

GL_n , SL_n , Sp_{2n} の極大輪環部分群の共役類の分類

尾道短大 刈山和俊

§ 1. 紹介

初めに記号を準備しよう。 K をある無限体とする。 K_S で K のある分離閉包を表し Γ で K_S/K のガロア群を表わす。 G を K 上定義された GL_n 、 SL_n または Sp_{2n} とする。 A を G の K 上分裂するある極大輪環部分群とし、 N を A の正規化群そして $W = N/A$ をそのワイル群とする。

G のある極大 K -輪環部分群 T に対し、 $T = gAg^{-1}$, $g \in G(K_S)$ となる、そこで Γ から $N(K_S)$ への 1-コサイクル $\sigma \rightarrow g^{-1}\sigma(g)$ が対応する。これが G の極大 K -輪環部分群の共役類の集合から $H^1(\Gamma, N(K_S))$ への単射を引き起こす。我々の場合は、J.-P. Serre [2] により、 $H^1(\Gamma, G(K_S)) = 0$ であるから次の補題が得られる。

補題 G の極大 K -輪環部分群の共役類の集合から $H^1(\Gamma, N(K_S))$ への全単射が存在する。

そこで $H^1(\Gamma, N(K_S))$ の構造を調べよう。

$$p_{\#} : H^1(\Gamma, N(K_S)) \rightarrow H^1(\Gamma, W)$$

で $N(K_S)$ から W への標準準同型より与えられる写像とする。すると次を証明することが出来る。

命題 1. $G = GL_n$ のとき、 $p_{\#}$ は全単射であり、 $G = SL_n$ 、 Sp_{2n} の

とき、 p_* は全射である。

そこでいずれにしても p_* は全射であるから、次が得られる。

$$H^1(\Gamma, N(K_S)) = \bigcup_{\alpha} p_*^{-1}(\alpha)$$

ここで右辺は α を $H^1(\Gamma, W)$ のすべてをわたらせたときの集合の直和である。したがって、 $H^1(\Gamma, W)$ と $p_*^{-1}(\alpha)$ の構造を調べればよい。まず $p_*^{-1}(\alpha)$ について、J.-P.Serre [1] より次が得られる。

$$(*) \quad p_*^{-1}(\alpha) = H^1(\Gamma, {}_{\alpha}A(K_S)) / H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$$

ここで ${}_{\alpha}A(K_S)$ 、 ${}_{\alpha}W$ は各々 $A(K_S)$ 、 W の 1-コサイクル α によるねじれ Γ -群を表す。また右辺の商は、再び J.-P.Serre [1] により、各 $w \in H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ に対して、 $H^1(\Gamma, {}_{\alpha}A(K_S))$ 上 $(a_{\sigma}) \mapsto (n_w^{-1} a_{\sigma} \nu_{\sigma} n_w \nu_{\sigma}^{-1})$ で与えられる作用による商である。ここで ν は Γ から $N(K_S)$ への 1-コサイクルであり $p_*(\nu) = \alpha$ となるものとし、 $n_w \in N(K)$ は w のある代表元とする。そこで各 G について $(*)$ における $H^1(\Gamma, {}_{\alpha}A(K_S))$ の構造を調べ、次に上の作用を具体的に計算することにより $p_*^{-1}(\alpha)$ の構造を知るであろう。

さてこれらの方針に従い次の結果が得られた。

§ 2. 分類

2. 1. GL_n ($n \geq 2$)

次の結果は土方教授に教示されたものである。

定理 1. GL_n の極大 K -輪環部分群の K -共役類は K 上階数 n の可換、半単純多元環の K -同型類と一対一対応である。

R を K -上階数 n の可換、半単純多元環とする。 ρ を R の K 上のある正則表現とすると、 $\rho(R) \cap GL_n(K)$ が GL_n のある極大 K -輪環部分群を定義する。これが、定理の一対一対応を与える。

§ 1 で述べたように $p_{\sharp} : H^1(\Gamma, N(K_S)) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, W)$ であるから、補題とこの定理 1 とにより次の結果が得られる。

命題 2. GL_n の極大 K -輪環部分群の K -共役類は $H^1(\Gamma, W)$ の元と一対一対応である。

2. 2. SL_n ($n \geq 2$)

