

$SU(1,1)$ 上の Paley-Wiener 型定理と Campoli の条件

広島大総合科 江口正晃

1. G を中心有限, 非コンパクト連結半単純リー群とする. G 及びその等質空間である対称リーマン空間 G/K 上の P-W 型定理については, $SU(1,1)$ の場合の Ehrenpreis-Mautner [6] に始まり, その後多くの人達によって研究がなされてきている. 中でも G/K の場合は Gangolli [7], Helgason [8] によって美しい形に完成されたが, G/K の場合と異って G 自身の上の Fourier 変換には一般に離散系列の表現がかかわってくるために理論が複雑となる. その後連続系列と離散系列との間の関係とあいまいな型 (いわゆる Campoli の条件の仮定を置いた) で残したまま理論の一般化がなされてきた. この流れは Johnson [9,10] に始まり Campoli [2] によって定式化され, その方針の下での河添 [11] の結果などがあるが, 最近 Arthur [1] によってこの方向での最も一般的な形の結果が得られた. しかしこの Arthur の結果を聞いた多くの人達に感じる様に, 筆者にも現在までこの理論は "半分" しか出来ていない

と思われ、そこでもう一度 Ehrenpreis-Mautner [] の仕事や上に述べた流れの源流となった Johnson [9] を見直し、 $SU(1,1)$ の場合の P-W 定理をすっきりした形に書き改める必要性を感じ、私の稚拙な考えをこの symposium で報告させて頂くことにした。

以下に述べることの多くは良く知られていると思われるが、話の準備として必要な事柄を列挙した。 $SU(1,1)$ の表現論に関する基礎的なことはすべて杉浦先生 [14] や岡本先生 [13] の名著を御覧頂きたい。その他のことについては各節のはじめに参考文献の番号を記しておいた。

2. 連続系列の表現 ([13], [14])

$G = KAN$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$) を G (G のリ-環 $\mathfrak{g}$) の岩沢分解とする。 $M \in K$ における A の中心化群、 $\hat{M}$ を M の既約ユニタリ表現の同値類とする。 $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$, $(s, \mathcal{H}_s) \in \hat{M}$ に対して

$$\nabla_{s, \nu}(man) = e^{\nu(\log a)} s(m)$$

は $P=MAN$ の既約表現を与える。

$$\mathcal{H}^{s, \nu} = \left\{ \begin{array}{l} f: G \rightarrow \mathcal{H}_s : \text{可測} \text{ かつ } \|f\|^2 = \int_K \|f(k)\|^2 dk < \infty \text{ かつ} \\ f(gp) = \nabla_{s, \nu}(p)^{-1} f(g) \quad g \in G, p \in P \end{array} \right\}$$

$$(\pi_{s, \nu}(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in \mathcal{H}^{s, \nu}$$

によって定まる $(\pi_{s, \nu}, \mathcal{H}^{s, \nu})$ は連続系列の表現と呼ばれ $\text{Re } \nu =$

$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} m(\alpha) \alpha$ の時ユニタリ表現となることが知られている。

以下 $G = SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$ と考える。

$$K = \{ k_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi \}$$

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \exp tH ; t \in \mathbb{R} \right\}, H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$N = \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1+ix & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 2$ で定まる $\alpha \in \alpha_c^*$ に対し $\rho = \frac{1}{2} \alpha$ (従って $\rho(H) = 1$) ,

$\nu \in \alpha_c^*$ は $\nu = \nu_1 \rho$ ($\nu_1 \in \mathbb{C}$) で定まる ν_1 と同一視する

$$M = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}, M' = N_K(A) = M \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = M'/M = \{ M, \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} M \}$$

$$\hat{M} = \{ \zeta_0, \zeta_1 \}, \text{ 但し } \zeta_0 \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 1, \quad \zeta_1 \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -1$$

