

Einstein—Maxwell 方程式と解の変換群

広大理 岡本 清郷 (Kiyosato Okamoto)

広大理 沢江 隆一 (Ryuich Sawae)

広大理 土井 英雄 (Doi Hideo)

広大理 馬島 正 (Tadashi Majima)

§0 入門

一般相対性理論とは、物理法則（または理論）は、かくあるべきであるという理論で、この意味では相対論は、メタ理論である。つまり、一般相対性原理と局所的に Minkowski 空間であるということで、数学的に言えば、物理空間は、4次元 Lorentz 多様体であり、物理法則は共変な方程式で、表現されなければならないということである。しかしこの要請だけから法則を、ひきだすことは不可能である。人は物理空間にひそむ「物理的自然」なるものを通して、法則を定式化してゆくのである。メタファースとしての物理量に対する、属性、法則それ自体の簡明さ、真善美を要求する。このよう

なことから, 1915年 Einsteinは今日 Einstein方程式と呼ばれるものを発表した。(重力場の幾何学化) 重力場と電磁場の連立方程式として, 次は標準的なものである。

$$(0,1) \left\{ \begin{array}{l} R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij} \quad (c = G = 1) \\ F^i{}_{j;j} = 4\pi J^i \\ \text{ただし} \\ 4\pi T_{ij} := -F_{ik} F_j{}^k + \frac{1}{4} g_{ij} F_{kl} F^{kl} \\ F_{ij} := \partial_i A_j - \partial_j A_i \end{array} \right.$$

1916年, Schwarzschild は, 質点のつくる重力場の, 球対称な厳密解(シュバルツシルト解)を発表した。しかし, その後 Einstein 方程式の解の研究には, ほとんど進展はなかった。その理由は, 重力定数 G が非常に小さいため, 太陽のような質量をもってすら, 実験で検証できる効果は, 微々たるものであったからである。

ところが, 四半世紀ほど前, 天文学の分野で強重力場の対象が発見され, Einstein 方程式の厳密解が活発に研究された。回転している物体がつくる重力場を表わす解—Kerr解 Tomimatsu—Sato 解などが, その結果導出された。これらの解は, 真空定常軸対称 Einstein—Maxwell 方程式と呼

ばれているクラスの中で、家族を形成している。

定常軸対称とは、計量が

$$(0,2) \quad ds^2 = h_{pq}(x^3, x^4) dx^p dx^q \\ - e^{2\gamma(x^3, x^4)} ((dx^3)^2 + (dx^4)^2)$$

で与えられることである。

添字に関する規則として、 p, q, r, s は 1, 2, a, b, c, d は 3, 4, その他は、1, 2, 3, 4 を動くものとする。

Einstein-Maxwell 方程式を、 $h = (h_{pq})$ と γ についての方程式にするため、いくつかの準備的な計算をする。

(0,3) Ricci テンソル

$$R_{ij} := \partial_i \Gamma_{jl}^l - \partial_j \Gamma_{il}^l + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^l$$

$$R_{ap} = 0$$

$$R_{pq} = (2\rho)^{-1} e^{-2\gamma} h_{pr} \partial_a (\rho h^{rs} \partial_a h_{sq})$$

$$R_{ab} = -\delta_{ab} \Delta \gamma - \partial_a \partial_b (\log \rho) + (\rho)^{-1} \cdot \\ (\partial_a \gamma \partial_b \rho + \partial_a \rho \partial_b \gamma - \delta_{ab} \partial_c \gamma \partial_c \rho) \\ + 1/4 \cdot (\partial_a h^{rs} \partial_b h_{rs})$$

(0.4) Energy-momentum テンソル

$$T_{ij} = (-F_{il} F_j{}^l + \frac{1}{4} g_{ij} F_{lm} F^{lm}) / 4\pi$$

$$T_{ap} = 0$$

$$4\pi T_{pq} = e^{-2r} \cdot \{ \partial_a A_p \partial_a A_q - \frac{1}{2} h_{pq} (\partial_a A_r \cdot h^{rs} \partial_a A_s) \}$$

$$4\pi T_{ab} = -\partial_a A_p h^{pq} \partial_b A_q + \frac{1}{2} \delta_{ab} (\partial_c A_p \cdot h^{pq} \partial_c A_q)$$

