

球函数の漸近挙動について

東大 理 大島 利雄 (Toshio Oshima)

§ 1. (半単純) 対称空間上の K -有限な固有函数 (= 標題の球函数のこと) φ に対し, それから作られるある函数の台 ($= \text{Sup } \varphi$) を定義し, φ の無限遠での漸近挙動が, $\text{Sup } \varphi$ という幾何学的量から本質的に決まってしまうことを述べる.

半単純リ-群自身を対称空間と考えたとき, $\text{Sup } \varphi$ は, 対応する Harish-Chandra Module を, G_0 の Flag manifold 上に $\mathcal{D}$ -Module を用いて構成したものの台に一致する. 従って, その台から φ の漸近挙動と, 対応する Harish-Chandra Module の主系列表現への埋め込みや, Langlands の classification との関連等が明白になる. (この場合の φ は, 表現の行列成分に対応している.)

一般の半単純対称空間の場合, たとえば離散系列表現を求めることは, 2乗可積分 φ を求めることに対応する. ここで述べる結果を適用すると [MaO] の証明が簡単化され, 特に

そこで行なった分類に基づく複雑な case by case の検証の部分は不要になる。

その他、一般に球函数の漸近挙動に関する問題に、ここでの結果が適用できる（有界な球函数の決定、 L^p -球函数の決定、tempered な表現の決定 etc.）。

§ 2 Notation

G : 連結実半単純リ-群 (center の有限性は不要)

σ : G の involutive automorphism

$$G^\sigma = \{g \in G ; \sigma(g) = g\}$$

H : G^σ の単位元の連結成分

$X = G/H$: これを半単純対称空間と呼ぶ。

θ : σ と可換な G の Cartan involution (σ と θ は、 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の involutions を定義し、それ等は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に複素線型に拡張される。これ等を、すべて σ, θ で表わす)。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \quad (\theta \text{ による Cartan 分解})$$

$$= \mathfrak{h} + \mathfrak{q} \quad (\sigma \text{ による固有値分解. } \mathfrak{h} \text{ は } H \text{ の Lie 環})$$

G^d : $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{h}_1(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{h}_1(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ という Lie 環を持つ単連結実半単純リ-群。

K : $\mathfrak{k}$ に対応する G の analytic subgroup

σ : $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace

$\mathfrak{j}$: σ を含む $\mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace

$l = \dim \sigma$: X の split rank と呼ばれる.

$l' = \dim \mathfrak{j}$: X の rank と呼ばれる.

A : σ に対応する G (or G^d) の analytic subgroup

H^d : $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{y} + \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$ に対応する G^d の analytic subgroup

K^d : $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{y} + \sqrt{-1}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{y})$ " " "

A_p^d : $\sigma + \sqrt{-1}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{j})$ " " "

$\Sigma(\sigma)$: 組 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ に対応する ルート系.

$\Sigma(\mathfrak{j})$: 組 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$ "

正のルートの全体 $\Sigma(\mathfrak{j})^+$, $\Sigma(\sigma)^+$ を compatible になるようにとる.

$P^d = M^d A_p^d N^d$: G^d の極小放物型部分群で, N^d が $\Sigma(\mathfrak{j})^+$ に対応する G^d の極大中零部分群, $M^d = Z_{K^d}(A_p^d)$ である.

$W(\sigma) = N_K(\sigma) / Z_K(\sigma)$: $\Sigma(\sigma)$ の Weyl 群.

$W(\mathfrak{j}) = N_{K^d}(A_p^d) / M^d$: $\Sigma(\mathfrak{j})$ "

$W(\sigma: H) = N_{K \cap H}(\sigma) / Z_{K \cap H}(\sigma)$: $W(\sigma)$ の部分群.

$X^I = G^d / K^d$: X の Riemannian form (of the non-compact type) と呼ぶ.

$\mathcal{D}(X)$: X 上の G -不変微分作用素の作る algebra.

