

$SL(2, \mathbb{R})$ 上の conical distributions

早大 理工 大庭生田 雅一 (Masaichi Mamiuda)

§ 0 序. $G = SL(2, \mathbb{R})$ の minimal parabolic subgroup $B = MAN^+$ を次の様に見る.

$$M = \{ m_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \mid \varepsilon = \pm 1 \}$$

$$A = \{ a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$N^+ = \{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}$$

さらに,

$$K \cong SO(2) = \{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 4\pi \}$$

$$N^- = \{ n_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$j \in \{0, 1\}$ $s \in \mathbb{C}$ に對し B の character $\xi_{j,s} \in$

$$\xi_{j,s}(m_\varepsilon a_t n_x) = \varepsilon^j e^{st/2} \quad \text{と可なり.}$$

$$\text{又, } \xi_{j,s}(G) = \{ f \in C^\infty(G) \mid f(gb) = \xi_{j,s}(\pi(b)) f(g) \quad g \in G, b \in B \}$$

L, R を左, 右正則表現とすると, $\xi_{j,s}(G)$ は $C^\infty(G)$ の L -stable closed subspace となり.

($L, \xi_{j,s}(G)$) は differentiable principal series と可なり.

よ。この時, $\Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2)$ を $\mathcal{D}_{j_1, s_1}(G)$ から $\mathcal{D}_{j_2, s_2}(G)$ への intertwining operators 全体とする。すると, $A \in \Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2)$ は次の条件を満たす G 上の distribution T と 1対1 に対応する (Theorem 1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} R(b)T = \xi_{j_1, -s_1+1}(b^{-1})T \\ L(b)T = \xi_{j_2, s_2-1}(b)T \end{array} \quad (b \in B) \right.$$

よ。この distributions の空間 $\mathcal{D}'_{j, s}(G) \in$.

$\mathcal{D}'_{j, s}(G) = \{ T \in C_c^\infty(G)' \mid R(b)T = \xi_{j, s+1}(b^{-1})T \quad \forall b \in B \}$ と定義する。すると, $(L, \mathcal{D}'_{j, s}(G))$ は G の differentiable な表現である。

G の部分群に対応する Lie algebras を $\mathfrak{g}$, etc., と書き, $U(\mathfrak{g})$ etc., でその complex universal enveloping algebras を表わす。 $D \in U(\mathfrak{g})$ に対し, L, R による微分表現をそれぞれ $L(D), R(D)$ と書く。

$${}^0\mathcal{D}'_{j, s}(G) = \{ T \in \mathcal{D}'_{j, s}(G) \mid L(X)T = 0 \}$$

$$F\mathcal{D}'_{j, s}(G) = \{ T \in \mathcal{D}'_{j, s}(G) \mid \exists k, L(X^k)T = 0 \}$$

$$\text{但し, } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}^+.$$

とすると, Theorem 1 より,

$$\Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2) \hookrightarrow {}^0\mathcal{D}'_{j_1, -s_1}(G) \subset F\mathcal{D}'_{j_1, -s_1}(G)$$

がある injective linear mapping π がある。

さらに, $F\mathcal{D}'_{j, s}(G)$ は L により, left $L(\mathfrak{g})$ module と

より, それは Verma module により記述出来る。さらに (G, B) の Weyl 群の作用に関して一種の双対性をもつ。(Theorem 2)

(Remark) S. Helgason, A duality for symmetric spaces and its applications to group representations
Adv Math (vol 3) では $j=0$ の時 ${}^0D'_{0s}(G)$ は conical distribution と呼んでいる。そしてこの note では, ${}^0D'_{js}(G)$ は conical distribution, ${}^{\pm}D'_{js}(G)$ は quasi-conical distribution と呼ぶことにする。

§1. $D'_{js}(G)$ と intertwining operators.

$\Pi(j_1, s_1, j_2, s_2)$ は次の条件を満たす $E_{j_1, s_1}(G) \times E_{j_2, s_2}(G)$ 上の bilinear forms 全体とする。

(i) separately continuous bilinear form.