K 上の関数 φ_n ($n \in \mathbb{Z}$) を $\varphi_n(k_\theta) = e^{in\theta}$ で与えられるものとする。簡単のため $\pi_{\zeta_j, \nu} = \pi_{j, \nu}$, $\mathcal{H}^{\zeta_j, \nu} = \mathcal{H}^{j, \nu}$ と書く。

LEMMA 1. $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in G$, $k_\theta \in K$ に対して $g k_\theta =$
 $k_{\varphi(g, \theta)} a_{t(g, \theta)} n_{x(g, \theta)}$ とするとき

$$e^{i\varphi(g, \theta)} = (\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}) / |\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}|$$

$$e^{t(g, \theta)} = |\alpha e^{i2\theta} + \beta| = |\bar{\alpha} + \bar{\beta} e^{i2\theta}|.$$

この LEMMA 1 を用いて計算すると次の式が得られる.

$$\begin{aligned}\pi_{j, \nu}(H) \varphi_n(k_\theta) &= \frac{d}{dt} \varphi_n(\exp -tH \cdot k_\theta) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}(\nu+n) \varphi_{n+2}(k_\theta) + \frac{1}{2}(\nu-n) \varphi_{n-2}(k_\theta).\end{aligned}\tag{1}$$

3. Intertwining Operator. ([15], [9])

一般の G の場合に、主系列表現の間に次のような intertwining operator が与えられている. $s \in W$, $s^* \in M'$, $s^*m = s$ とする.

$\zeta \in \hat{M}$, $\nu \in \sigma_c^*$ に対して

$$(A(\zeta, \nu, s)f)(k) = \int_{\bar{N}_s} f(k s^* \bar{n}_s) d\bar{n}_s, \quad f \in \mathcal{H}^{\zeta, \nu}.$$

ここで $\bar{N}_s$ は次で与えられる $\bar{n}_s$ に対応する $\bar{N}$ の解析部分群である. $\Sigma \subseteq (\vartheta, \sigma)$ の reduced roots の全体の集合 $\langle s \rangle = \{ \lambda \in \Sigma, -s\lambda \in \Sigma \}$ とおき, $\lambda \in \Sigma$ に対して $\bar{n}_\lambda = \vartheta_{-\lambda} + \vartheta_{-2\lambda}$ とかく. このとき

$$\bar{n}_s = \sum_{\lambda \in \langle s \rangle} \bar{n}_\lambda = (\text{Ad}(s^*)^{-1} \bar{n} \cap \bar{n}).$$

注意 1. $s = 1$ ならば $A(\zeta, \nu, 1) = 1$ (恒等写像).

2. 積分は $\int_{\bar{N}_s} |e^{-\nu(H(\bar{n}_s))}| d\bar{n}_s < \infty$ となるところで一様収束して次式が成り立つ.

$$A(\zeta, \nu, s) \pi_{\zeta, \nu}(x) f = \pi_{\zeta^s, s(\nu-\rho)+\rho}(x) A(\zeta, \nu, s) f, \quad f \in \mathcal{H}^{\zeta, \nu}.$$

ここで, ζ^s は $\zeta^s(m) = \zeta(s^{-1} m s^*)$ で定まる $\hat{M}$ の元を表す.

$G = SU(1, 1)$ の場合 $s = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} M$, $s^* = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$ とする.

$\zeta \in \hat{M}$ に対して我々の場合 $\zeta^s = \zeta$. $A(\zeta_j, \nu, s) = A(j, \nu)$

と表わすことにする. $\mathcal{H}^j = \{f|_K; f \in \mathcal{H}^{j, \nu}\}$ とおくと各 $\mathcal{H}^j$ は $L^2(K)$ の閉部分空間をなし $\{\varphi_n\}_{n:\text{even}}$ 及び $\{\varphi_n\}_{n:\text{odd}}$ はそれぞれ $\mathcal{H}^0$ 及び $\mathcal{H}^1$ の完全正規直交基底をなしている. $j \equiv n \pmod{2}$ であるとき $\mathcal{H}_n^j \in \varphi_n$ で張られる 1 次元部分空間とすると $\pi_{j, \nu}|_K$ は $\mathcal{H}_n^j$ 上既約に働くから次式が成り立つ様な定数 $C_n^j(\nu)$ が存在する.

