

SU(2,2)における Cohomological Hardy Space

東木理 松本久義

(Hisayosi Matumoto)

$SL(2, \mathbb{R})$ においては "the limit of discrete series" は Hardy space 上に実現され、その拡張として Hermitian 対称空間上の Hardy space に実現される表現がこれまで多くの人により研究されてきた。この場合 Silov 境界への "境界値をとる" ことにより退化系列表現への埋め込みが定義できるが、 $SL(2, \mathbb{R})$ よりも複雑な群に対しては、その退化系列のすべての既約成分が得られるわけではない。これは "Hermitian 対称空間の外側" からの寄与と考えられるが、Stein domain ではないので section を考えても意味がない。... そこで Cohomology を考えよう、ということも。大島利彦先生は、Eisenstein series の考察に関連して提唱していた。またこのような "cohomology の空間" なるものは、Zuckermann が代数的に構成した表現の特別な場合に対応している。そこで $SU(2, 2)$ ($\sim SO_0(4, 2)$) について得られた結果を述べることにする。

ここで $G = SU(2, 2)$ を $\begin{pmatrix} \overset{1}{\times} & \overset{1}{\times} & \overset{1}{\times} & \overset{1}{\times} \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ なる Hermitian form を

不変にする $SL(2, \mathbb{C})$ の元全体からなる群と考える。 2×2 行列の 4 つの Block で書く。

$$\begin{pmatrix} AB & \\ & CD \end{pmatrix} \in G \iff AB^* = BA^* \text{ かつ } CD^* = DC^* \text{ かつ } AD^* - BC^* = I$$

$$t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad A^* = {}^t \bar{A} \quad , \quad - \text{ は複素共役}$$

また

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in SU(2, 2) \right\}, \quad \bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SU(2, 2) \right\}$$

$$P_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in SL(4, \mathbb{C}) \right\}$$

$$G_{\mathbb{C}} = SL(4, \mathbb{C}) \quad \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2, 2) \right\}$$

$$\bar{N}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(4, \mathbb{C}) \right\}$$

“ $\mathbb{C}$ ” と “ $\mathbb{R}$ ” “ $\mathbb{C}$ ” Flag manifold $F_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ の G -orbit を考えよう。 open orbit は 3 つあって 2 つは G/K ($K = S(U(2) \times U(2))$) なる Hermitian symmetric space “ $\mathbb{C}$ ”。残りの 1 つは G/H ($H = S(U(1, 1) \times U(1, 1))$) なる “ $\mathbb{R}$ ” の semisimple symmetric space と呼ばれる。 closed orbit は “ $\mathbb{R}$ ” “ $\mathbb{C}$ ”。 $F = G/P$ “ $\mathbb{C}$ ” である。 e を coset P に対応する $F (\subseteq F_{\mathbb{C}})$ の点とすると。

$F_{\mathbb{C}}$ の $\bar{N}_{\mathbb{C}}$ -orbit $\bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e$ は $F_{\mathbb{C}}$ の open dense set と成り

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_1 + \bar{z}_2 & z_3 - i\bar{z}_4 \\ 0 & 1 & z_3 + i\bar{z}_4 & z_1 - \bar{z}_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e \longmapsto (z_1, \dots, z_4)$$

という parametrization を考えよう。 $\bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e$ は $\mathbb{C}^4$ と同視される。

また $\bar{N} \cdot e \subseteq \bar{N}_{\mathbb{C}} \cdot e$ は $\mathbb{R}^4$ あるいは 2×2 Hermitian 行列の

空間 $H(2)$ に $(Z \in H(2) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e)$ “ $\mathbb{C}$ ” 対応している。これは

は適当に同視される。 また $z_i = x_i + iy_i$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ “ $\mathbb{C}$ ” “ $\mathbb{C}$ ”
 $i=1, \dots, 4$

$$\Pi_+^0 = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 > 0, y_1 > 0\}$$

$$\Pi_-^0 = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 > 0, y_1 < 0\}$$

はそれぞれ G/K の Tube domain として $\mathbb{C}^4$ の表現に他ならない。

一方 $N \cdot e$ と G/H に対応する open orbit の intersection は。

$$D = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 < 0\} \quad \text{である。}$$