$\mathcal{D}(X^I) : X^I$ " " "

$I(j)$: $j_{\mathbb{C}}$ の universal enveloping algebra の $W(j)$ -不変元全体
 のとき, Harish-Chandra homomorphism により

$$(2.1) \quad \bar{\gamma} : D(X) \simeq D(X^{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} I(j)$$

という algebra isomorphism が定義される. ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^d + j_{\mathbb{C}} + \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^d$
 という岩沢分解に基づく. $j_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^d$ に注意.) そこで, j の
 dual の複素化 $j_{\mathbb{C}}^*$ の元 λ に対して, $\chi_{\lambda} : D(X) \rightarrow \mathbb{C}$ が,
 $\chi_{\lambda}(D) = \lambda(\bar{\gamma}(D))$ により定義できる. このとき,

$$(2.2) \quad \chi_{\lambda} = \chi_{\lambda'} \Leftrightarrow \lambda' \in W(j)\lambda.$$

さて, 以下いくつかの $\mathfrak{g}$ -module を構成する:

$$C^{\infty}(X; \mathfrak{m}_{\lambda}) = \{f \in C^{\infty}(X); Df = \chi_{\lambda}(D)f, \forall D \in D(X)\},$$

$$C^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathfrak{m}_{\lambda}) = \{f \in C^{\infty}(X^{\mathbb{R}}); \quad \quad \quad, \forall D \in D(X^{\mathbb{R}})\}.$$

$\hat{K}$: K の既約有限次元表現の同値類の全体

$\hat{H}^d$: H^d “ “

$\hat{H}^d(K)$: リ-環の表現を通じて ($\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = j_{\mathbb{C}}^d$), $\eta: \hat{K} \hookrightarrow \hat{H}^d$

とみなしたときの η の像.

$\delta \in \hat{K}$ に対して,

$$C_{\delta}^{\infty}(X; \mathfrak{m}_{\lambda}) = \{f \in C^{\infty}(X; \mathfrak{m}_{\lambda}); K \text{ の元による作用が } \delta \text{ に従う}\}$$

$$C_{\eta(\delta)}^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathfrak{m}_{\lambda}) = \{f \in C^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathfrak{m}_{\lambda}); H^d \quad \quad \quad, \eta(\delta) \quad \quad \}$$

このとき, Flentstet-Jensen isomorphism

$$\eta: C_{\delta}^{\infty}(X; \mathcal{M}_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} C_{\eta(\delta)}^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathcal{M}_{\lambda})$$

が存在する (cf. [F-J], [S_c]). これは, $G = KAH$, $G^d = H^d A K^d$ という分解があるので, $f|_A = \eta(f)|_A$ となる様に定義される. さらに,

$$C_K^{\infty}(X; \mathcal{M}_{\lambda}) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{K}} C_{\delta}^{\infty}(X; \mathcal{M}_{\lambda}),$$

$$C_{H^d(K)}^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathcal{M}_{\lambda}) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{H^d(K)}} C_{\delta}^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathcal{M}_{\lambda})$$

とおく. $C_K^{\infty}(X; \mathcal{M}_{\lambda})$ の元を, ここでは球函数と呼んでいる. さて, 上記対応は, η -isomorphism

$$(2.3) \quad \eta: C_K^{\infty}(X; \mathcal{M}_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} C_{H^d(K)}^{\infty}(X^{\mathbb{R}}; \mathcal{M}_{\lambda})$$

を引き起こす. (2.2) があるので, 以下 λ を,

$$(2.4) \quad \operatorname{Re} \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Sigma(j)^+$$

となるよう固定しておく.

$$\rho \in j_{\mathbb{C}}^* \text{ を, } \rho(Y) = \frac{1}{2} \operatorname{trace}_{\mathbb{C}} \operatorname{ad}(Y)|_{\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^d} \quad (Y \in j_{\mathbb{C}})$$

により定義する.