$$A(j, \nu) \varphi_n = C_n^j(\nu) \varphi_n. \quad (2)$$

(1), (2) を用いると C_n^j についての漸化式が得られ結局次のように表せることを知る:

$$C_{2n}^0(\nu) = \frac{(\nu - 2|n|) \cdot (\nu - 2(|n| - 1))}{(-\nu - 2(|n| - 1))(-\nu - 2(|n| - 2))} \cdots \frac{(\nu - 2)}{(-\nu)} C_0^0(\nu) \quad (3)$$

$$C_{2n+1}^1(\nu) = \frac{(\nu - |2n+1|) \cdot (\nu - |2n+1| + 2)}{(-\nu - |2n+1| + 2)(-\nu - |2n+1| + 4)} \cdots \frac{(\nu - 3)}{(-\nu - 1)} C_1^1(\nu) \quad (4)$$

ここで $C_0^0(\nu)$, $C_1^1(\nu)$ は計算によって求まる. 実際

$$\begin{aligned} C_0^0(\nu) = C_0^0(\nu) &= A(0, \nu) \varphi_0(k) = \int_{\bar{N}} e^{-\nu \rho(H(\bar{n}))} d\bar{n} = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + 4x^2)^{-\nu/2} dx \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu-1}{2}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_1^1(\nu) = C_1^1(\nu) = A(1, \nu) \varphi_1(1) = \frac{i}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right). \quad (6)$$

4. 離散系列の表現

正整数 $n \geq 2$ を固定して考える. $\mathbb{D}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ における単位開円板とすると G は一次分数変換 $z \mapsto gz = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$ ($g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$) によって $\mathbb{D}$ 上に推移的に作用し $\mathbb{D} \cong G/K$ である. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) と表わし, $dm(z) = dx dy$ とすると, $\mathbb{D}$ の測度 $d\lambda(z) = \frac{n-1}{\pi} (1-|z|^2)^{n-2} dm(z)$ は G -不変である.

$$\mathcal{H}_n^+ = \{ f \in L^2(\mathbb{D}, d\lambda(z)); f, \text{ holomorphic} \}$$

$$\mathcal{H}_n^- = \{ f \in L^2(\mathbb{D}, d\lambda(z)); f, \text{ anti-holomorphic} \}$$

は共に Hilbert 空間をなし,

$$(\mathcal{U}_n^+(g)f)(z) = (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})^{-n} f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}\right), \quad f \in \mathcal{H}_n^+$$

$$(\mathcal{U}_n^-(g)f)(z) = (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})^{-n} f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}\right), \quad f \in \mathcal{H}_n^-$$

$$\text{但し } g^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

と定めると $(\mathcal{U}_n^+, \mathcal{H}_n^+)$, $(\mathcal{U}_n^-, \mathcal{H}_n^-)$ は共に G の既約ユニタリ表現である. これらは離散系列の表現と呼ばれる. $\gamma_p(n) = \left(\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p+1)} \right)^{1/2}$ と書くとき, $\{\Phi_p^n = \gamma_p(n) z^p; p=0,1,\dots\}$ は $\mathcal{H}_n^+$ の, $\{\bar{\Phi}_p^n; p=0,1,\dots\}$ は $\mathcal{H}_n^-$ の完全正規直交系をなす.

ついでながら述べておくと, $n=1$ の時は $d\lambda(z) = \lim_{n \rightarrow 1+0} \frac{n-1}{\pi} \times$

$(1-|z|^2)^{n-2} dm(z)$ に対して $\mathcal{H}_1^\pm$ を考えると両方既約ユニタリ表現が得られる. これらは離散系列の極限と呼ばれる.

