

古典 Lie 環の中零元の共軛性と 表現のテンソル積について

京大理 梅田 亨 (Tôru Umeda)

§ 0. G を代数群/ K , $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。ここに K は代数閉体。 $X, X' \in \mathfrak{g}$ を中零元とする時, 次の二つの共軛性を考える。

$$i) \quad X \sim X' \quad \text{by } G$$

$$ii) \quad \text{ad } X \sim \text{ad } X' \quad \text{by } GL(\mathfrak{g})$$

i) から ii) が従うのは容易に判るから, 問題となるのはその逆である:

問題 I (G): ii) から i) が出るか?

平井武先生は $\mathfrak{g}$ が例外型単純 Lie 環 E_6, E_7, E_8 である時, K の標数が good であれば ii) から i) が出ることを示された。^(註)
我々がここで考察するのは $\mathfrak{g}$ が古典型で K の標数が 0 の場合である。(以下 K の標数は 0 と仮定する。)

結論を先に言えば, $\mathfrak{g}$ が A_l, B_l, C_l 型 (l : 任意) の場合は肯定的であり, D_l 型については $l \neq 4^{*}$ ならば肯定的であるが, $D_{4^{*}}$ ($4^{*} \equiv 2, 4$) に対しては否定的である。

§1. 問題の変形

我々が扱うのは $G = SL(n, K), Sp(n, K), SO(n, K)$ であるが, この場合条件 i) は少し緩められる. 即ち $G \in GL(n, K)$ の部分群とみなし, G の共軌の代りに $GL(n, K)$ の共軌を考えよう. 即ち問題 I の代りに次を考えればよい.

問題 I': $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$ または $\mathfrak{sp}(n, K)$ または $\mathfrak{o}(n, K)$ とする.

$X, X' \in \mathfrak{g}$ が中零とする時, ii) から i') が出るか?

i') $X \sim X'$ by $GL(n, K)$.

次に Jacobson-Morozov の定理を用いて, これを $\mathfrak{sl}(2, K)$ の表現の問題に書き直そう.

$\mathfrak{g}$ を n 次元空間 V に作用する reductive な Lie 環とする. $X \in \mathfrak{g}$ が 0 でない中零元とすると Jacobson-Morozov の定理によって X を含む $\mathfrak{sl}_2$ -triple が存在する. このとき $\mathfrak{g}$ を通して $\mathfrak{sl}(2, K)$ の V 上の表現が得られる. それを π_X と書こう. $\mathfrak{sl}_2$ -triple が共軌を除いて unique であることより, 表現 π_X の同値類は X により $\mathfrak{g}$ には依らない. $X=0$ のときは π_X は trivial 表現 (の重複) とする.

$\mathfrak{sl}(2, K)$ の n 次元の既約表現を $\pi^{(n)}$ とあらわすと, $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ が regular (i.e. $\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$) の時 $\pi_X \sim \pi^{(n)}$. 一般に $J_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ を $S \times S$ Jordan block として, $X \sim J_{S_1} \oplus J_{S_2} \oplus \dots$ なら $\pi_X \sim \pi^{(S_1)} \oplus \pi^{(S_2)} \oplus \dots$

今, $\pi \in \mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現とし, その既約分解を

$$\pi \sim \sum m_i \pi^{(i)} \quad (m_i \in \mathbb{Z}_+ \text{ は multiplicity})$$

とすると次々の条件を考える.

(M1) 奇数の i に対して m_i は偶数,

(M2) 偶数の i に対して m_i は偶数.

この時,

Lemma. $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ に対し,

- 1) X の $GL(n, K)$ -共軌類が $\mathfrak{sp}(n, K)$ と交わる $\Leftrightarrow \pi_X$ は (M1) を満たす.
- 2) X の $GL(n, K)$ -共軌類が $O(n, K)$ と交わる $\Leftrightarrow \pi_X$ は (M2) を満たす.

X の $GL(n, K)$ -共軌類と π_X の同値類が一対一に対応する事も容易に確かめられる.

あと必要なのは π_X と π_{adX} の関係である. その為には,
 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n, K)$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sp}(n, K)$, $\mathfrak{g}_2 = O(n, K)$ 及び σ_i ($i=0, 1, 2$) を
 $\mathfrak{g}_i$ の恒等表現 (i.e. $X \mapsto X$ という n 次元表現) としたとき, 次の Lemma を見ればよい.