A を GL_n の対角行列からなる極大 K -輪環部分群とし、 N を GL_n における A の正規化群、 $W = N/A$ をそのワイル群とする。また $A_1 = A \cap SL_n$ とし N_1 を SL_n における A_1 の正規化群、 $W = N/A = N_1/A_1 \xrightarrow{\sim} S_n$ (n 次対称群) とする。

GL_n のある極大 K -輪環部分群 T に対し、 $T_1 = T \cap SL_n$ は SL_n の極大 K -輪環部分群となる。これが GL_n と SL_n の極大 K -輪環部分群の集合間の全単射となる。これより $p_{\sharp}$ が全射となり、また § 1 と定理 1 により次の結果がえられる。

命題 3. SL_n に対し、 $H^1(\Gamma, W)$ の元は K 上階数 n の可換、半単純多元環の K -同型類と一対一対応である。

そして次を証明することができる。

命題 4. $T_1 = T \cap SL_n$ で T は定理 1 において K -多元環 $\sum_{i=1}^r L_i$ (直和) の正則表現より構成される GL_n のある極大 K -輪環部分群とせよ。 Γ から W への 1-コサイクル α を補題におけるような T_1 に対応するものとせよ。すると

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma, {}_{\alpha}A_1(K_S)) &\cong H^1(\Gamma, T_1(K_S)) \\ &\cong K^* / \prod_{i=1}^r N_{L_i/K}(L_i^*) \end{aligned}$$

となる。ここで $N_{L_i/K}$ は L_i から K のノルム写像。

そこで § 1 の方針に従って次の結果が得られる。

定理 2. 記号と仮定は命題 4 に従う。すると、

$$p_{\sharp}^{-1}(\alpha) \cong K^* / \left(\prod_{i=1}^r N_{L_i/K}(L_i^*) \cup \delta \prod_{i=1}^r N_{L_i/K}(L_i^*) \right)$$

ここで、もし $H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ の元でその符号が -1 となるものが存在すれば、 δ は -1 、さもなければそれは 1 となる。(W は S_n に同型であるから、符号とは置換のそのことである。)

2. 3. $Sp_{2n} \quad (n \geq 2)$

この節では K の標数は 2 でないとする。 e_n 、 0 を各々 n 次単位行列、 n 次零行列とする。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & e_n \\ -e_n & 0 \end{pmatrix} \in GL_n$$

とする。そこで、 Sp_{2n} を

$$Sp_{2n} = \{ x \in SL_n : {}^t x J x = J \}$$

により定義する。ここで ${}^t x$ は x の転置行列である。 GL_n から Sp_{2n} へのある埋め込み ι を

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & {}^t x^{-1} \end{pmatrix}$$

により定義する。さらに、今後、 D_n で GL_n の対角行列からなる極大 K -輪環部分群とし、 $A = \iota(D_n)$ 、 N を A の Sp_{2n} における正規化群、そして $W = N/A$ をそのワイル群とする。

Sp_{2n} において次の2種類の典型的な極大 K -輪環部分群が構成される。

(A) L を K 上の次数 n のある分離拡大とし、 ρ を L の K 上のある正則表現とせよ。すると、定理 1 により $\rho(L^*)$ が GL_n のある極大 K -輪環部分群を定義する。そこで、 $\iota(\rho(L^*))$ が Sp_{2n} のある極大 K -輪環部分群を定義する。この様に構成される Sp_{2n} の極大 K -輪環部分群を A_n 型と呼ぼう。

(C) 次の構成は H. Yoshida [3] に従う。 $F \supset E$ を各々次数 $2n$ 、 n の K 上の分離拡大とする。 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を E の K 上のある基底とし、 i_0 をこの基底により定義される E から K^n 上への K 上ベクトル空間としての同型とする。

S_0 を

$$\text{Tr}_{E/K}(xy) = {}^t i_0(x) S_0 i_0(y)$$

により定義される n 次対称行列とする。ここで、 $\text{Tr}_{E/K}$ は E から K へのトレース写

像である。 F/E は二次拡大であるから、 $\zeta^2 \in E$ として $F = E(\zeta)$ となる F の元 ζ が存在する。 ψ を F の E 上の基底 $\{1, \zeta\}$ に関する正則表現とし、 ϕ を上の基底に関する E の K 上の正則表現とする。さらに、 $a, b, c, d \in E$ に対して、