5. Fourier変換と逆公式.

各 $f \in C_c^\infty(SU(1,1))$ に対して

$$\tilde{f}_j(\xi) = \int_G f(x) \pi_{j, 1+i\xi}(x) dx \quad (j=1, 2, \xi \in \mathbb{R})$$

$$\tilde{f}_d^\pm(n) = \int_G f(x) U_n^\pm(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

と定めるとき, 次の逆公式が成り立つ.

$$\begin{aligned} 2\pi f(g) = & \sum_{n \geq 2} (n-1) (\operatorname{Tr} U_n^+(g^{-1}) \tilde{f}_d^+(n) + \operatorname{Tr} U_n^-(g^{-1}) \tilde{f}_d^-(n)) \\ & + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} \pi_{0, 1+i\xi}(g^{-1}) \tilde{f}_0(\xi) \frac{d\xi}{B(\frac{1}{2}, \frac{i\xi}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{-i\xi}{2})} \\ & + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr} \pi_{1, 1+i\xi}(g^{-1}) \tilde{f}_1(\xi) \frac{d\xi}{B(\frac{1}{2}, \frac{1+i\xi}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{1-i\xi}{2})} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで次式が成り立っていることに注意しておく.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{B(\frac{1}{2}, \frac{i\xi}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{-i\xi}{2})} &= \frac{\xi}{2} + i\hbar \frac{\pi\xi}{2} \\ \frac{\pi}{B(\frac{1}{2}, \frac{1+i\xi}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{1-i\xi}{2})} &= \frac{\xi}{2} + i\hbar \frac{\pi\xi}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

6. 行列要素の満たす微分方程式. ([5]).

$SU(1,1)$ 上の Casimir operator $z(n, m)$ 型球関数 ($f(k_\theta g k_\varphi)$
 $= e^{i(n\theta+m\varphi)} f(g)$) で微分可能なものに作用させたときの軌径
 部分は良く知られるように $f(\exp tH)$ に対して

$$\mathcal{I} = \frac{d^2}{dt^2} + 2(\cosh 2t) \frac{d}{dt} - \frac{1}{\sinh^2 2t} (m^2 + n^2 - 2mn \cosh 2t) \quad (9)$$

によつて働く. $\phi(t) = (\pi_{j,\nu}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n)$ は微分方程式

$$\mathcal{I} \phi = (\nu^2 - \nu) \phi \quad (10)$$

を満す.

今 $G_\lambda(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l(\lambda) e^{(\lambda-l)t}$ ($\Gamma_0 \equiv 1$) が (10) の解であるとする
と係数比較によつて

$$\lambda = -\nu \quad \text{or} \quad \nu - 2$$

および $\Gamma_l(\lambda)$ の漸化式

$$\begin{aligned} & [(\lambda-l)^2 + 2(\lambda-l) + 2\nu - \nu^2] \Gamma_l(\lambda) \\ &= -2 \sum_j d_j (\lambda-l+4j) \Gamma_{l-4j}(\lambda) \\ &+ 4 \sum_j a_j (m^2+n^2) \Gamma_{l-4(j+1)}(\lambda) - 4mn \sum_j a_j (\Gamma_{l-4j-2}(\lambda) + \Gamma_{l-4j-6}(\lambda)) \end{aligned}$$

を得る. ここで $d_0 = 1$, $d_j = 2$ ($j \geq 2$), $a_j = (j+1)2^j$ $k < 0$ に対して $\Gamma_k \equiv 0$ とする. 従つて和は有限和である.

$\lambda = -\nu = -(1+i\sqrt{3})$ とおくと Γ_l の係数は $l(l+2i\sqrt{3})$ となる. よつて今 $\xi \in \mathbb{C}$ まで広げて考えると $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ に対して ξ が $\text{Im } \xi < \varepsilon$ を満す領域で解析的に延長される.