また $H(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^4 = N \cdot e$ は $\Pi_\pm^0$ の Sibir boundary を与えている。

以下、Kashiwara-Vergne [1] に従い、Sibir boundary 上の表現を

記述する。 $\exists g \in f \in L^2(H(\mathbb{Z}))$ に対して $g' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G, X \in H(\mathbb{Z})$ とし

$$(T(g)f)(X) = (\det(CX + D))^{-2} f((AX + B)(CX + D)^{-1})$$

と定めると $(T, L^2(H(\mathbb{Z})))$ は unitary 表現となる。

これは $P = MAN$ を Langlands 分解として。

$$(*)2) \begin{cases} M \text{ は trivial 表現} \\ A = \rho_P(a) = \det(\text{Ad}(a)|_{\mathfrak{m}})^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\mathfrak{m} \text{ は } N \text{ の Lie algebra})$$

に対応した P の表現から Induce した表現を $\mathbb{C}$ の open cell

$N \cdot e$ 上に制限して表示しものに他ならない。ここで $H(\mathbb{Z})$ の

bilinear form $\text{Tr}XY$ に対して Fourier 変換

$$\hat{f}(v) = \int e^{-i \text{Tr}Xv} f(X) dX$$

(dX は Euclidean measure)

を与える。ここで $H(\mathbb{Z})^*$ で v の空間 ($\text{Tr}Xv$ で $H(\mathbb{Z})$ の dual を $H(\mathbb{Z})$

と同一視したもの) を表わす。すると Fourier 変換したあとでの

$\bar{P}$ の元の action は $(\hat{T}$ と T を Fourier 変換でうつすものとする)

$$\uparrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha^* \end{pmatrix} \hat{f}(y) = (\det a)^2 f(ay \alpha^*)$$

$$\uparrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{f}(y) = e^{i \operatorname{Tr} x y} f(y)$$

$$(a \in GL(2, \mathbb{C}), x \in H(2))$$

と表わされる。よって $H(2)^*$ の $a \cdot y = ay a^*$ ($a \in GL(2, \mathbb{C})$)
 なる $GL(2, \mathbb{C})$ の action の open orbit がある。2次元空間の
 Hermitian form の signature $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$ にそれぞれ
 対応するものを V_+, V, V_- とする。
 ところで $\uparrow$ の P への制限を考えると。

$$L^2(H(2)^*) = L^2(V_+) \oplus L^2(V) \oplus L^2(V_-)$$

は P の表現としての既約分解を与えていることが容易にわかる。

Kashiwara-Vergne [1] では $SU(2, 2)$ のときも含めてより一般の場合
 に、上の分解が G の表現としての既約分解を与えていることを示した。

☆ この場合 $L^2(V_{\pm})$ は Hermitian 対称空間上の Hardy space に表現
 される表現だから $L^2(V)$ をこれから問題にすることにする。

$$\text{まず } H(2)^* \text{ は } \begin{pmatrix} v_1 + v_2 & v_3 - i v_4 \\ v_3 + i v_4 & v_1 - v_2 \end{pmatrix} \quad (v_1, \dots, v_4 \in \mathbb{R}) \text{ として}$$

座標を λ として $\mathbb{R}^4$ と同一視する。すると。

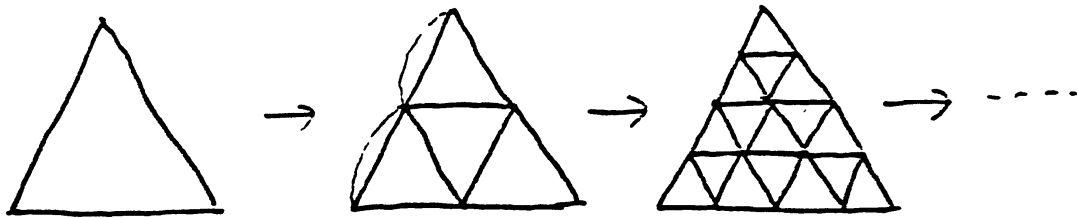
$$V = \{(v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 < 0\}$$