(0.5) Faraday テンソルの共変微分

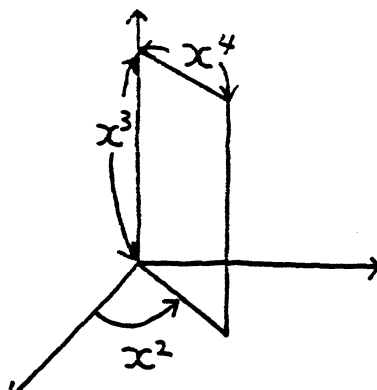
$$F^{il}{}_{;j} = 1/\sqrt{-g} \partial_j (\sqrt{-g} F^{il})$$

$$F^{ia}{}_{;j} = \rho^{-1} e^{-2r} \partial_b \{ \rho e^{-2r} (\partial_a A_b - \partial_b A_a) \}$$

$$F^{ip}{}_{;j} = \rho^{-1} e^{-2r} \partial_b (\rho h^{pq} \partial_b A_q)$$

ただし $\rho := \sqrt{-\det h}$

ここで x^1 は時間を,
 (x^2, x^3, x^4) は円柱座標
 (右図) を念頭において
 いる。



すると、 (x^2, x^3, x^4) をデカルト座標で書いた時の計量 g_{ij} の解析性により、次のことがわかる。

$$(i) \quad h = h(x^3, (x^4)^2)$$

$$(ii) \quad h_{12}(x^3, 0) = 0$$

$$(iii) \quad \rho = \sqrt{-\det h} \text{ は、定数でなく、} \rho(x^3, 0) = 0 \text{ である。}$$

(iii) により、 $\rho + iz$ が $x^3 + ix^4$ の正則関数であり、 $x^4 = 0$ のとき、 $z = 0$ になるように、 z を定めることができる。この ρ, z で、座標をとりなおせば、等角変換であるから、定常軸対称の計量の形を保存することがわかり、初めから、 $x^3 = z, x^4 = \rho$ として、さしつかえない。

物理的状況としては、考えている領域に、4元電流はなく、 z -軸にそって、無限長に電流は流れてないものとし、電磁ポテンシャル A_i についても、 ρ, z だけの関数と仮定する。すると、(0,5) の第1式を使って、 $F_{ab} = 0$ となり、ゲージ変換で、 $A_3 = A_4 = 0$ と固定する。残ったゲージの自由度は、 A_1, A_2 に対して、加法的定数だけである。

従って、定常軸対称 Einstein-Maxwell 方程式は、次のようにかける。

$$(0.6) \quad \begin{cases} d(\rho^{-1} h \epsilon * dA) = 0 \\ d(\rho^{-1} h \epsilon * dA - 2\rho^{-1} h \epsilon * dA {}^t A \\ \quad + 2\rho^{-1} A * d {}^t A \epsilon h) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ただし, } \det h = -\rho^2, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad h_{11} > 0, \quad *dz = d\rho, \quad *d\rho = -dz$$

γ に関する、微分方程式は、次の3つの方程式系となる。

$$(0.7) \quad \partial_{\bar{z}} \gamma = -\rho/4 \operatorname{Tr}(\partial_{\rho} h^{-1} \partial_{\bar{z}} h)$$

$$- 2\rho \partial_{\rho} {}^t A h^{-1} \partial_{\bar{z}} A$$

$$\partial_{\rho} \gamma = -(2\rho)^{-1} + \rho/8 \operatorname{Tr}(\partial_{\bar{z}} h^{-1} \partial_{\bar{z}} h$$

$$- \partial_{\rho} h^{-1} \partial_{\rho} h) + \rho \partial_{\bar{z}} {}^t A h^{-1} \partial_{\bar{z}} A$$

$$- \rho \partial_{\rho} {}^t A h^{-1} \partial_{\rho} A$$

$$\Delta \gamma = 1/2 \rho^2 + 1/8 \operatorname{Tr}(\partial_{\bar{z}} h^{-1} \partial_{\bar{z}} h$$

$$+ \partial_{\rho} h^{-1} \partial_{\rho} h)$$

γ については, (0.6) の解 (h, A) に対して, 可積分性が成り立つ. 筆者の 1 人によって, このことは, 手計算で調べられたが, マイコンを使った数式処理言語によっても, 確認された。