今 $\alpha > 0$ を固定する. 領域 $\text{Im } \xi \leq \alpha$ における Γ の特異性を調べかつ $\xi = z$ の Γ 達の評価を得たい.

$$p_0(\xi) \equiv 1, \quad p_l(\xi) = l + 2i\sqrt{3} \quad (l \geq 1)$$

$$P_\alpha(\xi) = \prod_{l \leq \alpha} p_l(\xi), \quad \deg P_\alpha = d_\alpha$$

とおく.

$$\mathcal{R}_\alpha = \{ \nu = \xi + i\eta ; \xi, \eta \in \mathbb{R}, \eta \leq \alpha \}$$

とおく.

THEOREM 1. 定数 $D, d > 0$ がとれて

$$|P_\alpha(\nu) \Gamma_\lambda(-(1+i\nu))| \leq D(1+|\nu|+1)^d \quad \text{for } \forall \nu \in \mathcal{R}_\alpha$$

が λ に関して一様に成り立つ.

$$\text{COROLLARY. } G_{-(1+i\nu)}(t) = e^{-t} \sum_{l \geq 0} \Gamma_l(-(1+i\nu)) e^{(-i\nu-l)t}$$

は $\mathcal{R}_\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) において絶対且つ一様収束し, 各 t について $\mathcal{R}_\varepsilon$ において解析的である. 更に各 t に対し全平面 $\mathbb{C}$ 上有理型関数として延長される.

7. 連続系列及び離散系列の表現の行列要素の漸近展開と C -関数.

ここで Harish-Chandra による $\pi_{j,\nu}$ の行列要素の漸近展開を述べておく.

THEOREM 2.

$$\phi_j(\exp tH) = \langle \pi_{j,\nu}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{l \geq 0} \Gamma_l(-\nu) C_+^j(\nu) e^{-(\nu+l)t} + \sum_{l \geq 0} \Gamma_l(\nu-2) C_-^j(\nu) e^{(\nu-2-l)t}$$

が $t > 0$, $\nu \in \mathbb{C}$ の或る稠密な開集合 C' で成り立つ.

この結果を用いると $\nu = 1 + i\varepsilon$ $|\operatorname{Im} \varepsilon| \leq \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) に対

して

$$\begin{aligned} & |e^t \phi_j(\exp tH) - C_+^j(1+i\varepsilon) e^{-i\varepsilon t} - C_-^j(1+i\varepsilon) e^{i\varepsilon t}| \\ & \leq C e^{(\varepsilon-2)t} (|C_+^j(1+i\varepsilon)| + |C_-^j(1+i\varepsilon)|) \end{aligned}$$

が得られ,

$$C_+^j(\nu) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\nu t} \phi_j(\exp tH) = C_{-n}(2-\nu)$$

が示される. §3 の結果を用いて次が得られる.

(I) $j=0$, m, n が偶数の時

$$C_+^0(\nu) = \frac{(-\nu-|m|+2)(-\nu-|m|+4) \cdots (-\nu)}{(\nu-|m|)(\nu-|m|+2) \cdots (\nu-2)} \cdot \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\nu}{2}\right)$$

$$C_-^0(\nu) = \frac{(\nu-|m|)(\nu-|m|+2) \cdots (\nu-2)}{(-\nu-|m|+2)(-\nu-|m|+4) \cdots (-\nu)} \cdot \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu-1}{2}\right)$$

(II) $j=1$, m, n が奇数の時

$$C_+^1(\nu) = \frac{(-\nu-|m|+2)(-\nu-|m|+4) \cdots (-\nu-1)}{(\nu-|m|)(\nu-|m|+2) \cdots (\nu-3)} \cdot \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2-\nu}{2}\right)$$

$$C_-^1(\nu) = \frac{(\nu-|m|)(\nu-|m|+2) \cdots (\nu-3)}{(-\nu-|m|+2)(-\nu-|m|+4) \cdots (-\nu-1)} \cdot \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$$

m, n に対して $\alpha(m, n) = \min(|m|, |n|)$ とおく. また

$$A_\ell(\nu) = C_+^0(\nu) \Gamma_\ell(-\nu), \quad B_\ell(\nu) = C_-^0(\nu) \Gamma_\ell(\nu-2)$$