(ii) $\Phi(L(g)f_1, L(g)f_2) = \Phi(f_1, f_2) \quad g \in G, f_i \in E_{j_i, s_i}(G)$
 $i=1, 2. (\Phi \in \Pi(j_1, s_1, j_2, s_2))$

$dk, dm \in \mathbb{R}^+$ K, M の normalized Haar measures

又, $da = dt$ if $a = a_t, dn = dx$ if $n = n_x, db = dm da dn$

if $b = man$ とする。

さらに,

に $K \subset \Pi(f, s, f_2, s_2) \cong \mathcal{D}'_{f_1, -s_1}(f_2, s_2)$ と存在。

Intertwining operator との関係に調べる為に次の空間を導入する。

$$\mathcal{D}'_f(K) = \{S \in C^\infty(K)' \mid \text{Rim} \epsilon S = \epsilon^j S \quad \epsilon = \pm 1\}$$

のとき,

Prop. 2. $S \in \mathcal{D}'_f(K)$ に対し $\tilde{S} \in C_c^\infty(A)'$ と

$$\langle \tilde{S}, f \rangle \cong \int_K \pi_{f, -s}(f)(k) dS(k) \quad f \in C_c^\infty(A)$$

と定義すると $\tilde{S} \in \mathcal{D}'_{f, s}(A)$ とあり $S \mapsto \tilde{S}$ により

$$\mathcal{D}'_f(K) \cong \mathcal{D}'_{f, s}(A) \quad (\text{onto linear isomorphism})$$

と存在。又、 $\mathcal{E}_{f, s}(A) \cong C_c^\infty(G)/K_G(\pi_{f, s})$ により

$$\mathcal{E}_{f, s}(A)' \cong \mathcal{D}'_{f, -s}(A) \quad (\text{線型空間として}).$$

以上より、 $\Pi_0(f_1, s_1, f_2, s_2) \xrightarrow{MC} \Pi(f_1, s_1, f_2, -s_2) \cong \mathcal{D}'_{f_1, -s_1}(f_2, -s_2)$ と存在 π , 更に $T \in \mathcal{D}'_{f_1, -s_1}(f_2, -s_2)$ に対し

$$\tilde{A}_T f(g) = \langle T, L(g^{-1})f \rangle = \langle L(g)T, f \rangle \quad f \in C_c^\infty(A)$$

とあり。また、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_T f(gb) &= \langle L(gb)T, f \rangle = \xi_{f_2, -s_2-1}(b) \langle L(g)T, f \rangle \\ &= \xi_{f_2, s_2+1}(b^{-1}) (\tilde{A}_T f)(g). \end{aligned}$$

$\therefore \tilde{A}_T f \in \mathcal{E}_{f_2, s_2}(G)$.

2. Prop. 2 より $\exists S \in \mathcal{D}'_{f_1}(G)$ s.t.

$$(\tilde{A}_T f)(g) = \langle T, L(g)f \rangle$$

$$= \int_K \pi_{j_1, s_1}(L(g)f)(k) dS(k)$$

$$= \int_K \pi_{j_1, s_1}(f)(gk) dS(k)$$

故に, $\text{Ker } \pi_{j_1, s_1} \subset \text{Ker } \tilde{A}_T$

従って $\exists, A_T \in \Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2) \quad s_i \in$

$$C_c^\infty(G) \xrightarrow{\tilde{A}_T} \mathcal{D}_{j_2, s_2}(G)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \pi_{j_1, s_1} & \nearrow A_T & \\ \mathcal{E}_{j_1, s_1}(G) & & \end{array}$$

$$A_T \circ \pi_{j_1, s_1} = \tilde{A}_T$$

と存在, $A_T \in \mathcal{S}$ によって書く.

$$(A_T f)(g) = \int_K f(gk) dS(k)$$

と存在.

inclusion $\Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2) \subset \mathcal{D}'_{j_1, -s_1}(j_2, -s_2)$ によ

り $A_T \rightarrow T$ に対応する $\square$ とは確かめて, 次の定理が
証明出来る.

Theorem 1.

$$\Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2) \cong \Pi(j_1, s_1, j_2, -s_2) \cong \mathcal{D}'_{j_1, -s_1}(j_2, -s_2)$$

§2. Left $L(\mathcal{G})$ module $FD'_{\mathcal{G}}(A)$ の構造と双対性.

$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K$ とおす.

$$C(w) = BwB = N^T w B \simeq N^T \times B \quad (\text{diffeo.})$$

$$C(1) = B$$

おす $C(w)$ open submanifold of G , $C(1)$ is closed submanifold of G 且 $G = C(1) \cup C(w)$ is disjoint union とおす.

