

半単純群の virtual character module と Weyl 群の表現

京大理 西山 亨

(Kyo Nishiyama)

§0 Introduction.

G を連結半単純リー群とする。 G の virtual character module 上の Weyl 群の表現は多くの人達によって考えられている。例えば Zuckerman [8] は有限次元表現とのテンサー積を利用して Weyl 群の表現を定義し, Barbasch-Vogan [1] は coherent continuation を用いて定義している。又, 複素半単純群の場合には Lusztig 達が Springer 表現を定義している ([9])。更に, virtual character そのものの代わりに, Goldie rank 多項式, 或いは指標多項式 (character polynomial) 上の Weyl 群の表現なども考えられている ([6], [7])。

このように多方面からの Weyl 群の表現へのアプローチがなされているが, “有限群の表現” という観点から見る限り, あまり実りは多くないように思われる。例えば [1] を見ていただければわかる様に, $G = U(p, 1)$ ($p \geq 2$) の場合では Weyl

群 G_{p+1} の表現は同値を除いて数個しか出てこない。しかし、
 一方では " G の既約指標の性質を調べる " という目的のため
 には、この virtual character module 上への Weyl 群の表現と
 いう手法はかなり威力を発揮するのではないかと思われる。

この論説では、integral Weyl group と定義して、その virtual
 character module 上への表現の構成、又それがどのような
 構造をもちかを決定することと主眼とする。 G の既約指標
 への応用については別の機会に述べてみたいと思っている。

§ 1 半単純群の指標

G を連結半単純リー群で中心有限なものとする。更にこの
 論説においては G は常に acceptable と仮定する。 G が accept-
 able とは、 G のリー環を $\mathfrak{g}$ 、その複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とし、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$
 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をリー環とする複素リー群 $G_{\mathbb{C}}$ が存在して次の二つの条
 件を満たす時と言う。(1) $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $G \rightarrow G_{\mathbb{C}}$: 群の準同型に
 標準的に持ち上げ得る。(2) $\mathfrak{f}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環、 f
 と $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{f}_{\mathbb{C}})$ の正ルートの和の半分とした時、 $\xi_f(\exp x) = \exp$
 $(\rho(x))$ ($x \in \mathfrak{f}_{\mathbb{C}}$) は $H_{\mathbb{C}}$ 上の character になる。以下この $G_{\mathbb{C}}$
 を固定して考えることにする。

このような群 G の virtual character module について知
 られている結果を [2, 3] に従ってここにまとめておく。

1.1 既約指標 π を G の quasi-simple な既約表現とする。
 π の指標 $\Theta(\pi)$ とは G 上の超函数であって次の如く定義されるものと言う。

$$\Theta(\pi)(f) = \text{Trace } \pi(f) \quad (f \in C_0(G))$$

但し, $\pi(f)$ は trace class の作用素で, 次の式で定義される。

$$\pi(f) = \int_G \pi(g) f(g) dg$$

$\Theta(\pi)$ は Laplacian の不変固有超函数にた, てあり, その固有値 λ を $\Theta(\pi)$ の無限小指標 (infinitesimal character) と呼ぶ。

$V(\lambda)$ を無限小指標が λ の既約指標全体が張る複素ベクトル空間とすると, $V(\lambda)$ を virtual character module, $V(\lambda)$ の元を virtual character と呼ぶ。

定理 1 (Harish-Chandra). G' を G の正則元 (regular element) 全体とする。 $\Theta \in V(\lambda)$ は G' 上正則で G 上局所可積分な函数と同一視できる。

この定理により我々は Θ を G 上の函数と扱うことにする。

1.2 不変固有超函数 H を G の Cartan 部分群, f をそのリ-環とする。更に $S(f_{\mathbb{C}})$ と $f_{\mathbb{C}} = f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の symmetric algebra, $I(f_{\mathbb{C}})$ と $S(f_{\mathbb{C}})$ の $W(f_{\mathbb{C}})$ -不変な元全体とする。このとき, H 上の函数族 $\mathcal{B}(H, \lambda)$ を次のように定義する。

$\beta(H; \lambda) = \{ \zeta \mid \zeta \text{ は } H \text{ 上の解析函数で (1), (2) を満たす} \}$

(1) ζ は $I(\mathfrak{g})$ の固有値 λ の固有函数。ここで $I(\mathfrak{g})$ の元を標準的に H 上の定係数微分作用素と思う。