とおき $A_\ell(2k), B_\ell(2k)$ を次の極限值で定める ($2 \leq 2k \leq \alpha(m, n)$).

$$A_\ell(2k) = \lim_{\nu \rightarrow 2k} A_\ell(\nu), \quad B_\ell(2k) = \lim_{\nu \rightarrow 2k} B_\ell(\nu).$$

ここで次の事に注意しておく. $\nu = 2k$ において $C_+^0(\nu)$ の有理式部分は 1 位の極を持つが B -関数部分がそこで 1 位の 0 となっているので $C_+^0(\nu)$ は $\nu = 2k$ で正則, また $\Gamma_\ell(-\nu)$ は $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$ で正則だから $A_\ell(2k)$ が定まる. 一方 $C_-^0(\nu)$ は $\operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}$ で正則かつ $\nu = 2k$ ($0 \leq 2k \leq |m|$) が 0 点となっている. また $\nu = 2k$ の近くで $\ell < 2(2k-1)$ なる $\Gamma_\ell(\nu-2)$ は正則従ってそのような ℓ に対して $B_\ell(2k) = 0$. $\ell \geq 2(2k-1)$ なる ℓ に対して B_ℓ も漸化式で定まっているから $B_\ell(2k) = 0$ (すべての ℓ に対して).

THEOREM 3. $k \in \mathbb{N}$ で $2 \leq 2k \leq \alpha(m, n)$ とする. この時

$$(\pi_{0, 2k}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n) = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell(2k) e^{-(2k+\ell)t}$$

$$(\pi_{0, 2-2k}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n) = \sum_{\ell \geq 0} B_\ell(2-2k) e^{-(2k+\ell)t}$$

$2k > \alpha(m, n)$ ならば

$$(\pi_{0, 2k}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n) = (\pi_{0, 2-2k}(\exp -tH) \varphi_m, \varphi_n) = 0$$

8. JOHNSON による Paley-Wiener 定理の formulation.

Sally [15] による次の結果を使う.

LEMMA 2.

(I) j, k, l が偶数である時

$$(1) \quad |j| \leq k < l \Rightarrow \langle \pi_{0,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle \equiv 0$$

$$(2) \quad 0 < j < l \text{ または } 0 < -j < -l \text{ 且つ } 0 \leq k < |j| < |l|$$

$$\Rightarrow \langle \pi_{0,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle, \langle \pi_{0,-k} \varphi_l, \varphi_j \rangle \in L^2(G)$$

$$(3) \quad j < 0 < l \text{ 且つ } 0 \leq k < |j| < l \Rightarrow \langle \pi_{0,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle \equiv 0$$

$$(4) \quad j < 0 < l, \quad 0 \leq k < l < |j| \Rightarrow \langle \pi_{0,-k}(g) \varphi_l, \varphi_j \rangle \equiv 0$$

(II) j, k, l が奇数であるとき

$$(1) \quad |j| \leq k < l \Rightarrow \langle \pi_{1,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle \equiv 0$$

$$(2) \quad 0 < j < l \text{ または } 0 < -j < -l \text{ 且つ } 0 < k < |j| < |l|$$

$$\Rightarrow \langle \pi_{1,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle, \langle \pi_{1,-k}(g) \varphi_l, \varphi_j \rangle \in L^2(G)$$

$$(3) \quad j < 0 < l, \quad 0 \leq k < |j| < l \Rightarrow \langle \pi_{1,-k}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle \equiv 0$$

$$(4) \quad j < 0 < l, \quad 0 \leq k < l < |j| \Rightarrow \langle \pi_{1,-k}(g) \varphi_l, \varphi_j \rangle \equiv 0$$

$$(5) \quad j < 0 < l, \Rightarrow \langle \pi_{1,1}(g) \varphi_j, \varphi_l \rangle = \langle \pi_{1,1}(g) \varphi_l, \varphi_j \rangle \equiv 0$$

DEFINITION 1. $m \equiv n \pmod{2}$ とする. $R > 0$ とする. $\mathbb{C}$ 上の関数

F が次の条件を満たすとき $F \in \mathcal{P}_{m,n}^R(\mathbb{C})$ と云う.