Lemma

- 0) $\mathfrak{g}_0$ の adjoint 表現は $\sigma_0 \otimes \sigma_0^*$ に同値 (σ_0^* は σ_0 の反逆表現)
- 1) $\mathfrak{g}_1$ の adjoint 表現は $S^2 \sigma_1$ に同値
- 2) $\mathfrak{g}_2$ の adjoint 表現は $\Lambda^2 \sigma_2$ に同値

ここで S^2, Λ^2 は 2 階の対称及び交代テンソル表現とあるわけ

Cor. $X \in \mathfrak{g}$ を中零とする.

$$0) \quad \pi_{adX} \sim \otimes^2 \pi_X \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$$

$$1) \quad \pi_{adX} \sim S^2 \pi_X \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, K)$$

$$2) \quad \pi_{adX} \sim \wedge^2 \pi_X \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n, K)$$

この事から自然に次の問題に至る.

問題 II: π_1, π_2 を $\mathfrak{sl}(2, K)$ の有限次元表現とするとき,

$$(0) \quad \otimes^2 \pi_1 \sim \otimes^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が出るか?}$$

$$(1) \quad S^2 \pi_1 \sim S^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が出るか?}$$

$$(2) \quad \wedge^2 \pi_1 \sim \wedge^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が出るか?}$$

すると今迄の考察により,

$$\text{問題 I} (SL(n, K)) \Leftrightarrow \text{問題 II} (0).$$

$$\text{問題 I} (Sp(n, K)) \Leftrightarrow \text{問題 II} (1), \text{但 } \pi_1, \pi_2 \text{ は } (M1) \text{ を満たす.}$$

$$\text{問題 I} (SO(n, K)) \Leftrightarrow \text{問題 II} (2), \text{但 } \pi_1, \pi_2 \text{ は } (M2) \text{ を満たす.}$$

§ 2. 肯定的な結果

Theorem. π_1, π_2 を $SL(2, K)$ の有限次元有理表現とする.

$$(0) \quad \otimes^2 \pi_1 \sim \otimes^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が従う.}$$

$$(1) \quad S^2 \pi_1 \sim S^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が従う.}$$

$$(2) \quad \pi_1, \pi_2 \text{ の次元が } 2 \text{ の奇数倍ならば}$$

$$\wedge^2 \pi_1 \sim \wedge^2 \pi_2 \quad \text{から} \quad \pi_1 \sim \pi_2 \quad \text{が従う.}$$

$SL(2, K)$ の有理表現と $sl(2, K)$ の表現の対応を思い出せば.

Cor. G が古典型単独代数群とある. G が D_{4k} ($k=1, 2, \dots$) でなければ, 問題 I (G) は肯定的である.

§3. より一般のテンソル表現への拡張

問題を問題 II のように書いてみるとテンソル積を 2 階に限らず N 階のテンソル $\otimes^N$, 或いは対称テンソル S^N , また交代テンソル $\wedge^N$ などにした一般化が考えられる.

いちばん易しいのは $\otimes^N$ であろう. 表現の trace を使うという方針をとれば, 表現は完全可約なものに限定されるが,

Theorem. G を連結代数群, π_1, π_2 を G の有限次元有理表現で完全可約とする. このとき

$$\otimes^N \pi_1 \sim \otimes^N \pi_2 \quad \text{ならば} \quad \pi_1 \sim \pi_2.$$

全く同様のことが, 連結 Lie 群 G 及びその有限次元連続表現 π_1, π_2 で完全可約なもの, に対しても言える.

さて, S^2 及び $\wedge^2$ の一般化に話をうつそう. もともと S^2 とか $\wedge^2$ は $\otimes^2$ を 2 次の対称群 S_2 の作用によって分解したものである. これは高階数のテンソル空間に対しても一般化される.

G を群, π を G の V 上の表現とする. $\otimes^N V = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{N \text{ 回}}$ には G が $\otimes^N \pi$ によって働らく. 一方, N 次対称群 S_N は $\otimes^N V$ 上に $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(N)}$ ($\sigma \in S_N$) によって働らくが, これは G の作用と可換である. そこで $\otimes^N \pi$ を S_N の表現に従って分解することができる. S_N の既約表現は N の分割によって parametrize される. N の分割 λ に対し $S_\lambda \pi$ によって $\otimes^N \pi$ の成分で λ に対応するものをとしよう.

例えば $S_{(N)} \pi = S^N \pi$ (N 階対称テンソル表現),
 $S_{(1^N)} \pi = \wedge^N \pi$ (N 階交代テンソル表現)

問題 II(1) 及び II(2) の拡張として,

問題 III (G, λ): $S_\lambda \pi_1 \sim S_\lambda \pi_2$ から $\pi_1 \sim \pi_2$ が出るか?