解の変換については, 初期の頃より, 定常軸対称 Einstein 方程式の本質部分である, Ernst 方程式

$$(\varepsilon + \bar{\varepsilon})/2 \cdot \nabla^2 \varepsilon = \nabla \varepsilon \cdot \nabla \varepsilon$$

ただし

$$\varepsilon := h_{11} + i\psi, \quad d\psi := \rho^{-1} h_{11}^2 * d(h_{12}/h_{11})$$

は, ある種の内部対称性を含んでいることが, 気づかれていた。例えば, Ehlers 変換

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon' = \varepsilon / (1 - i\lambda \varepsilon), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

によって, 解は再び解になる。そして, 1971 年 Geroch は, このような対称性に基づく変換によって, ある種の解より, 全ての解が得られるであろうと予想した。その後, この方向への進歩は, まず, Kinnersley と Chitre によって, 真空 ($T_{ij} = 0$) の場合, 1978 年には電磁場を含んだ場合, なされた。つまり, 彼らは定常軸対称な時空のみならず, 非線形偏微分方程式の解空間へ作用している, 無限小変換と, その表現について解答を与えた。そして自分達の開発した手法

により、無限小変換を積分することで、真空TS解を含む整数 δ で、特徴づけられ、 $2\delta+1$ コのパラメーターを含む「完全TS解」なるものを、導出することに成功した。彼らの方向によって、Cosgroveらはさらに広汎にT-S解の一般化など、多くの厳密解について研究した。これら一連の、Kinnersley & Chitreの仕事に触発され逆散乱法やBäcklund変換といった、ソリトンの変換理論との関連がMaison, Zakharov, Harrisonらによって、注意された。

Geroch予想へのアプローチは、I. Hauser と F. J. Ernst によってなされた。彼らは、Kinnersley と Chitre の方法を改良し、ほとんどすべての真空定常軸対称な時空は、Minkowski空間から線形積分方程式（斉次ヒルベルト問題）を解くことにより得られる（原理的に）、ことを示した。

筆者らは、変換群を位相群として把握しその幾何学的構造と方程式の変換に対する不変性を活用して定常軸対称な時空のモジュライの空間を構成した。§1では、基礎とする位相群の一般論について考察する。§2, §3では、ある種の方程式とその解のポテンシャルの変換論を展開する。§4では方程式を特殊化して Einstein-Maxwell方程式と連結させる。

§1 解析的関道群

複素多様体 U, M に対し U から M への正則写像全体を、 $\mathcal{O}(U, M)$ と表す。 $\mathbb{C}$ の元 λ に対し $|\lambda|$ は通常 of 絶対値とする。 $R > 0$ に対し $S_R = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = R\}$ とおく。

(1,1) $A_R^M := \{\mathcal{O}(U, M); \mathbb{C} \supset U \supset S_R\}$ の直極限

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元線形空間 $|\cdot|$ を V 上のノルムとする。 V 係数の Laurent 級数 $f = \sum f_n \lambda^n$ に対し $\|f\|_R = \sum \|f_n\| R^n$ とおく。この小論では

(1,2) A_R^V の位相は ノルム $\|\cdot\|_R$ によって与えられるものを使う。

注意: $B = \{v \in V; \|v\| < 1\}$, W $\mathbb{C}$ 上の有限次元線形空間, F を B から W への正則写像とする。このとき $\{f \in A_R^V; \|f\|_R < 1\}$ から A_R^W への写像 $f \mapsto F \circ f$ は連続である。

G を複素 Lie 群 $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。指数写像 $\exp \mathfrak{g} \rightarrow G$ によって 自然に誘導される $A_R^{\mathfrak{g}} \rightarrow A_R^G$ も $\exp$ で表す。