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(a) & \phi(b) \\ \phi(c) & \phi(d) \end{pmatrix}$$

とせよ。すると、 $\Phi \circ \phi$ は F の K 上の正則表現である。

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}$$

とすると、H. Yoshida [3] により

$$S_1 \Phi(\phi(F) \cap \text{SL}_2(E)) S_1^{-1} \subset \text{Sp}_{2n}(K)$$

となり、そしてこれが Sp_{2n} の極大 K -輪環部分群を定義する。この様に構成される

Sp_{2n} の極大 K -輪環部分群を C_n 型と呼ぼう。

さて、 Sp_{2n} の一般の極大 K -輪環部分群に関して、次が証明される。

命題 5. T を Sp_{2n} のある極大 K -輪環部分群とせよ。すると n のある分割

$$n = \sum_{i=1}^r \lambda_i + \sum_{i=1}^s \mu_i, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r, \quad \mu_1 \geq \dots \geq \mu_s \quad \text{に対して}$$

T は A_{λ_i} 型 ($1 \leq i \leq r$) と C_{μ_i} 型 ($1 \leq i \leq s$) の K -輪環群の直積に GL_n

において K -共役である。

実際、 T が $[L_i:K] = \lambda_i$ ($1 \leq i \leq r$)、 $[E_i:K] = \mu_i$ ($1 \leq i \leq s$) となる K 上の分離拡大 L_i 、 $F_i \supset E_i$ を与え、そしてこれらが (A)、(C) により

この命題の K -輪環群を与える。これらの直積が T に K -共役であることが示される。

ここで、可換、半単純 K -多元環の組 R_1, R_2 で、それらが各々直和

$$\sum_{i=1}^r L_i + \sum_{i=1}^s F_i, \quad \sum_{i=1}^s E_i$$

に K -同型となるものを考えよう。ここで、 $L_i, F_i \supset E_i$ は上の様な拡大体。

定義. $(R_1, R_2), (R'_1, R'_2)$ を上の様な可換、半単純 K -多元環の組とせよ。もし $f(R_2) = R'_2$ となる R_1 から R'_1 の上への K -同型 f が存在するならば、それらの組を“ K -同型”と呼ぼう。

すると、命題 1 で見たように $p_{\sharp} : H^1(\Gamma, N(K_S)) \rightarrow H^1(\Gamma, W)$ が全射であることから、次を得る。

命題 6. $H^1(\Gamma, W)$ の元は上の様な K -多元環の組の K -同型類と一対一対応である。

今しばらく各々次数 $2n, n$ の K 上の分離拡大 $F \supset E$ から構成される Sp_{2n} の C_n 型の極大 K -輪環部分群 T について考察しよう。

命題 7. 記号と仮定を上のとおりとする。 α を T に対応する Γ から W への 1-コサイクルとせよ (補題を見よ)。すると、

$$H^1(\Gamma, {}_{\alpha}A(K_S)) \cong E^{\sharp} / N_{F/E}(F^{\sharp})$$

1-コサイクル α を命題 6 の通りとせよ。 (A, Sp_{2n}) のワイル群 W は $(D_n,$

GL_n のワイル群 $W_n (= S_n)$ と $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ との半直積であることはよく知られている。そこで、 W の元 w に対して、 w_1 で W から W_n への射影による w の像

を表そう。このとき、 $H^0(\Gamma, W)$ の各元 w に対し、 $1, \dots, n$ の置換 ω を次で定義する。

$$(**) \quad w_1 \operatorname{diag}(a_{\omega(1)}, \dots, a_{\omega(n)}) = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$$

D_{2n} で GL_{2n} の対角行列からなる極大 K -輪環部分群を表す。 $D_{2n}(K_S)$ から

$D_n(K_S)$ への写像 Δ を次で定義する。

$$\Delta(\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n})) = \operatorname{diag}(a_1 a_{n+1}, \dots, a_n a_{2n}).$$

$\Gamma(E)$ を K_S/E のガロア群とし、 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i \Gamma(E)$ を Γ の $\Gamma(E)$ によ