(1) $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ で指数 R -型急減少.

(2) $A_0^j (1+i\zeta) F(\zeta) = B_0^j (1-i\zeta) F(-\zeta) \quad (j=0,1)$ の一方を満たす.

(3) $j \equiv m \equiv n(2)$ とする時 $\langle \pi_{j, 1+i\mathbb{Z}}(x) \varphi_n, \varphi_m \rangle \Rightarrow F(\mathbb{Z}) = 0$.

$F \in \mathcal{P}_{m,n}^R(\mathbb{C})$ に対して

$$f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi_{j, 1+it}(g^{-1}) \varphi_m, \varphi_n \rangle F(t) dt$$

によって定め $f(\exp sH) = f^+(s) + f^-(s)$

$$f^+(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^j(1+it) e^{-(1+it+\ell)s} F(t) d\mu_j(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

$$f^-(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell}^j(1+it) e^{-(1-it+\ell)s} F(t) d\mu_j(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

と分解する. 以下話を簡単にするため $j=0$ とする. $\sigma \in \mathbb{R}$

に対して

$$f_{\sigma}^+(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{\operatorname{Re} v = \sigma} A_{\ell}(v) e^{-(v+\ell)s} F(i(1-v)) \frac{C_1}{B(\frac{1}{2}, \frac{v-1}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{1-v}{2})} dv$$

$$f_{\sigma}^-(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{\operatorname{Re} v = \sigma} B_{\ell}(v) e^{(v-2-\ell)s} F(i(1-v)) \frac{C_1}{B(\frac{1}{2}, \frac{v-1}{2}) B(\frac{1}{2}, \frac{1-v}{2})} dv$$

とおき, $a_{\ell}(v) = A_{\ell}(v)/A_0(v)$, $b_{\ell}(v) = B_{\ell}(v)/B_0(v)$ と表わす. 留数を計算して

$$f_{\sigma}^+(s) - f^+(s) = 2\pi i \sum_{k=1}^{\frac{|m|}{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{\ell}(2k) F(i(1-2k))}{B(\frac{1}{2}, \frac{2k-1}{2})} \cdot e^{-(2k+\ell)s} \operatorname{Res}\left(\frac{a_0(v)}{B(\frac{1}{2}, \frac{1-v}{2})}, 2k\right), \quad \sigma > |m|.$$

$$f_{\sigma}^-(s) - f^-(s) = -2\pi i \sum_{k=0}^{\frac{|m|-2}{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_{\ell}(2+2k) F(i(1+2k))}{B(\frac{1}{2}, \frac{1+2k}{2})} \cdot e^{-(2k+2+\ell)s} \operatorname{Res}\left(\frac{B_0(v)}{B(\frac{1}{2}, \frac{v-1}{2})}, -2k\right), \quad \sigma < -|m|+2$$

また Helgason の方法によって次の結論を得る:

(1) $\sigma > |m|$ に対して $f_{\sigma}^+(s) = 0$ for $s > R$,

(2) $\sigma < -|m|+2$ に対して $f_{\sigma}^-(s) = 0$ for $s > R$.

ここで 差 $f(\exp s H) - f_{\sigma}^{+}(s) - f_{\sigma}^{-}(s)$ について次の様な議論を行っている.

$$G(k_0 \exp t H k_0) = e^{i(n\varphi + m\theta)} (f(\exp t H) - f_{\sigma}^{+}(t) - f_{\sigma}^{-}(t))$$

は $t \in \mathbb{R}$ が 0 から充分離れているとき Casimir operator ω の, 或る有限個の固有関数の 1 次結合であり, そこに現れる各固有関数 $E_i(g)$ は ω の対応する固有値を持つような離散系列の表現の行列要素であり, $E_i(g)$ は丁度良い漸近増大度を持っているので, G はある有限個の離散系列の表現の行列要素の 1 次結合であるとして次の statement を述べている.