A_R^G は G の積を用いることにより 抽象群になる。さらに上の注意により $\exp: A_R^G \longrightarrow A_R^G$ が $0 \in A_R^G$ のまわりで 局所同相になるように A_R^G の位相構造を定めることができる。 A_R^G はこの仕方により位相群と考える。

補題 $G \longrightarrow A_R^G$ は複素 Lie 群のカテゴリーから 位相群のカテゴリーへの関手で 閉部分群を保つ。

$M(N, A_R^{\mathbb{C}})$ を $A_R^{\mathbb{C}}$ 係数の $N \times N$ 行列全体とする。 $GL(N, A_R^{\mathbb{C}})$ で $M(N, A_R^{\mathbb{C}})$ の可逆元全体とすると、行列の積と $M(N, A_R^{\mathbb{C}})$ からの相対位相により 位相群になっている。

$GL = GL(N, \mathbb{C})$ とおくと、位相群として

$$A_R^{GL} = GL(N, A_R^{\mathbb{C}}).$$

以下 G を $\mathbb{C}$ 上の線形代数群とする。 $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $S_R^+ = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$, $S_R^- = \mathcal{C}(\mathbb{P}^1 \setminus S_R^+)$ とおく $\mathbb{P}^1$ の開集合 U で $U \supset S_R^-$ に対し

$$N(U, G) = \{g \in \mathcal{O}(U, G); g(\infty) = 1\} \text{ とおく}$$

(1,3) $N_R^G := \{N(U, G); U \supset S_R^-\}$ の直極限

$P_R^G := \{O(V, G) ; V \supset S_R^+\}$ の直極限

とすれば N_R^G, P_R^G は A_R^G の閉集合になっている。

定理 G を線形代数群とするとき、 $N_R^G \times P_R^G \longrightarrow A_R^G$
積写像は 開埋め込みである。

注意 χ を G の有理指標, $g, g' \in A_R^G, Y, Y' \in N_R^G$,
 $gY = g'Y' \in A_R^G / P_R^G$, $\chi(g) = \chi(g')$ とすると
 $\chi(Y) = \chi(Y')$ である。

上の定理は §3 の枠組にとって基本的である。直ちに。
応用できる形で述べておく。

V を S_R の近傍, U を実解析的多様体 $F(\Delta, x)$ を $V \times U$
から G への (Δ, x) に関する解析写像とすると, $x \longmapsto F(\Delta, x)$
は、連続である。さらに, $F(\Delta, x) \in N_R^G P_R^G$ とし, $F_N(\Delta, x)$
 $\in N_R^G$, $F_P(\Delta, x) \in P_R^G$, $F(\Delta, x) = F_P(\Delta, x)$ とおけば
 $x \longmapsto F_N(\Delta, x), F_P(\Delta, x)$ は、実解析的である。

§2 Hauser & Ernst 方程式

$p > 0, r \geq 0$ 整数, $N := 2p + r$, Hermite 行列
 $j := \begin{pmatrix} & i1_p \\ -i1_p & \end{pmatrix} \quad i^2 = -1$ とする。複素行列 X に対

し $X^* := X$ の転置行列の複素共役。微分1形式

$\eta = adx + bdy$ に対し $*\eta = ady - bdx$ とおく。

2変数の $N \times N$ 複素行列値関数 $Z = Z(x, y)$ を

$\begin{pmatrix} Z_I & Z_{II} \\ Z_{III} & Z_{IV} \end{pmatrix}$ と分けし, $W := \begin{pmatrix} Z_I & Z_{II} \end{pmatrix}$,

$w = jx + Z_I j + j Z_I^* - Z_{II} \cdot Z_{II}^*$ とおく。

$$(2,1) \quad y * dW = w j dW$$

$$d[Z_{III}, Z_{IV}] = - Z_I^* j dW$$

この方程式は $p = r = 1$ のときには Einstein—Maxwell 方程式の真空定常軸対称解に対し Hauser と Ernst が導入したポテンシャルを決定する。また(2,1)は, $Z(x, y)$ が解ならば $Z(x, -y)$ も解になるという, 軸対称性をもっている。