Lemma 1 $\forall T \in D'_{\mathcal{G}}(G)$

$T_* = T|_{C(w)}$ restriction とおす, $\exists, S_* \in \mathcal{C}'(N^T)$ s.t.

$$\begin{aligned} \langle T_* f \rangle &= \int_{N^+} \pi_{\mathcal{G}-s}(f)(nw) dS_*(n) \\ &= \int_{N^+} \left(\int_B \xi_{\mathcal{G}-s+1}(b) f(nwb) db \right) dS_*(n). \end{aligned}$$

for $\forall f \in C_c^\infty(C(w))$.

又 $\widehat{T}_{\mathcal{G}-s, k} \in C_c^\infty(C(w))'$ ($k \in N^+$) 且

$$\langle \widehat{T}_{\mathcal{G}-s, k} f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \pi_{\mathcal{G}-s}(f)(n_x w) dx \quad (f \in C_c^\infty(C(w)))$$

とおす.

$T \in FD'_{\mathcal{G}}(A) \quad L(X^{m+1})T = 0$ ならば

$\exists c_0, \dots, c_m \in \mathcal{C}'$ s.t.

$$T_* = \sum_{k=0}^m c_k \widehat{T}_{\mathcal{G}-s, k} \quad \text{とおす}$$

Lemma 2 $\widehat{T}_f - s, k$ は次の性質を持つ。

- (i) $R(b) \widehat{T}_f - s, k = \widetilde{S}_f s+1 (b^{-1}) \widehat{T}_f - s, k$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t \widehat{T}_f - s, k = \varepsilon! e^{-(\frac{s+1}{2} + k)t} \widehat{T}_f - s, k$
- (iii) $L(X^{k+1}) \widehat{T}_f - s, k = 0$.

Def. $T \in \mathcal{D}'_f - s(G)$ が $\widehat{T}_f s, k$ の extension とは。

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t T = \varepsilon! e^{(\frac{s+1}{2} - k)t}$
- (ii) $T|_{C(W)} = \widehat{T}_f s, k$

と満す = とき $\widehat{T}_f s, k$ の extension が存在するとき, $\widehat{T}_f s, k$ は extendable と言ふ。

$$n_x \omega = \bar{n} - \sqrt{x} \, m - \frac{x}{\sqrt{x}} Q \log |x| \, n - \sqrt{x} \, f \, y.$$

$$\langle \widehat{T}_f s, k, f \rangle = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{|x|} \right)^j |x|^{s-1} x^{-k} \pi_s(f)(\bar{n}_x) dx$$

$$(f \in C_c^\infty(C(W)))$$

$$y = z \quad f_k \in \{0, 1\} \quad \text{と} \quad j+k \equiv f_k \pmod{2\mathbb{Z}} \quad \text{と} \quad f \, y$$

$$f \approx f_0 \, \mathbb{Z},$$

$$\langle \widehat{T}_f s, k, f \rangle = \frac{1}{P(\frac{s-R+k}{2})} \langle \widehat{T}_f s, k, f \rangle$$

$$(f \in C_c^\infty(C(W)))$$

$$k \leq k_0.$$

すると次の Lemma が成り立つ。

Lemma 3 $\operatorname{Re}(s) > k$ の時, あらゆる $f \in C_c^\infty(G)$ に対して $\langle T_{f, s, k}, f \rangle$ は well-defined で, $T_{f, s, k}, \tilde{T}_{f, s, k}$ は共に G 上の distribution と見做すことが出来る。又 $f \in C_c^\infty(A)$ を固定した時, $s \rightarrow \langle T_{f, s, k}, f \rangle$ は $\mathbb{C}$ 上の holomorphic function に解析接続出来る。これを $\langle T_{f, s, k}, f \rangle$ と書くと, $T_{f, s, k} \in C_c^\infty(A)'$ であり Lemma 2 の条件をすべて満たす。

Lemma 4 $\tilde{T}_{f, s, k}$ extendable $\Leftrightarrow -\frac{s-k+1}{2} \notin N$ であり, $-\frac{s-k+1}{2} \notin N$ の時, $P(\frac{s-k+1}{2}) T_{f, s, k}$ がその extension である。

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, 次の命題が成立する。

Prop 3.

$$(1) \quad T_{f, s, k} \in \mathcal{FD}'_{f, -s}(G) \quad \operatorname{Supp} T_{f, s, k} \subset C(1) \Leftrightarrow -\frac{(s-k+1)}{2} \in N$$

$$(2) \quad \forall T \in \mathcal{FD}'_{f, -s}(A) \quad L(X^{m+1})T = 0 \quad \exists \tilde{c}_0, \dots, c_m \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Supp} (T - \sum_{k=0}^m c_k T_{f, s, k}) \subset C(1).$$

$$(3) \quad \begin{cases} L(X) T_{f, s, k} = k \left(\frac{s-k}{2} \right)^{i-j_k} T_{f, s, k-1} \\ L(H) T_{f, s, k} = \left(\frac{s-1}{2} - k \right) T_{f, s, k} \\ L(Y) T_{f, s, k} = 2^{j_k} (s-k-1)^{i-j_k} T_{f, s, k+1} \end{cases}$$