るコセット分解とせよ。ここで、 σ_1 は単位元とする。すると、 $(E \otimes_K K_S)^*$ から $D_n(K_S)$ の上への同型 θ が次で定義される。

$$\theta\left(\sum_i v_i \otimes x_i\right) = \operatorname{diag}\left(\sum_i v_i \sigma_1(x_i), \dots, \sum_i v_i \sigma_n(x_i)\right).$$

ここで、 $(E \otimes_K K_S)^*$ で K -多元環 $E \otimes_K K_S$ の可逆元の乗法群を表す。

$H^0(\Gamma, {}_\alpha W)$ の各元 w に対し、その係数が $0, \pm 1$ からなる w の $N(K)$ におけるある代表元 n_w を取ることができる。また、 $D_{2n}(K)$ の元 a_w で $a_w n_w$ が $GL_{2n}(K)$ における置換行列（即ち、その係数が $0, 1$ からなる w を代表する行列）となるものとせよ。 ζ を (C) における F の元とすると、 $D_{2n}(K_S)$ のある元

$$d = \operatorname{diag}(-\sigma_1(\zeta), \dots, -\sigma_n(\zeta), 1, \dots, 1)$$

を定義する。そこで、 $H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ の各元 w に対して、 $(E \otimes_K K_S)^*$ の元 ξ_w を次で定義する。

$$(***) \quad \theta(\xi_w) = \Delta(d^{-1} n_w^{-1} d a_w n_w).$$

これらの準備のもと次を証明することができる。

命題 8. 記号を上のとせよ。 Γ から W への 1-コサイクル α を命題 7 の通りとすると、 $w \in H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ 、 $x \in E^*$ に対して、 $\sigma_{\omega(1)}(x)$ 、 $\xi_w \in E^*$ となり、そして $N_{E/K}(\xi_w) = \text{sgn}(w)$ となる。 $(W$ はワイル群 $W_{2n} = S_{2n}$ の部分群とみなせるから、ここで $\text{sgn}(w)$ で w を置換とみなしたときのその符号を表す。)

そこで、 $H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ の E^* 上のある作用を次で定義する。

$$wx = \sigma_{\omega(1)}(x) \xi_w, \quad w \in H^0(\Gamma, W), \quad x \in E^*.$$

すると、 $p_{\#}^{-1}(\alpha)$ とこの作用が引き起こす $E^* / N_{F/E}(F^*)$ 上の作用によるその商との間に全単射が存在する。

系. 記号と仮定は命題 8 の通りとせよ。さらに、 K をある局所体とし、 F/K をあるアーベル拡大とせよ。すると、もし $H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ のすべての元の sgn (符号) が 1、またはもし $-1 \in N_{F/K}(F^*)$ ならば、 $p_{\#}^{-1}(\alpha)$ の元の個数は 2 である。そうでなければ、それは 1 である。

これは局所類体論により示される。

最後に、一般の場合に対し、 $H^0(\Gamma, {}_{\alpha}W)$ の生成元を求めることにより (詳細は

略)、次を証明することができる。

定理 3. α を Γ から W へのある 1-コサイクルとし、 α に対応する Sp_{2n} のある極大 K -輪環部分群 (補題を見よ) が K -多元環の組

$$\sum_{i=1}^r L_i + \sum_{i=1}^s F_i, \quad \sum_{i=1}^s E_i$$

から構成される極大 K -輪環部分群に GL_n において K -共役とせよ (命題 5 を見よ)。

(F_{i_k}, E_{i_k}) 、 $k=1, \dots, m$ を組 (F_i, E_i) 、 $i=1, \dots, s$

の K -同型類 (定義を見よ) のある代表系とせよ。すると、 $p_*^{-1}(\alpha)$ と $F_{i_k} \cap$

E_{i_k} 、 $k=1, \dots, m$ に対して命題 8 における様に得られる商の直積との間に一

対一対応が存在する。

これらは、筆者が昨年、京都大学に滞在研修中に土方教授に未発表の結果を含め数々教示されたものを基に得られた結果である。ここに、土方教授に心からの感謝の意を表したいと思います。

参照

- [1] J.-P.Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Math., vol. 5
Berlin Heidelberg New York, Springer Verlag, 1973.
- [2] _____, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968.
- [3] H.Yoshida, Weil's representations of the symplectic groups over
finite fields, J.Math.Soc.Japan, vol. 31, no.2, (1979), 399-426