$$B(G^d/P^d; L_{\lambda}) = \{ f \in B(G^d); f(gman) = a^{\lambda-\rho} f(g), \\ \forall g \in G^d, \forall m \in M^d, \forall a \in A_{\mathbb{P}}^d, \forall n \in N^d \},$$

$$B_{\delta}(G^d/P^d; L_{\lambda}) = \{ f \in B(G^d/P^d; L_{\lambda}); H^d \text{ の元による作用} \\ \text{が } \delta \text{ に従う} \} \quad (\delta \in \widehat{H^d(K)}),$$

$$B_{H^d(K)}(G^d/P^d; L_{\lambda}) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{H^d(K)}} B_{\delta}(G^d/P^d; L_{\lambda}).$$

そこで, $B(G^d)$ は, G^d 上の hyperfunctions の全体であるが,
 $B_{H^d(K)}(G^d/P^d; L_\lambda)$ の任意の元は distribution になることが示
 せる. さて, 境界値写像 β_λ により, η -isomorphism

$$(2.5) \quad \beta_\lambda : C_{H^d(K)}^\infty(X^r; m_\lambda) \xrightarrow{\sim} B_{H^d(K)}(G^d/P^d; L_\lambda)$$

が定義され, 逆写像は Poisson 変換で与えられる (cf. [K-],
 条件 (2.4) が重要). (2.3) と (2.5) より,

$$(2.6) \quad \beta_\lambda \circ \eta : C_K^\infty(X; m_\lambda) \xrightarrow{\sim} B_{H^d(K)}(G^d/P^d; L_\lambda)$$

という η -isomorphism が得られる.

定義 球函数 $\varphi \in C_K^\infty(X; m_\lambda)$ に対し,

$$\text{Sup } \varphi = \text{supp } \beta_\lambda \circ \eta(\varphi)$$

と置く. λ を明示するとき, $\text{Sup}_\lambda \varphi$ と書く.

注意 i) $\varphi \neq 0$ のとき, $\text{Sup } \varphi$ は, G^d/P^d の H^d -invariant
 closed set ($\neq \emptyset$) になる. それ等は有限種類しかない (cf.
 [M1], [M2]).

ii) $\varphi (\neq 0)$ で生成される (η, K) -module (= Harish-Chandra
 module) の任意の元 φ' に対し, $\text{Sup } \varphi' \subset \text{Sup } \varphi$. よって
 特に, それが既約ならば, $\varphi' \neq 0$ のとき $\text{Sup } \varphi' = \text{Sup } \varphi$.

iii) $G = G' \times G'$, $\sigma((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$ の場合, $X \simeq G'$ とみなせる. $\mathcal{Y}$ は, $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ の universal enveloping algebra の center の同時固有函数で, 両側 K' -finite な函数ということになる. このとき, $G^d \simeq G'_{\mathbb{C}}$, $P^d \simeq B'$ ($= G'_{\mathbb{C}}$ の Borel subgroup), $H^d \simeq K_{\mathbb{C}}$ となり, $\text{Sup } \mathcal{Y}$ は, $G'_{\mathbb{C}} / B'$ 上の $K'_{\mathbb{C}}$ -orbits の union になる. ある $K'_{\mathbb{C}}$ -orbit V と, B' の 1 次元表現に対応して G' の既約 Harish-Chandra module が構成されるが (cf. [V]), その matrix element を $\mathcal{Y}$ とおくと $\text{Sup } \mathcal{Y} = \overline{V}$.

§3 主定理

一般に, G^d / P^d の部分集合 S と, $w \in W(j)$ に対し, $w[S]$ という G^d / P^d の部分集合を次のように定義する:

$\Sigma(j)^+$ の simple root α に対し, $w_{\alpha} (\in W(j))$ を α に関する reflection とし, $P_{\alpha}^d = P^d w_{\alpha} P^d \cup P^d$ とおく. $P_{\alpha}^d = M_{\alpha}^d A_{\alpha}^d N_{\alpha}^d$ を, $A_{\alpha}^d \subset A_p^d$ となる Langlands 分解とする. $w = w_{\beta_k} \cdots w_{\beta_1}$ を, simple roots に関する reflections での minimal expression としたとき, $w[S] = S M_{\beta_1}^d \cdots M_{\beta_k}^d P^d$ と定義する (これは, minimal expression のとり方によらず定まる).