THEOREM 4. $f \in C_c^{\infty}(SU(1,1))$ は $f(\exp t H) = 0$ ($t > R$) を満たし, $f(k_0 \exp t H k_0) = e^{i(n\varphi + m\theta)} f(\exp t H)$ とする. この時 $\hat{f} \mapsto \hat{H}_{j, 1+i3}(t) \in \mathcal{P}_{m,n}^R(\mathbb{C})$ である. また $F \in \mathcal{P}_{m,n}^R(\mathbb{C})$ とし,

$$f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \pi_{j, 1+i3}(g^{-1}) \varphi_m, \varphi_n \rangle F(t) d\mu(t)$$

とおくと, 次の条件を満たす $h \in C_c^{\infty}(SU(1,1))$ が存在する:

- (1) $h(k_0 \exp t H k_0) = e^{i(n\varphi + m\theta)} h(\exp t H)$
- (2) $h(\exp t H) = 0$ ($t > R$)
- (3) $f - h$ は $SU(1,1)$ の離散系列の表現の行列要素の或る有限 1 次結合である.

注意 1. 上の statement は Johnson [9] のものであるが, $\hat{H}_{j, 1+i3}(t)$ は誤りで Fourier 係数 $\int_G f(g) \langle \pi_{j, 1+i3}(g) \varphi_n, \varphi_m \rangle dg$ とすべきところ.

その他にもいろいろ mistakes がある。

2. Ehrenpreis-Mautner [6] の議論も Fourier 係数で特徴付けを行うものである。

3. これに対し, Campoli の定式化では Fourier 変換として作用素値関数 $\pi_{j,\nu}(f)$ を考えている。然し上の定理の条件 $\mathcal{P}_{m,n}^R(\mathbb{C})$ の (3) に相当する仮定を一般化したものを考えている。今回の話では, $SU(1,1)$ の場合にこの部分をすっきりした形で述べ, $f-h$ を explicit に与える。

文 献

1. Arthur, A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, Acta Math. 150(1983), 1-89.
2. Campoli, The complex Fourier transform for rank-1 semisimple Lie groups, Thesis, Rutgers Univ.
3. Delorme, Théorème de type Paley-Wiener pour les groupes de Lie semi-simples réels avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, J. Funct. Ana. 47(1982), 26-63.
4. Clozel-Delorme, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, I, preprint.
5. Eguchi, On the asymptotic behaviors of the generalized spherical functions on semisimple Lie groups, to appear. 数研数学講演集
6. Ehrenpreis-Mautner, Some properties of the Fourier transform on semisimple Lie groups, II, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 1-55.
7. Gangolli, On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semisimple Lie groups,

Ann. of Math. 93(1971), 150-165.

8. Helgason, The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces I. Ann. of Math. 98(1973), 451-479.
9. Johnson, Functional analysis on $SU(1,1)$, Adv. in Math. 14(1974) 346-364.
10. ———, Differential equations and an analogue of the Paley-Wiener theorem for linear semisimple Lie groups, Nagoya Math. J. 64(1976), 17-29.
11. Kawazoe, An analogue of Paley-Wiener theorem on semi simple Lie groups and functional equations for Eisenstein integrals, Tokyo J Math. 3(1980), 219-248.
12. Muta, On the spherical functions with one dimensional K-types and the Paley-Wiener type theorem on some simple Lie groups, Rep. Fac. Sci. Eng. Saga Univ. 9(1981), 31-59.
13. 岡本清郷, 等質空間上の解析学, 紀伊国屋書店, 1980.
14. Sugiura, Unitary Representations and Harmonic Analysis, Kodansha Ltd. Tokyo, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney and Toronto. 1975.
15. Sally, Intertwining operators and the representations of $SL(2, \mathbb{R})$, J. Funct. Ana. 6(1971), 441-453.
16. Wallach, Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
17. Warner, Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups II, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.