(2) ζ は $W_G(H) = N_G(H)/Z_G(H)$ に関して ε -symmetric である。
 ε -symmetric とは次式が成立することと言う。

$$\zeta(wh) = \varepsilon(w, h) \zeta(h) \quad (h \in H, w \in W_G(H))$$

ここに $\varepsilon(w, h)$ は ± 1 の値にとるような $W_G(H) \times H$ 上のある定まりの函数である ([2, p.36])。

$\text{Car}(G)$ を G の Cartan 部分群の共役類の集合とし, H の共役類を $[H]$ と書くことにする。すると $\text{Car}(G)$ には極大 split Cartan 部分群の共役類が最小元になるような順序が入る ([3, p.274])。

定義 $\Theta \in V(\lambda)$ の height とは, $[H] \in \text{Car}(G)$ であって, $\Theta|_H \neq 0$ かつ $[H'] > [H]$ に対しては $\Theta|_{H'} \equiv 0$ となるようなものを言う。更に Θ が唯一の height を持つとき, Θ を extremal と呼ぶ。

定理 2 (Hirai). (1) 任意の $\zeta \in \beta(H; \lambda)$ に対して, λ を固有値に持つ不変固有超函数 $\mathbb{A}\zeta$ で次の性質を持つものが標準的に作れる。

(i) $\mathbb{A}\zeta$ は extremal でその height は $[H]$ である。

(ii) $(\mathbb{W})|_H$ は標準的に ζ と同一視できる ([3, p272])。

(2) 逆に任意の不変固有超函数 ψ が λ を固有値に持つものは、適当に $\zeta_i \in \mathcal{B}(H_i, \lambda)$ 達を選べば $\mathbb{W}\zeta_i$ 達の一次結合に書ける。

§2 Integral Weyl 群

この § 以後、無限小指標 λ は regular とし、 H は G の Cartan 部分群、 f をそのリー環とし、 $\lambda \in f^*$ と思うことにする。この § では、複素 Weyl 群 $W(f_c)$ のある部分群を定義し、 $V(\lambda)$ の構造を明らかにすることとを目的とする。

H_0 は H の単位元の連結成分とし、 $\tilde{W}_H(\lambda)$ を次の如く定義する。

$$\tilde{W}_H(\lambda) = \left\{ w \in W(f_c) \mid \exp w\lambda(x) \ (x \in f) \text{ が } H_0 \cap \text{ の } \right. \\ \left. \text{解析函数と定める。} \right\}$$

$L \in \exp: f \rightarrow H_0$ の kernel とすると、 $w \in \tilde{W}_H(\lambda) \Leftrightarrow \langle w\lambda, L \rangle \in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ かわかる。更に

$$L_\lambda = \sum_{w \in \tilde{W}_H(\lambda)} w^{-1}L, \quad W_H(\lambda) = \{ w \in W(f_c) \mid wL_\lambda = L_\lambda \}$$

とあり、 $W_H(\lambda)$ は (λ に関する) integral Weyl 群と呼ばれる。

H の連結成分の G -共役類を $\{H_i \mid 0 \leq i \leq l\}$ 、又 $W(H_i) = (W_G(H_i) = N_G(H_i)/Z_G(H_i))$ の $W(f_c)$ における像) とおくと次が成立する。

命題 3 (1) $\tilde{W}_H(\lambda)$ は右から $W_H(\lambda)$ -不変、左から $W(H_i)$ -

不変な $W(fc)$ の部分集合である。

(2) $W_H(\lambda)$ は $\tilde{W}_H(\lambda)$ と右から不変にするような $W(fc)$ の最大の部分群である。

命題 4 $\mathcal{B}(H; \lambda)$ は次のような基底 $\{\zeta_{i,t}\}$ を持つ； $0 \leq i \leq l$ ， $\{t\} = W(H_i) \setminus \tilde{W}_H(\lambda)$ に対して，

$$\zeta_{i,t}(w a_i \exp x) = \varepsilon(w, a_i) \sum_{s \in W(H_i)} \varepsilon(s, a_i) \exp t \lambda(sx)$$

ここに $w \in W_G(H)$ ， $x \in \mathfrak{g}$ ， $a_i \in H_i$ は H_i の極小元 (minimal element) ([3, p. 31]) である。又 $\zeta_{i,t}$ は H_i の $W_G(H)$ -軌道の外では 0 と定める。

定理 2 により， $V_H(\lambda) = \mathbb{T}(\mathcal{B}(H; \lambda))$ とおくと， λ が regular の時には $V(\lambda) = \sum_{[H] \in \text{Car}(G)}^{\oplus} V_H(\lambda)$ が成立している。そこで命題 4 によ， $V(\lambda)$ の基底が $\{\mathbb{T} \zeta_{i,t}\}$ の形で与えられることがわかる。