Z に対し、さらに次を仮定する。

$$(2,2) \quad Z(x,0) = \left(\begin{array}{c|c|c} -x & u & v \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} p \\ p \\ r \end{array}, \quad \partial_y W(x,0) = 0$$

$p \quad p \quad r$

$$\det(-iu + iu^* - vv^*) \neq 0$$

このゲージは Hauser と Ernst により 見い出されたもので、 $(2,1)$ 、 $(2,2)$ を満たす実解析的な Z は、 $Z(x,0)$ により決定される。すなわち

補題 $\mathcal{S} := (2,1), (2,2)$ を満たす、実解析的な Z の $(x,y) = (0,0)$ における芽。

$\mathcal{M}' := p \times (p+r)$ 行列値 1 変数実解析関数 $[u,v]$ で $\det(-iu + iu^* - vv^*) \neq 0$ であるものの $x=0$ における芽。

とするとき、 $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}'$; $Z \longmapsto Z(x,0)$ は単射である。 $(2,2)$ の条件式を HE ゲージ と呼ぶ。

§ 3 変換理論

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad n = 2p + r, \quad GL := GL(n, \mathbb{C})$$

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}^2$ の開集合 U に対し,

$$\mathcal{O}(U, GL) = \{ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \text{ のある開集合から, } GL \text{ への正則写像の制限になっているもの} \}$$

$$\mathcal{GL}_R := \{ \mathcal{O}(U, GL) ; U \supset S_R \times 0 \} \text{ の直極限}$$

$$\mathcal{N}(U, GL) = \{ Y \text{ in } \mathcal{O}(U, GL) ; Y(\infty, x, y) = 1 \}$$

$$\mathcal{N}_R := \{ \mathcal{N}(U, GL) ; U \supset S_R \times 0 \} \text{ の直極限}$$

$$\mathcal{P}_R := \{ \mathcal{O}(U, GL) ; U \supset S_R^+ \times 0 \} \text{ の直極限}$$

$$\Delta_1 = \left[\begin{array}{c|c} \Delta_1 p & 0 \\ \hline 0 & 1_q \end{array} \right], \quad J_\Delta = \left[\begin{array}{ccc} 0 & i 1_p & 0 \\ -i 1_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-1} 1_r \end{array} \right]$$

$$J = J_\Delta = 1$$

$g \text{ in } A_R^{GL}$ に対し $g^\dagger := g(\bar{\Delta})^*$, $\bar{\Delta} \cdots \Delta$ の複素共役とし

$$\mathcal{G}_R := \{ g \text{ in } A_R^{GL} ; g^\dagger J g = J \} \text{ とおく}$$

$$Y \text{ in } \mathcal{N}_R \text{ に対し } dY := \partial_x Y dx + \partial_y Y dy,$$

$$\Omega = Y^{-1} dY, \quad Y_\perp := (\partial / \partial \Delta^{-1}) Y |_{\Delta = \infty} \text{ とおく}$$

$$z_\pm := x \pm iy \text{ とし}$$

$$(3, 1) \quad \Omega \pm i * \Omega = \{ \omega_\pm / (\Delta - z_\pm), \omega_\pm \text{ は}.$$

Δ に依らない 微分1形式, という形 } になっていれば,

$$(3,2) \quad s^2 \Omega = (\Delta - x - y*) dY_1$$

$$s^2 = (\Delta - x)^2 + y^2 \text{ となる.}$$

また (3,3) $Y^* J_\Delta Y$, $Y^* J_\Delta dY$ が Δ^{-1} の
1次式であれば, Y_1 は (2,1) の解になっている。
このとき Y_1 が HE ゲージにあれば, “ Y は HE
ゲージにある ” ということにする。

(3,1), (3,3) を満たし, y について, 偶関数である
 $\mathcal{N}_R$ の元を potential と呼ぶ。

補題 Y, Y' in $\mathcal{N}_R$

(i) g in A_R^{GL} , $gY = Y'$ in $\mathcal{G}_R / P_R$,
 Y は (3,1) を満たすならば, Y' も (3,1) を満たす。