$w_1, \dots, w_I$ を, $W(\sigma: H) \setminus W(\sigma)$ の完全代表系とする.

$$(3.1) \quad I = [W(\sigma) : W(\sigma: H)].$$

たとえば, X が群自身の場合は, $r = 1$ である. $W(\sigma)$ は,
 $(N_{K^d}(A_P^d) \cap N_{K^d}(\sigma)) / (N_{K^d}(A_P^d) \cap Z_{K^d}(\sigma))$ と, $W(\sigma: H)$ は
 $N_{K^d \cap H^d}(A_P^d) / (N_{K^d \cap H^d}(A_P^d) \cap Z_{K^d \cap H^d}(\sigma))$ と自然に同型にな
 るので, 各 w_i の代表元 $\overline{w}_i$ を, $N_{K^d}(A_P^d) \cap N_{K^d}(\sigma)$ の中
 とることが出来る. 以下, このようにとったとする. (cf. [OS])

さて, $U_i = H^d \overline{w}_i P^d$ ($i=1, \dots, r$) とおくと, これ等は
 互に果なり, G^d/P^d の open H^d -orbits はすべてこの形に
 なることが, [M1] からわかる.

$$\tilde{W}^i(S) = \{w \in W(j); w[S] \cap U_i \neq \emptyset\},$$

$$W^i(S) = \{w \in \tilde{W}^i(S); v \in W(j), v < w \Rightarrow v \notin \tilde{W}^i(S)\}$$

とおく. 但し, $v < w$ は, Bruhat order による大小関係.

- $w^* \Sigma(j)^+ = \Sigma(j)^+$ を満たす元 $w^* \in W(j)$ に対して, $S \neq \emptyset$
 ならば, $w^*[S] = G^d$ が成立するので, $W^i(S) \neq \emptyset$ とな
 ることに注意しておく.

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ を $\Sigma(\sigma)^+$ の fundamental system とし, それの
 dual basis を $\{H_1, \dots, H_\ell\}$ とする (i.e. $\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}$).

$t = (t_1, \dots, t_\ell) \in (0, \infty)^\ell$ に対して,

$$(3.2) \quad Q(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\ell} (\log t_i) H_i\right) \in A$$

とおく.

定理 1. まず, 簡単の為,

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} \langle \lambda, \alpha \rangle > 0, \quad \forall \alpha \in \Sigma(j)^+$$

の場合を述べる。このとき, 零でない $\varphi \in C_K^\infty(X; \mathcal{M}_\lambda)$ に対し,

$$\Lambda(\lambda, U_i, \varphi) = \{(\rho - w\lambda)(H_1), \dots, (\rho - w\lambda)(H_\ell)\} \in \mathbb{C}^\ell; w \in W^i(\operatorname{Sup} \varphi)\}$$

とおくと, 各 $\mu \in \Lambda(\lambda, U_i, \varphi)$ に対し, 零でない G 上の実解析函数 $a_\mu(g)$ が存在して, $(0, \infty)^\ell \ni t \rightarrow 0$ のとき

$$(3.4) \quad \varphi(g \bar{w}_i a(t) \bar{w}_i^{-1} H) = \sum_{\mu \in \Lambda(\lambda, U_i, \varphi)} a_\mu(g) t^\mu + o\left(\sum_{\mu \in \Lambda(\lambda, U_i, \varphi)} |t^\mu|\right)$$

が成立する。ここで, 評価は, $g \in G$ に対して広義一様。

$t^\mu = t_1^{\mu_1} \cdots t_\ell^{\mu_\ell}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$ と置いた。

G の放物型部分群 P_σ を, その Langlands 分解 $P_\sigma = M_\sigma A_\sigma N_\sigma$ により定義する。但し, $M_\sigma A_\sigma = Z_G(\sigma)$ で, N_σ は $\bar{Z}(\sigma)^+$ に対応する中零群。 $(M_\sigma \cap \bar{w}_i^{-1} H \bar{w}_i)$ -fixed vector を持つ M_σ の有限次元表現 δ と, $\nu \in \sigma_c^*$ に対して, P_σ の既約表現 $\xi_{\delta, \nu}$ を, $\xi_{\delta, \nu}(man) = a^{\rho - \nu} \xi_\delta(m)$ ($m \in M_\sigma, a \in A_\sigma, n \in N_\sigma$) により定義する。但し, ξ_δ は, δ に対応する M_σ の既約表現。この $\xi_{\delta, \nu}$ による G/P_σ 上の associate bundle の K -finite sections の全体を $V_{\delta, \nu}$ と置き, これを G/H の $(\mathfrak{g}, K)$ -module としての) 主系列表現の空間という (cf. [O1])