となる。

そこで $f \in L^2(V)$ の逆 Fourier 変換を考えるのであるが、気前には、
 f を proper な convex cone に support をもつような関数の和に分解
 してそれぞれ逆 Fourier 変換を考える... ということをする。具体的に、

$$S^2 = \{ (v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^3 \mid v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 1 \}$$

に $\mathbb{R}^3$ から induce した metric を入れ、測地線 (つまり原点を通る hyper
 surface との交わり) による三角形分割で、すべての三角形が球面三角形
 として鋭角三角形で、同じ性質をもつような細分をいくつもとり、各
 三角形の diameter をいくらでも小さくできるものを考える。
 例えば S^2 に内接する正八面体を考え、その各面を、



のように分割していく。その原点 x が S^2 への射影を考えるように。
 さてこのような分割で十分細かいもの $\mathcal{G}$ を 1 つ固定し、 Δ を $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$
 を頂点とする 1 つの三角形とする。 ($\xi^{(i)} = (\xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}, \xi_4^{(i)}) \in \mathbb{R}^3$)
 また $\det \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \xi^{(3)} \end{pmatrix} > 0$ となるように定めておく。このとき、

$$V_\Delta = \{ (v_1, \dots, v_4) \in V \mid \det \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ v_1' \end{pmatrix} \geq 0 \text{ かつ } \det \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ v_1' \\ \xi^{(2)} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ かつ} \\ \det \begin{pmatrix} v_1' \\ \xi^{(2)} \\ \xi^{(3)} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ かつ } v_1' = (v_2, v_3, v_4) \}$$

と置く。

$$V = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{G}} V_\Delta \quad (\text{measure 0 を無視して disjoint}) \text{ となる。}$$

よって V_Δ の定義域を χ_Δ とし $f \in L^2(V)$ に対して.

$$f_\Delta = f \cdot \chi_\Delta \text{ とおくと } f = \sum_{\Delta} f_\Delta \text{ (L}^2\text{-function)} \text{ と}$$

次は簡単にする。

Lemma 1.

$$V_\Delta \text{ は } \bigcup_{\substack{z=1,2,3 \\ \varepsilon=\pm 1}} \{(\varepsilon t, t \varepsilon \xi_2^{(z)}, t \varepsilon \xi_3^{(z)}, t \varepsilon \xi_4^{(z)}) \in \mathbb{R}^4 \mid t \geq 0, t \geq 1\}$$

の凸包に含まれる。

ここで $\xi = (\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ をある Θ の頂点として.

$$W'_\xi = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid |y_1| < \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4\}$$

$$(z_i = x_i + iy_i, x_i, y_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, 4)$$

とおく。

$$\bigcup W'_\xi \text{ は } \{(y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 < 0\}$$

に外接する“多面体” (ただし $y_1 \leftrightarrow -y_1$ 変換により変換される)

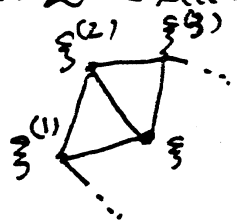
の外側については Tube domain とする。以下これを D_Θ とおく。

Lemma 1 を用いると、 f_Δ の Fourier 変換 $\widehat{f}_\Delta$ は.

$$W_{\xi^{(1)}} \cap W_{\xi^{(2)}} \cap W_{\xi^{(3)}} \text{ の上で正則となることがわかる。}$$

ここで ξ を Θ の任意の頂点とするとき、隣接する点を $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(4)}$

($\xi^{(1)}$ と $\xi^{(2)}$ が隣接する
とはする。)



として.

$$W_\xi = W'_\xi \cap \bigcap_{\delta=0, \dots, m-1} \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid \det \begin{pmatrix} \xi^{(\delta)} \\ \xi^{(\delta+1)} \\ \xi \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \xi^{(\delta)} \\ \xi^{(\delta+1)} \\ y_2, y_3, y_4 \end{pmatrix} > 0\}$$

(ただし $\xi^{(m)} = \xi^{(0)}$ とおく)