§3 Integral Weyl 群の表現

この § では $W_H(\lambda)$ の $V_H(\lambda)$ 上の表現を定義し， その構造を明らかにすることと目的とする。まず $W_H(\lambda)$ の $\mathcal{B}(H; \lambda)$ 上への表現 R を次のように定義する。

$$R u \zeta_{i,t} = \zeta_{i,t u^{-1}} \quad (u \in W_H(\lambda))$$

命題 3 により $\tilde{W}_H(\lambda)$ は右から $W_H(\lambda)$ で不変であつたから、
 $\zeta_{i, \mu-1}$ は well-defined である。

定義 5 $W_H(\lambda)$ の $V_H(\lambda)$ 上への表現 τ と

$$\tau_u(\mathbb{T}\zeta) = \mathbb{T}(R_u\zeta) \quad (\zeta \in \mathcal{B}(H; \lambda))$$

で定める。明らかに $\tau \simeq R$ (同値) である。

このようにして定義した τ は、Zuckerman の定義にした Weyl 群の表現の拡張となつてゐる。

定理 6 G を連結半単純リー群で中心有限とする。更に G は単連結複素リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の実形になつてゐると仮定する。この時 λ が $G_{\mathbb{C}}$ -integral ならば、

(1) $W_H(\lambda) = W(f_{\mathbb{C}})$ が全ての $[H] \in \text{Car}(G)$ について成立し、
 $W \simeq W(f_{\mathbb{C}})$ の $V(\lambda) = \sum^{\oplus} V_H(\lambda)$ 上への表現が定まる。これのことと書くことにする。

(2) (1) で定まる τ は Zuckerman の定義にした W の表現 ([8, p. 499]) と同値である。

さて、 $W_H(\lambda)$ の $V_H(\lambda)$ 上への表現 τ の構造を、と詳しく見てみよう。次の定理により τ は誘導表現の直和の形に分解でき

ることになる。

定理7 $\Gamma \subset \tilde{W}_H(\lambda)$ は $W(H_i) \backslash \tilde{W}_H(\lambda) / W_H(\lambda)$ の完全代表系,
 $W^r = W_H(\lambda) \cap r^{-1} W(H_i) r$ ($r \in \Gamma$), $\varepsilon^r(w) = \varepsilon(rwr^{-1}, a_i)$
 ($a_i \in H_i$, $r \in \Gamma$, $w \in W^r$) とおく。すると,

$$V_H(\lambda) \simeq \sum_{i=0}^l \oplus \sum_{r \in \Gamma} \oplus \text{Ind}_{W^r}^{W_H(\lambda)} \varepsilon^r$$

上の定理は λ の性質が良い場合には、と簡明な形にできる。
 $H_{\mathbb{C}}$ と $G_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分群といたす時、 λ が $H_{\mathbb{C}}$ の指標の
 微分であれば、 λ は $G_{\mathbb{C}}$ -integral と呼ぶ。

定理8 λ は $G_{\mathbb{C}}$ -integral, regular とする。

- (1) $W_H(\lambda) = W(f_{\mathbb{C}})$ が全ての $[H] \in \text{Car}(G)$ について成立し、
 $V(\lambda) = \sum \oplus V_H(\lambda)$ は $W \simeq W(f_{\mathbb{C}})$ -加群としての構造を持つ。
 (2) W の $V(\lambda)$ 上の表現は次のように分解される。

$$V(\lambda) \simeq \sum_{[H] \in \text{Car}(G)} \oplus \sum_{i=0}^l \oplus \text{Ind}_{W(H_i)}^W \varepsilon_i$$

ここには ε_i は $W(H_i)$ の指標で、 $\varepsilon_i(w) = \varepsilon(w, a_i)$ ($w \in W(H_i)$,
 $a_i \in H_i$) で与えられる。

この定理は Barbasch-Vogan 率の結果 ([1, Prop. 2.4]) の拡張に
 なっていることを注意しておく。

§4 $SO_0(2n, 1)$ ($n \geq 1$) における例

[11] では $U(p, 1)$, $SL(2, \mathbb{R})$ での例を挙げておいたもので、
ここでは $G = SO_0(2n, 1)$ の時に例を挙げておく (c.f. [4, 5])。

G の Cartan 部分群の共役類は 2 つあり、1 つはコンパクト
Cartan 部分群 H であって、もう一方は極大 split Cartan 部分群
 BA である。ここに、 H, B, A は

$$H = \{ \text{diag}(u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_n}, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ \text{diag}(u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_{n-1}}, 1, 1, 1) \mid \theta_i \in \mathbb{R} \}$$

$$A = \{ \text{diag}(1, \dots, 1, a_t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$u_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