実は $\lambda = (1^2)$ で一般には正しくないことをあとで見る (§4, §6) が, 肯定的な結果として

Theorem. G を連結代数群, π_1, π_2 を G の有限次元有理表現で完全可約とする. m_i ($i=1,2$) を π_i の次元とする. N の分割 λ が hook であり

(*) m_i は $(N-1)! \times N^{i-1}$ の約数である

と仮定する. すると $S_\lambda \pi_1 \sim S_\lambda \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \sim \pi_2$.

また $\lambda = (N)$ のときは条件 (*) は不要である.

全く同様のことが、連結 Li 群 G 及びその有限次元連続表現 π_1, π_2 が完全可約なも ρ に対しても成立する。

§ 4. 問題 I, II に対する反例

ことばの定義から始める。

Def. $r \in \mathbb{Z}$ 正整数, $v \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ とする. Laurent 多項式 $f(T) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j T^j$ が v を中心として 対称 かつ 単峰 (symmetric unimodal) とは

(ステップ r ぞ) とは

$$1) \text{ (対称性)} \quad a_j = a_{2v-j} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

$$2) \text{ (単峰性)} \quad a_{j+r} \leq a_j \quad (j \geq v)$$

を満たすこととする。(通常は $f(T)$ が多項式で $r=1$, $2v = \deg f(T)$ の時, 単に symmetric and unimodal という.)

さらに定義を述べる。

Def. (1) 多項式 $P(T) \in \mathbb{Z}[T]$ が admissible とは次の (A0) ~ (A4) を満たすときに言う。

$$(A0) \quad \deg P(T) \text{ は 偶数}$$

$$(A1) \quad P(T) \mid P(T^2)$$

$$(A2) \quad Q(T), F_1(T), F_2(T) \in \mathbb{Z}[T]$$

$$(4.0) \quad Q(T) = P(T^2)/P(T)$$

$$(4.1) \quad F_1(T) = \frac{1}{2} (Q(T) + P(T))$$

$$(4.2) \quad F_2(T) = \frac{1}{2} (Q(T) - P(T))$$

と置くとき, $F_1(T), F_2(T)$ と も 中心 $\frac{1}{2} \deg P(T)$ で対称かつ
ステップ 2 で単峰.

$$(A3) \quad P(1) = 0$$

$$(A4) \quad P(T) \text{ は monic (即ち最高次の係数} = 1.)$$

Def. (2) 多項式 $P(T)$ が strongly admissible とは,
admissible であり, さらに (A2) で定義された $F_1(T), F_2(T)$
が 11 つの条件を満たす,

$$j+1 \equiv \frac{1}{2} \deg P(T) \pmod{2}$$

を満たす j について, j 次の係数がすべて偶数である時に
言う.

この時, 次の言える.

Theorem (1) 問題 II(2) の反例の pair $\{\pi_1, \pi_2\}$ と
admissible polynomial は一対一に対応する.

(2) 問題 I ($SO(n, K)$) の反例の pair $\{X, X'\}$ と
strongly admissible polynomial $P(T)$ は一対一に対応する.

ここで $n = \frac{1}{2} Q(1)$, 但し $Q(T)$ は (4.0) で定義されたもの
である.

対応については, まず $SL(2, K)$ の有限次元有理表現 π に対して Laurent 多項式 $c_\pi(T)$ を

$$c_\pi(t) = \text{Tr} \left(\pi \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right) \quad t \in K^\times$$

とおくとき, pair $\{\pi_1, \pi_2\}$ に対して

$$p(T) = p_{\pi_1, \pi_2}(T) = c_{\pi_1}(T) - c_{\pi_2}(T)$$

とおく. このとき $\Lambda^2 \pi_1 \sim \Lambda^2 \pi_2$ かつ $\pi_1 \sim \pi_2$ となる pair に対して $P(T)$ は $p(T)$ の分母を払ったものとして定義する. 但し, π_1 の highest weight が π_2 の highest weight より大きいおりに π_1, π_2 の順番をきめておく.

Examples (1) $P(T) = (T-1)^{2k}$ は admissible である.

さらに k が偶数なら strongly admissible.

(2) $P(T) = (T^2-1)^2(T-1)^{12+2k}$ は admissible である.

さらに k が偶数なら strongly admissible.

この例から次がわかる.

Theorem (1) $k \geq 1$ に対し, $SL(2, K)$ の有理表現 π, π_2 で $\dim \pi_1 = \dim \pi_2 = 2^{2k-1}$ であり $\pi_1 \sim \pi_2$ であるか, $\Lambda^2 \pi_1 \sim \Lambda^2 \pi_2$ となるものが存在する.