とおく。すると (H) が 鋭角三角形からなる分割 であるということがきいて。

$$D_{(H)} = \bigcup_{\xi} W_{\xi}$$

となることがわかる。 $\mathcal{O}$ は正則関数の芽の層とすると。

$f \in L^2(V)$ に対して、 $\bar{f}_{\Delta} \in \mathcal{O}(W_{\xi^{(1)}} \cap W_{\xi^{(2)}} \cap W_{\xi^{(3)}})$ より。

$$\varphi_{(H)} = \sum_{\substack{\Delta: (H) \\ \text{の三角形}}} \bar{f}_{\Delta} dW_{\xi^{(1)}} \wedge dW_{\xi^{(2)}} \wedge dW_{\xi^{(3)}}$$

(ただし、 $\det \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \\ \xi^{(3)} \end{pmatrix} > 0$ としておく)

とおく。ただしこゝで Čech cohomology を外微分形式の記法でもおこなう。(cf. 金子[2] etc)

こゝで、 $\{W_{\xi}\}$ なる $D_{(H)}$ の被覆はすべて凸集合より Stein 被覆で、しかも4)の intersection はすべて空集合となる被覆だから $\varphi_{(H)}(f)$ は cocycle となる。

$$\varphi_{(H)}: L^2(V) \longrightarrow H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}_{D_{(H)}})$$

が定義される。一方 (H') を (H) より細かい分割とすると $D_{(H')} \supset D_{(H)}$ より

$$\begin{array}{ccc} L^2(V) & \xrightarrow{\varphi_{(H')}} & H^2(D_{(H')}, \mathcal{O}) \\ & \searrow \varphi_{(H)} & \downarrow \text{restriction} \\ & & H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}) \end{array}$$

(*)

なる図式が得られるがこれは可換であることが言える。

さらに.

Lemma 2. $\varprojlim_{(H)} H^2(D_{(H)}, \mathcal{O}) \xleftarrow{\sim} H^2(D, \mathcal{O})$

が言える。よって

$$\varphi: L^2(V) \longrightarrow H^2(D, \mathcal{O})$$

なる map が定まる。結局

Theorem 3.

$$L^2(V) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} L^2(H(\mathbb{Z})) \quad \text{なる逆 Fourier 変換は,}$$

$$\begin{array}{ccccc} L^2(V) & \xrightarrow{\phi} & H^2(D, \mathcal{O}) & \xrightarrow{b} & B(H(\mathbb{Z})) \\ & & \searrow \mathcal{Q} & \uparrow & \\ & & & L^2(H(\mathbb{Z})) & \end{array}$$

$\mathcal{F}^{-1}$

と Factor される。 b は境界値を与える map. $B(H(\mathbb{Z}))$ は

$H(\mathbb{Z})$ 上の Hyperfunction のつくる空間である。

またこれは a map はみな $\bar{P}$ -equivariant かつ $U(\mathfrak{g})$ -hom となり b は単射である。

が言える。後々の証明については、 $\Gamma_{\pm}$ を $\Gamma_{\pm}^{\circ}$ の閉包として次のような Mayer-Vietris 完全系列を考える。

(★4)

$$\cdots \leftarrow H^3(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O}) \xleftarrow{\delta} H^2(D, \mathcal{O}) \leftarrow H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\pm}, \mathcal{O}) \oplus H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\pm}, \mathcal{O}) \leftarrow$$

ある $H^3(\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, \mathcal{O})$ は $B(\mathbb{R}^4)$ つまり $B(H(2))$ に他ならず,

(これらの map は $\mathbb{C}^4 - \mathbb{R}^4, D, \Gamma_{\pm}$ が $\bar{P}$ -invariant と $\psi(\eta)$ は互いに微分作用素として act する = かつ P -equivariant, $\psi(\eta)$ -homomorphism とする)

また $H^2(\mathbb{C}^4 - \Gamma_{\pm}, \mathcal{O}) = 0$ が「いさ子の」 δ は単射

よって定理の後半は次の Lemma よりわかる

Lemma 3 b と δ は一致する。

Remark (★3) の可換性は Lem. 3 の ④ (= 7.1.2) の類似を示すことにより示す。Lem. 3 はこれらの inverse limit により成る。

References

[1] K. Kashiwara, M. Vergne

Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, Non-Commutative Harmonic Analysis, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 728 (1979), 136-176

[2] 金子晃 "超関数の入門下" 東京大学出版会