$\mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, w}(G) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{C} T_k - s, k$ とおくと $\mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s}(G)$ の $U(\mathfrak{g}_c)$ -submodule と $\mathfrak{h}$ 有る。

次に $\mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, 1}(G) = \{T \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s}(G) \mid \text{Supp } T \subset \mathbb{C}(1)\}$ とし, $\mathfrak{z} \in \text{Der}(\mathfrak{g}_c)$ $f \in C_c^\infty(G)$ $f(\mathfrak{g}; D) = (R(D)f)(\mathfrak{g})$ と書く。

Lemma 5. $\forall T \in \mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, 1}(G) \exists D \in U(\mathfrak{h}_c^-)$ s.t.

$$\langle T, f \rangle = \pi_{\mathfrak{g}-s}(f)(1; D) = (R(D)\pi_{\mathfrak{g}-s}(f))(1).$$

$D \rightarrow D^T \in \text{principal anti-automorphism}$ とする。

$$\langle T, f \rangle = \langle L(D^T)\pi_{\mathfrak{g}-s}(f) \rangle(1) = \pi_{\mathfrak{g}-s}(L(D^T)f)(1).$$

又,

$\mathcal{I}_{\mathfrak{g}, s}: U(\mathfrak{g}_c) \rightarrow C_c^\infty(G)'$ linear mapping $\mathfrak{z}$.

$$\langle \mathcal{I}_{\mathfrak{g}, s}(D), f \rangle = \pi_{\mathfrak{g}-s}(f)(1; D) \quad f \in C_c^\infty(G)$$

$U(\mathfrak{g}_c)$ の left ideal $\mathcal{I}_s(\mathfrak{g}_c) = U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c^+ + U(\mathfrak{g}_c)\mathfrak{h}_c - s + (1)$ とする
と, $U(\mathfrak{g}_c) = U(\mathfrak{h}_c^-) \oplus \mathcal{I}_s(\mathfrak{g}_c)$ となり, $\mathfrak{z}$ 有る。

Lemma 6. $\mathcal{I}_{\mathfrak{g}, s}$ は left $U(\mathfrak{g}_c)$ module homomorphism である。

$$\text{Ker } \mathcal{I}_{\mathfrak{g}, s} = \mathcal{I}_s(\mathfrak{g}_c) \quad \mathfrak{z} \quad \mathcal{I}_{\mathfrak{g}, s}(U(\mathfrak{g}_c)) = \mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, 1}(G).$$

従って $M(s) = U(\mathfrak{g}_c) / \mathcal{I}_s(\mathfrak{g}_c)$ とおくと。

$$M(s) \cong \mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, 1}(G) \text{ as left } U(\mathfrak{g}_c) \text{ modules.}$$

$\mathfrak{z}$ 有る $M(s)$ は highest weight $s-1 \in \mathfrak{h}^*$ の Verma module と同型である。 $\mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s, 1}(G) \subset \mathcal{D}'_{\mathfrak{g}, s}(G)$ と有る。

Verma module への $\mathfrak{z}$ 有る $\mathfrak{z}$ の Lemma 7.5.2 有る。

Lemma 7. $\omega_0(S) = 1 + f_3(\mathcal{G}_C) \in M(S)$. $v_m(S) = Y^m \cdot v_0(S)$.

(1) $U(\mathcal{G}_C) \rightarrow M(S)$ $Y^m \mapsto v_m(S)$ onto linear isomorphism

$$M(S) = \sum_{m \geq 0} \mathbb{C} v_m(S)$$

(2) $X v_m(S) = m(S-m) v_{m-1}(S)$, $H v_m(S) = (S-1-2m) v_m(S)$, $Y v_m(S) = v_{m+1}(S)$

(3) $M(S)$ simple $\Leftrightarrow S \notin \mathbb{Z}^+$. $S = m \in \mathbb{Z}^+$ のとき $M(m)$ の improper submodule は 0 と $\mathbb{C} \cdot 1 \subset V = \mathcal{G}_C$ だけ. $v_0(-m) \mapsto v_{m+2}(m)$

$$\hookrightarrow (4) \quad M(-m) \cong V(-m) = \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{C} v_k(m) \text{ と } \mathcal{G}_C \ni 0$$

$L(m) = M(m)/V(-m)$ は 有限次元 $L(\mathcal{G}_C)$ module と同値.