定理 2 零でない $\varphi \in C_K^\infty(X; \mathcal{M}_\lambda)$ に対して, φ で生成される (g, K) -module を V_φ とおく. 任意の $w \in W^i(\text{Sup } \varphi)$ に対して, 上記の δ と ν で,

$$(3.5) \quad \begin{cases} \delta \text{ の lowest weight} = (\rho - w\lambda)|_{\mathbb{K} \cap \mathfrak{j}} \\ \nu = w\lambda|_{\sigma} \end{cases}$$

となるものと, (g, K) -homomorphism

$$\iota_{\delta, \nu} : V_\varphi \rightarrow V_{\delta, \nu}$$

で, $\iota_{\delta, \nu}(\varphi) \neq 0$ を満たすものが少くとも 1 つ存在する.

((3.3) の仮定は不要).

特に, X が群自身で, V_φ が既約と仮定する. このとき, V_φ が $V_{\delta, \nu}$ に埋め込めるなら, 逆に (3.5) を満たす $w \in \widetilde{W}^i(\text{Sup } \varphi)$ が存在する.

§ 4 一般の場合の定理 1.

$\Sigma(j)^+$ の fundamental system $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{\ell'}\}$ に対し, その dual basis を $\{\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{\ell'}\}$ とおく ($\tilde{H}_j \in j_{\mathbb{C}}$). $\mu \in j_{\mathbb{C}}^*$ に対し, $y^\mu = y_1^{\mu(\tilde{H}_1)} \dots y_{\ell'}^{\mu(\tilde{H}_{\ell'})}$ とおく. ここで, $y = (y_1, \dots, y_{\ell'})$ である. さらに, $\alpha \in j_{\mathbb{C}}^*$ に対し, $\frac{d}{d\alpha} y^\mu = \left(\frac{d}{d\alpha} y^{\mu + \alpha t} \right) \Big|_{t=0}$ とおき, $\Sigma(j)$ の部分集合 F に対して,

$$(4.1) \quad F(y) = \left(\left(\prod_{\alpha \in F} \frac{d}{d\alpha} \right) y^\mu \right) \Big|_{\mu=0}$$

と定義する。さて, (2.4) を満たす $\lambda \in j_{\mathbb{C}}^*$ を考え,

$$W_{\lambda} = \{w \in W(j); w\lambda = \lambda\},$$

$$\bar{Z}_{\lambda}^+ = \{\alpha \in Z(j)^+; \langle \alpha, \lambda \rangle = 0, \frac{\alpha}{2} \notin Z(j)\},$$

$$F_{w,\lambda} = Z(j)^+ \cap w \bar{Z}_{\lambda}^+ \quad (w \in W(j))$$

とおく。さらに, $(0, \infty)^{l'}$ 上の函数を,

$$\phi_{w,\lambda}(y) = F_{w,\lambda}(y) \cdot y^{\rho - w\lambda}$$

によって定義する。

④ を, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}\}$ の真部分集合とする。番号をとりかえて

④ = $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{\ell}\}$ として一般性を失わない。 $t' = (t_1, \dots, t_k)$,

$\sigma_{\textcircled{H}} = \{Y \in \sigma; \alpha(Y) = 0, \forall \alpha \in \textcircled{H}\}$ とおき,

$$F_{w,\lambda}^{\textcircled{H}} = \{\alpha \in F_{w,\lambda}; \alpha|_{\sigma_{\textcircled{H}}} \neq 0\}$$