(ii) g in $\mathcal{G}_R$, $g\Delta Y = \Delta Y'$ in $\mathcal{G}_R / P_R$,
 Y は (3,3) を満たすならば, Y' も (3,3) を満たす。
特に Y が potential なら, Y' も potential

$$\mathcal{C}_R := \{ Y \text{ in } \mathcal{N}_R ; \text{ HE ゲージにあるポテンシャルで} \\ Y(x) = Y(\Lambda, x, 0) \text{ は, } \Lambda^{-1} \text{ の 1 次式} \}$$

GL の部分群を 次で定義する。

$$M := \left[\begin{array}{c|c} 1_p & * \\ \hline 0 & 1_q \end{array} \right] \text{ という形の元全体}$$

$$P := \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array} \right] \text{ という形の元全体}$$

$e_1, \dots, e_N$ を $\mathbb{C}^N$ の標準的な基底とし, J を $\mathbb{C}^N$ 上の Hermite 形式とみなす。

$V_0 = e_{p+1}, \dots, e_N$ で張られる部分空間

$$M \approx MP/P \hookrightarrow \{ \mathbb{C}^N \text{ の } q \text{ 次元部分空間} \}$$

$$m_P \mapsto m \cdot V_0$$

$\mathcal{M} := \{ MP/P \text{ 値 1 変数実解析関数 } \varphi(x) \text{ の } x=0 \\ \text{における芽で, } \varphi(0) \text{ に対応する } \mathbb{C}^N \text{ の部分空間} \\ \text{上で, } J \text{ が非退化になっているもの} \}$

$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ を $Z \longmapsto 1_N + Z(x, 0)$ と定義すれば
単射である。また, $\mathcal{C} = \{ \mathcal{C}_R ; R > 0 \}$ の直極限 とおき
 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ を $Y \longmapsto \Lambda_1 Y(x) \text{ } MP/P \text{ 値関数,}$
 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ を $Y \longmapsto (\partial/\partial \Lambda^{-1}) Y|_{\Lambda=\infty}$ とする。

注意 $\Delta_1 Y(x)$ は MP/P 値関数と見ているので、 Δ には依らないものになっている。

補題 $\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$

は、可換であり、 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ は単射。

命題 $Y, Y' \in \mathcal{C}_R, g \in \mathcal{G}_R$ とすると
 $g \Delta_1 Y = \Delta_1 Y' \in \mathcal{G}_R/P_R$ と
 $g(x) \Delta_1 Y(x) = \Delta_1 Y'(x) \in \mathcal{M}$ は同値である。

定理 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ は、全単射である。

系 $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}$ は、全単射である。

証明の方針

上の補題により、 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ が 全射であることを、
 check することになる。

step 1

$\mathcal{H}_R := \{ g \in \mathcal{G}_R \text{ で } P \text{ の転置に値をとる} \}$ とおく

$Y \in \mathcal{C}_R, g \in \mathcal{H}_R$ とすると、ある $Y' \in \mathcal{C}_R$ が存在

して, $g \Delta_1 Y = \Delta_1 Y'$ in $\mathcal{GL}_R / P_R$ を満たす。

$$g = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & c \end{array} \right], \Delta_1 Y(x) = \left[\begin{array}{c|c} (1-x/\Delta) 1_p & B \\ \hline 0 & 1_g \end{array} \right] x$$

おく, A_R^{GL} / P_R^{GL} において.

$$E = (aB + b)C^{-1}, D = (1 - x/\Delta)^{-1} E / \Delta$$

$$D = \sum D_n \Delta^n, E = \sum E_n \Delta^n$$

$$D_- = \sum D_n \Delta^n ; n < 0$$

D_n, E_n は x だけの関数とおく

$$\begin{aligned} \Delta_1^{-1} g \Delta_1 Y(x) &= \left[\begin{array}{c|c} (1-x/\Delta) 1_p & E/\Delta \\ \hline 0 & 1_g \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (1-x/\Delta) 1_p & (E_0 + D_0)/\Delta \\ \hline 0 & 1_g \end{array} \right] \end{aligned}$$