Theorem 2 ($\mathbb{F} D'_{f,S}(G)$ の $L(\mathcal{G}_C)$ module の構造)

(1) $S \notin \mathbb{Z}$; $\mathbb{F} D'_{f,S}(G) = D'_{f,S}(G) \oplus D'_{f,S} \omega(G)$.

$$D'_{f,S}(G) \cong M(S) \quad D'_{f,S} \omega(G) \cong M(-S)$$

(2) $S = f+2m$ ($m \in \mathbb{N}$); $\mathbb{F} D'_{f,S}(G) = D'_{f,S}(G) \supset D'_{f,S} \omega(G)$

$$D'_{f,S}(G) \cong M(S) \quad D'_{f,S} \omega(G) \cong M(-S)$$

(3) $S = -f-2m$ ($m \in \mathbb{N}$); $\mathbb{F} D'_{f,S}(G) = D'_{f,S} \omega(G) \supset D'_{f,S}(G)$

$$D'_{f,S}(G) \cong M(S), \quad D'_{f,S} \omega(G) \cong M(-S)$$

(4) $S = f+2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$); $\mathbb{F} D'_{f,S}(G) = D'_{f,S}(G) \oplus D'_{f,S} \omega(G)$

$$D'_{f,S}(G) \cong M(S) \quad D'_{f,S} \omega(G) \cong M(-S)$$

$$M(S) \supset V(-S) \cong M(-S), \quad (M(S) \oplus M(-S)) / (V(-S) \oplus M(-S)) \cong L(S)$$

(5) $S = -(f+2m+1)$ ($m \in \mathbb{N}$); $\mathbb{F} D'_{f,S}(G) = D'_{f,S}(G) \oplus D'_{f,S} \omega(G)$

$$D'_{f,S}(G) \cong M(S), \quad D'_{f,S} \omega(G) \supset \sum_{k=0}^{-S} \mathbb{C} T_{f-S,k} \cong L(-S)$$

$$\mathcal{D}'_j \cong \mathfrak{sl}(G) / (\sum_0^{-s} \mathbb{C} T_{j-s, k}) \cong \mathfrak{M}(S), \quad {}^0\mathcal{D}'_{j,s}(H) / (\sum_0^{-s} \mathbb{C} T_{j-s, k}) \cong \mathfrak{M}(1-S) \mathfrak{M}(S)$$

二の定理より次の二つの Corollary が成り立つ

Corollary 1 (${}^0\mathcal{D}'_{j,s}(G)$ の分解) $T_{j,s} 0 = T_{j,s}$ と書く。

(1) $s \notin j+1+2\mathbb{N}$

$${}^0\mathcal{D}'_{j,s}(G) = \mathbb{C} \mathcal{L}_{j,s}(1) \oplus \mathbb{C} T_{j,s}$$

(2) $s = j+1+2m, \quad m \in \mathbb{N}$

$${}^0\mathcal{D}'_{j,s}(G) = \mathbb{C} \mathcal{L}_{j,s}(1) \oplus \mathbb{C} T_{j-s} \oplus \mathbb{C} \mathcal{L}_{j,s}(I^s)$$

Corollary 2 (intertwining operators)

(1) $\mathcal{D}'_{j_1, -s_1}(j_2, -s_2) \cong \Pi_0(j_1, s_1, j_2, s_2) \neq 0 \Leftrightarrow j_1 = j_2, s_1 = \pm s_2$

(2) $\mathcal{D}'_{j, -s}(j, -s) = \mathbb{C} \mathcal{L}_{j, -s}(1)$

(3)

$$\mathcal{D}'_{j, -s}(j, s) = \begin{cases} \mathbb{C} T_{j,s} & -s \notin j+1+2\mathbb{N} \text{ or } (j, s) \neq (1, 0) \\ \mathbb{C} \mathcal{L}_{1,0}(1) \oplus \mathbb{C} T_{1,0} & \text{if } s = (1, 0) \\ \mathbb{C} \mathcal{L}_{j, j+2m+1}(I^{2m+j+1}) \oplus \mathbb{C} T_{j, -2m-j} & s = -2m-j \end{cases}$$