}$ に移って $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{p}$) を α の 1 (resp. -1) 固有空間とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$ を対応する分解とする。

さて H の自明な表現 $\mathbb{1}$ から誘導された G の単項表現 $\tau = \text{ind}_H^G \mathbb{1}$ を考えると、 τ は multiplicity free であり [1] ;

$$\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \pi \, d\nu(\pi),$$

更に ν に関し殆どすべての $\pi \in \hat{G}$ において

$$\dim (\mathfrak{M}_{\pi}^{-\infty})^{H, \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

G が中零の時 Benoist はこの τ を解析し、 Plancherel 公式他種々の結果を得たが、その際任意の $\lambda \in \mathfrak{g}^{\perp} = \mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{g}^*$ における α -不変な実 polarization の存在が本質的にあった。彼はこの事実を用いてすべてを上の解析に持ちこんでいる。しかし exponential group を取り扱った例えば split oscillator group が示すように、一般にこのような都合の良い実 polarization は存在しない。

我々は $(\mathfrak{M}_{\pi}^{-\infty})^{H, \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}}$ の元を与え、特に $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の中零部分に含まれるような場合に Benoist に導かれてみよう。

References

- [1] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, Mémoire de la société mathématique de France, n° 15 (1984), 1-37.
- [2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, Jour. Func. Anal. 59 (1984), 211-253.
- [3] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, Jour. Func. Anal. 55 (1984), 220-246.
- [4] L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Preprint.
- [5] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Preprint.
- [6] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, Pacific J. Math. 73 (1977), 329-364.
- [7] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, Jour. Func. Anal. 18 (1975), 177-190.
- [8] M. Vergne, Etude de certaines représentations induites d'un

groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Sci. Ecole Norm.
Sup. 3 (1970), 353-384.