とする。さらに, $(0, \infty)^k$ 上の函数を

$$\phi_{w,\lambda}^{\textcircled{H}}(t') = F_{w,\lambda}^{\textcircled{H}}(y) \cdot y^{\rho - w\lambda}$$

$$\begin{cases} y_j = t_j & \text{if } \tilde{\alpha}_j|_{\sigma} = \alpha_j \text{ with } 1 \leq j \leq k \\ y_j = 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定義する。また,

$$a(t') = \exp(-\sum_{j=1}^k (\log t_j) H_j) \in \exp \sigma_{\textcircled{H}}$$

とおく。次の事実に注意:

$$(4.2) \quad w < w' \Rightarrow \phi_{w',\lambda}^{\textcircled{H}}(t') = O(|\phi_{w,\lambda}^{\textcircled{H}}(t')|) \quad ((0, \infty)^k \ni t' \rightarrow 0)$$

定理 1 零でない $\varphi \in C_K^\infty(X; \mathcal{M}_\lambda)$ と, $i \in \{1, \dots, l\}$ に対し, $\{\phi_{w, \lambda}^\oplus(t'); w \in W^i(\text{Sup } \varphi)\}$ の, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な元からなる極大部分集合の 1 つを $\tilde{\Psi}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)$ とおき, 同様に, $\{\phi_{w, \lambda}^\oplus(t'); w \in \tilde{W}^i(\text{Sup } \varphi)\}$ の, $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な元からなる極大部分集合で, $\tilde{\Psi}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)$ を含むものの 1 つを, $\tilde{\tilde{\Psi}}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)$ とおく. 任意の $\phi \in \tilde{\tilde{\Psi}}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)$ に対して, G 上の実解析函数 $Q_\phi(g)$ が存在し, G 上広義一様に

$$\varphi(g \bar{w}_i a(t') \bar{w}_i^{-1} H) = \sum_{\phi \in \tilde{\tilde{\Psi}}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)} Q_\phi(g) \cdot \phi(t') + o\left(\sum_{\phi \in \tilde{\tilde{\Psi}}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)} |\phi(t')|\right)$$

という評価が, $(0, \infty)^k \ni t' \rightarrow 0$ のとき成立する. しかも, $\phi \in \tilde{\tilde{\Psi}}(\lambda, \oplus, U_i, \varphi)$ ならば, $Q_\phi \neq 0$ である.

§ 5 証明について.

$\Sigma(j)^+$ の simple root α を 1 つ fix して考える. $\mu \in j_{\mathbb{C}}^*$ に対して,

$$\mathcal{T}_{w_\alpha}^\mu : \mathcal{B}(G^d/P^d; L_\mu) \rightarrow \mathcal{B}(G^d/P^d; L_{w_\alpha \mu})$$

という intertwining operator は,

$$(5.1) \quad w_\alpha \mu - \mu = C_\mu \alpha$$

と書いたとき, $\text{Re } C_\mu > 0$ ならば

$$(\mathcal{T}_{w_\alpha}^\mu \varphi)(g) = \int_{N^d \cap \bar{w}_\alpha N^d \bar{w}_\alpha^{-1}} \varphi(g n \bar{w}_\alpha) dn \quad (\varphi \in C^\infty(G^d/P^d; L_\mu))$$

から定義され (dn は不変測度), $\forall \mu \in j_{\mathbb{C}}^*$ には meromorphic に解析接続して定義される。その pole の位置も知られている (cf. [He]). G^d/P^d の閉集合 V に対し

$$B(V; L_\mu) = \varinjlim_{\substack{U \supset V \\ \text{open}}} B(U; L_\mu)$$

とおくと, 任意の $x \in G^d$ に対して,

$$\mathcal{I}_{w_\alpha}^\mu : B(w_\alpha[xP^d]; L_\mu) \rightarrow B(xP^d; L_{w_\alpha\mu})$$

が, generic な $\mu \in j_{\mathbb{C}}^*$ の場合, 定義でき, $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ -homomorphism を与える。 $K^d \hookrightarrow G^d$ という写像によって,

$$\iota_V^\mu : B(V; L_\mu) \cong B((V \cap K^d)/(V \cap M^d))$$

という同一視を行なう。

命題 $B_x(w_\alpha[xP^d]; L_\mu) = \{\psi \in B(w_\alpha[xP^d]; L_\mu); \text{supp } \psi \neq x\}$