$(x, y) \mapsto \Delta_1 g Y$ は A_R^{GL} 値連続関数であり,

$y=0$ においては, $\Delta_1 N_R^{GL} P_R^{GL}$ に値をとる. したがって

$\Delta_1 g Y$ in $\Delta_1 \mathcal{N}_R P_R$ であり, Y' in $\mathcal{N}_R$ で

$\Delta_1 g Y = \Delta_1 Y'$ in $\mathcal{GL}_R / P_R$ であるものを, と

れば, Y' は 補題によりポテンシャルであり, すでに見たように, HE ゲージにある。

step 2.

C $p \times p$ 行列 (定数) $c = -iC + iC^*$ とおく。

$\det c \neq 0$ とする。 $S := \Delta((1-x/\Delta)^2 + y^2/\Delta^2)^{1/2}$

$y=0$ では $S = \Delta - x$ とする。

$$Y_c := \begin{bmatrix} (x-\Delta)iC c^{-1}/\Delta + (1+iC c^{-1})S/\Delta, & C/\Delta, & 0 \\ (x-\Delta)i c^{-1} + i c^{-1} S, & 1_p, & 0 \\ 0, & 0, & 1_r \end{bmatrix}$$

とおけば, 任意の $R > 0$ に対し, $Y_c \in \mathcal{C}_R$ であり,

$$\Delta_1 Y(x) = \begin{bmatrix} \Delta - x & C & 0 \\ 0 & 1_p & 0 \\ 0 & 0 & 1_r \end{bmatrix} \text{ である。}$$

step 3.

$\varphi(x) \in \mathcal{M}$ に対し, $g \in \mathcal{H}_R$, step 2 のような C で, $g(x) \Delta_1 Y_c(x) = \varphi(x) \in \mathcal{M}$ となるものをもとる。
 $Y' \in \mathcal{C}_R$ で $g \Delta_1 Y_c = \Delta_1 Y' \in \mathcal{G}_R / \mathcal{P}_R$ であるものが存在するから (step 1) したがって定理が, 証明された。

証明の系. $\mathcal{C}$ の元は, $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_R; R > 0\}$ の直極限の元を Y_c 達に 作用させることによって 得られる。

§4 定常軸対称解の生成

(4.1) $h = h(x, y)$ 2×2 実対称行列値関数で

$\det h = -y^2$ であるもの, $A = A(x, y)$ 2×1 実行列値関数とする, $\# = y^{-1}h \in *$ とおく.

(4.2) $h, A, \#dh, \#dA$ は $(x, y) = (0, 0)$ の近傍で実解析的であることを, 仮定する. さらに $y=0$ において,

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(0, 0) \neq 0 \text{ であるとする.}$$

このとき, 定常軸対称 Einstein-Maxwell 方程式は, 次の形に, 簡約された.

$$(4.3) \quad d(\#dA) = 0,$$

$$d(\#dh - 2\#dA^T A - 2A^T(\#dA)) = 0$$

$dB = \#dA$ である実解析関数 B をとり, $\phi = A + iB$ とおくと, $i\#d\phi = d\phi$, これより, $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ とおけば,

$$\phi_2(x, 0) = \text{定数}$$

(4, 4) $\mathcal{S} := (h, \phi)$; h, A は (4.1), (4.2),
 (4.3) を満たし, $i \# d\phi = \phi$ かつ
 $\phi(x, 0) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるものの $(x, y) = (0, 0)$
 における「芽」とする。

(4, 5) $\mathcal{S} \cdots \mathcal{S}_3$ における $\mathcal{S}$ を, $p = r = 1$ に特殊化
 したもの

定理 (i) Σ in $\mathcal{S}$ に対し,

$$h := -(Z_1 j + j Z_1^* + j x - Z_{11} Z_{11}^*)$$

$$\phi := Z_{11} \text{ とおくと, } (h, \phi) \text{ は } \mathcal{S} \text{ の元である.}$$