(2) $r \geq 1$, $r \neq 2, 4$ に対し 問題 I ($SO(2^{2r+1}, K)$) は否定的である.

§ 5. Admissible 及び Strongly admissible 多項式の性質

admissible (及 strongly admissible) 多項式を数え尽くすことはまだできていない。ここではいくつかの性質を述べる。

まず基本的なのは、

Proposition. admissible 多項式の積はまた admissible.

次に条件 (A1) $P(T) \mid P(T^2)$ を調べることによって

Proposition. admissible 多項式は $\prod_{\substack{m: \text{odd} \\ i \geq 0}} \Phi_m(T^{2^i})^{e_{m,i}}$ の形をしている。ここで $\Phi_m(T)$ は m 次の円分多項式、 $e_{m,i} \geq 0$ 。

ここで $e_{m,i} = 0$ for $i > 0$ となるものは pure と呼ばれる。すると pure な $P(T)$ に対しては $F_1(T), F_2(T)$ はそれぞれ、 $Q(T) = P(-T)$ の偶数次の項及び奇数次の項をとり出したものになる。

Proposition. $P(T)$ が pure かつ strongly admissible ならば $Q(1) = 4^{\text{deg } P}$ である。

従って pure なものだけを扱っていると $D_{4^{2k}}$ に対する問題 I の反例にはならない。

また決して admissible にならない場合として、

Proposition. $P(T) = \prod \Phi_m(T^{2^i})^{e_{m,i}}$ について, $P(T)$ は pure 2-なく, かつ $e_{1,i} = 0$ for $i > 0$ 2-あれば $P(T)$ は決して admissible 2-ない.

Examples. admissible polynomial の例は 11313 計算してみたが, 規則性が見つめな11. §4 の (1) (2) の他,

$$(3) \quad P(T) = \prod_{k=1}^n (T^{2k-1} - 1)^2 \quad \text{は admissible}$$

$$(4) \quad (T-1)^{88} \Phi_9(T) \quad \text{は admissible}$$

$$(5) \quad (\text{予想}) \quad l \text{ を奇数とするとき, } P(T) = (T-1)^{l^2} (T^l - 1)$$

は admissible 2-あろう.

(3) について §6 を見よ. (5) は 2-項分布が Gauss 分布に近づくという中心極限定理と e^{-x^2} の性質から予想する. ($l \leq 11$ のときはたしかめた.) その他にも予想はあるが数えつくしにはほど遠い.

§6. 問題 III ($G, (1^2)$) に対する反例

上の (3) の例は, はじめ計算によって証明したのだが, その意味を考えると $G = SL(2, K)$ に限らず, $\pi_1 \sim \pi_2$ かつ $\wedge^2 \pi_1 \sim \wedge^2 \pi_2$ となる表現 π_1, π_2 が存在する場合があることがわかった.

Theorem. G は群, $\pi \in G$ の有限次元表現とする.

$\pi_1 = \bigoplus_{i: \text{even}} \wedge^i \pi$, $\pi_2 = \bigoplus_{i: \text{odd}} \wedge^i \pi$ とおく. もし,
 π_1, π_2 とともに完全可約ならば $\wedge^2 \pi_1 \sim \wedge^2 \pi_2$. さらに $\exists g \in G$,
 $\pi(g)$ は固有値 $\underbrace{1}_1$ をもたないならば $\pi_1 \sim \pi_2$.

特に G が半単純で π が 0 weight をもたないならば, 上の如く
くつくつた π_1, π_2 に対し, $\pi_1 \sim \pi_2$ かつ $\wedge^2 \pi_1 \sim \wedge^2 \pi_2$.

$G = SL(2, K)$, $\pi = \pi^{(2n)} = 2n$ 次元の既約表現として上の
定理を適用すれば, $\{\pi_1, \pi_2\}$ に対応する admissible polynomial
が §5 の Ex.(3) である.

§7. 問題 III ($SL(2, K), (2, 1)$) について.

§3 の定理をそのまま用いると $\lambda = (2, 1)$ の場合 $G = SL(2, K)$
の表現の次元について $2 \times 3^{n-1}$ であるという条件(*)
が入る. しかし $SL(2, K)$ について §§4.5 のように詳しく
みてみると次元についての条件は要しないことが判る. その
際, やはり用分多項式の初等的な性質を用いる.

(註) T. Hirai : On Semisimple Lie Algebras over Algebraically Closed
Fields, Proc. Japan Acad. 60A 225-228 (1984)