とおき, $\psi \in B_x(w_\alpha[xP^d]; L_\mu)$ に対し, 次の函数 $\tilde{\psi}_t$ を考える:

$$\tilde{\psi}_t = \mathcal{I}_{w_\alpha}^\mu \circ (\iota_V^{\mu+\rho t})^{-1} \circ \iota_V^\mu(\psi) \quad (t \in \mathbb{C}, 0 < |t| \ll 1).$$

i) $\tilde{\psi}_t$ は, x の近傍で, $t = 0$ まで解析接続できる。

ii) 解析接続した $\tilde{\psi}_t$ の $t = 0$ での値を, $\mathcal{I}_{w_\alpha}^\mu(\psi)$ とおく。

このとき, $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ -homomorphism (local intertwining operator と呼ぼう)

$$\mathcal{I}_{w_\alpha}^\mu : B_x(w_\alpha[xP^d]; L_\mu) \rightarrow B(xP^d; L_{w_\alpha\mu})$$

は, (5.1) の C_μ が $\text{Re } C_\mu \leq 0$ を満たすなら, 単射となる。

定理 1 の証明は、前命題が本質的であり、[02] を用いた [Ma0] の §3 の議論にはほぼ等しい。前命題で "injective" となることも、[Ma0] の (3.41) を使う議論で示される。

定理 2 は、定理 1 と [03] (cf. [02]) から容易に従う。

定理 1 における展開の a_μ (又は、 a_ϕ) は、命題における "local" intertwining operator $\mathcal{I}_{\tilde{w}_\mu}^\mu$ と、(2.6) の同型写像 $\beta_\lambda \circ \eta$ を用いて表わすことができる。

§ 6 最後に

- G^d/H^d の H^d -invariant な閉集合 V に対し、

$$\mathcal{B}_{H^d(K)}[V; L_\lambda] = \{f \in \mathcal{B}_{H^d(K)}(G^d/P^d; L_\lambda) ; \text{supp } f = V\}$$

とおく。定理 1 と (2.6) を見ると、この (g, K) -module が消えない λ の条件と、その構造を求めることが重要になる。

- H -fixed vector をもつ G の有限次既約表現の highest weight を $\Lambda \in j_e^*$ とおくと、

$$\mathcal{B}_{H^d(K)}[V; L_\lambda] \neq \phi \Rightarrow \mathcal{B}_{H^d(K)}[V; L_{\lambda+\Lambda}] \neq \phi$$

- $\varphi \in C_K^\infty(X; \mathcal{M}_\lambda)$ が、既約 g -module を生成するときでも、 $\text{Sup } \varphi$ が、 G^d/P^d 上の 1 つの H^d -orbit の閉包になっているとは限らない ($\lambda > 1$ の場合)。これは、ある series の表現の既約性が破れる λ に対応している。ただし、 $\text{Sup } \varphi$ の複素化は、唯一つの K_e -orbit になっているであろう (λ が + 分 regular なら正しい)。

References

- [F-J] Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. 111(1980), 253-311.
- [He] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math. 5(1970), 1-154.
- [K-] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, Ann. of Math. 107(1978), 1-39.
- [M1] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan 31(1979), 331-357.
- [M2] ———, Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, preprint, 1984.
- [MaO] T. Matsuki and T. Oshima, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 331-390.
- [O1] T. Oshima, Fourier analysis on semisimple symmetric spaces, Non-Commutative Harmonic Analysis. Proceedings, 1980, Lect. Note in Math. 880(1981), 357-369, Springer.
- [O2] ———, Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 391-432.
- [O3] ———, A realization of semisimple symmetric spaces, to appear.
- [OS] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root systems of a semisimple symmetric pair, to appear in Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 434-497.
- [Sc] H. Schlichtkrull, Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [V] D. Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups III. Proof of Kazhdan-Lustig conjecture in the integral case, Invent. Math. 71(1983), 381-417.