で与えられる。 H, BA はどちらも連結な Cartan 部分群である。

補題 9 (1) $W_G(H) = \{ \theta_i \text{ 達の置換と, 偶数個の符号の付け替え} \} \simeq \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$

(2) $W_G(BA) = \{ \theta_i \text{ 達の置換と, } \theta_i, t \text{ 達の符号の付け替え} \} \simeq \mathfrak{S}_{n-1} \times (\mathbb{Z}_2)^n$

$\lambda \in \text{regular}$, integral は無限小指標とする。すると、
 $W_H(\lambda) \simeq W_{BA}(\lambda) \simeq \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^n$ であって、 $W = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^n$ の

$V_H(\lambda)$, $V_{BA}(\lambda)$ への表現は次のように与える。

$$(i) \quad V_H(\lambda) \simeq \text{Ind}_{G_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n}^W \varepsilon_0 \simeq (\det) \oplus (G\text{-sgn})$$

ここに $\det$ は W の determinant 表現, $G\text{-sgn}$ は

$$W \xrightarrow{\text{proj}} W/(\mathbb{Z}_2)^n \simeq G_n \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}$$

によって定まる 1 次元表現である。

$$(ii) \quad V_{BA}(\lambda) \simeq \text{Ind}_{G_{n-1} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n}^W \varepsilon_0 \quad : \text{既約 } W\text{-加群}$$

ここに ε_0 は $G_{n-1} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ の指標であって,

$$\psi : G_{n-1} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n \longrightarrow G_{n-1} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^{n-1}$$

と $\psi(\sigma(\mu_1, \dots, \mu_n)) = \sigma(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ で定めるとき, $\varepsilon_0(s) = \det \psi(s)$ ($s \in G_{n-1} \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$) で与えられる。

$V(\lambda) = V_H(\lambda) \oplus V_{BA}(\lambda)$ の基底として既約指標 ε とる。 $V(\lambda)$ に属する既約指標は全てわかっており, holomorphic discrete series D^+ , anti-holomorphic discrete series D^- , 有限次元表現 D^n , と残り $(n-1)$ 個の既約表現 D^j ($1 \leq j \leq n-1$) の指標がそうである (c.f. [5])。この時,

$$V_H(\lambda) = \langle \Theta(D^+) - \Theta(D^-), \Theta(D^n) \rangle \quad (\text{as vector space})$$

$$V_{BA}(\lambda) = \langle \Theta(D^i) + \Theta(D^{i+1}) \mid i=0, 1, \dots, n-1 \rangle$$

がわかる。但し $D^0 = D^+ \oplus D^-$ とおいた。更に,

$$\langle \Theta(D^+) - \Theta(D^-) \rangle \simeq (G\text{-sgn})$$

$$\langle \oplus(D^n) \rangle \simeq (\det)$$

が $V_H(\lambda)$ の既約部分空間への分解にほゞ、こゝる。

References.

- [1] D.Barbasch and D.Vogan, Weyl group representations and nilpotent orbits, in Representation theory of reductive groups, edited by C.Trombi, Birkhäuser, 1983.
- [2] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups II, General theory for semi-simple Lie groups, Japan. J. Math., New Series, 2(1976), 27-89.
- [3] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups III, Methods of construction for semisimple Lie groups, Japan. J. Math., New Series, 2(1976), 269-341.
- [4] T.Hirai, The characters of irreducible representations of the Lorentz group of n-th order, Proc. Japan Acad., 41(1965) 526-531.
- [5] T.Hirai, Relation between certain standard representations of $\mathfrak{g}$ and non-unitary principal series representations of G. Case of $G=SO_0(n-1,1)$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_0(n-1,1)$., RIMS kôkyûroku, 300 (1977), 54-70.
- [6] A.Joseph, Goldie rank in the enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra I,II, J. Algebra, 65(1980), 269-360.
- [7] D.R.King, The character polynomial of the annihilator of an irreducible Harish Chandra module, Amer. J. Math., 103(1981), 1195-1240.

- [8] A.W.Knapp and G.J.Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, *Ann. Math.*, 116(1982), 389-501.
- [9] F.Lusztig and D.Vogan, Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds, *Invent. Math.*, 71(1983), 265-379.
- [10] K.Nishiyama, Representation of Weyl group and its subgroups on the virtual character modules, *Proc. Japan Acad.*, 60 (1984), 193-196.
- [11] K.Nishiyama, Virtual character module of semisimple Lie groups and representations of Weyl groups, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*