(ii) この写像 $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ は全射であり, Σ in $\mathcal{S}$
 を含むファイバーは,

$$\Sigma + \mathbb{R} E_{12}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ となる.}$$

(i) の証明

$\mathcal{S}_3$ の記号は, 自由に用いる. Υ in $\mathcal{S}$ で $\Upsilon \longrightarrow \Sigma$

であるものをとると, Y_c という形の元を h の元で変換して, 得られるから, $\det Y = \det Y_c = S/\Delta$, したがって $\text{tr} Z = \partial/\partial \Delta^{-1}(S/\Delta)|_{\Delta=\infty} = -x$,

$$Y^\dagger J_\Delta Y = \Delta^{-1} \text{ の 1 次式}$$

$$= \begin{bmatrix} j + (jz_I + z_I^* j)/\Delta, & jz_{II}/\Delta \\ z_{II}^* j/\Delta, & 1/\Delta \end{bmatrix}$$

$$\text{より } -s^2 = -(\Delta - x)^2 - y^2$$

$$= \det(\Delta j + z_I j + j z_I^* - z_{II} z_{II}^*), \text{ ゆえ.}$$

$$\det h = -y^2$$

Z が HE ゲージにあることより, $2 \text{Re} z_{II} = -z_{II}^* j z_{II}$ であり, これと, $\text{Tr} Z = -x$ を合わせると, h が実行列値であることが, 容易にわかる。また h が $(4, 2)$ であることは, HE ゲージより直ちにわかる。

(ii) の証明

$$d\psi = \#dh - 2\#dA^\dagger A - 2A^\dagger(\#dA) \text{ である } \psi \text{ をとり}$$

$$d(\psi - {}^t\psi) = 2dx \in \text{に注目し, } \psi - {}^t\psi = 2x \in \text{を,}$$

$$\text{要請しておく。また } d(\phi^* \in d\phi) = 0 \text{ となっているので,}$$

$$dk = \phi^* \in d\phi \text{ となる } k \text{ をとり}$$

$$d(k - k^*) = d(\phi^* \in \phi) \text{ より, } k - k^* = \phi^* \in \phi$$

としておく。

$$H := h + \operatorname{Re}(K\epsilon - \phi\phi^*) + i(\psi + 2A^t B) \quad \text{とおくと,}$$

$$dH = (1+i\#)dh - 2(1+i\#)dA^t A - 2(1+i\#)dB^t B = i\# dH$$

また $d(\phi^*\epsilon dH) = 0$, これにより $dL = \phi^*\epsilon dH$ である

$$L \text{ を導入する。 } Z_I = -Hj/2, \quad Z_{II} = \phi, \quad Z_{III} = iLj/2, \quad Z_{IV} = -iK, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_I & Z_{II} \\ Z_{III} & Z_{IV} \end{bmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$(2.1) \text{ を満たし } w = Z_I j + j Z_I^* + jx - Z_{II} Z_{II}^* = -h$$

となっている。さらに K, ψ に残っている任意性を

治かして, Z が HE ゲージにあるようにできる。

またこのとき ファイバー の形も決定できる。

系 $\mathcal{S}$ の元はすべて, Minkowski 空間のポテンシャルを $\mathcal{H}$ の元で変換することによって得られる。

[参考文献]

F. J. Ernst , Phys. Rev. 167 (1968), 1115

R. Geroch , J. Math. Phys. 12 (1971), 918

R. P. Kerr , Phys. Rev. Lett. 11 (1963), 237

A. Tomimatsu and H. Sato

Phys. Rev. Lett, 29 (1972), 1388

Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 95

W. Kinnersley and D. Chitre

J. Math. Phys. 18 (1977), 1538

ibid . 19 (1978), 1926

I. Hausen and F. J. Ernst

J. Math. Phys. 21 (1980), 1126

ibid . 22 (1981), 1051

C. M. Cosgrove , J. Math. Phys. 21 (1980), 2917

ランダウ=リフシッツ 理論物理学教程

場の古典論 (第6刷)

東京図書

数理科学 3月号 (1983)

特集 フラックホールとリリトン

サイエンス社