

Lorentz 群と Euclid Fourier 変換.

佐賀大理工 牟田 洋一

§1. 序

G と回転群 には Lorentz 群, $\mathcal{O}$ と Euclid 空間 における G -orbit と可る. $\mathcal{O}$ 上の関数 f の Euclid Fourier 変換

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathcal{O}} f(x) e^{i[x, \xi]} dx$$

は $L^2(\mathcal{O})$ の分解とも関係した面白い問題である. ここでは

$\mathcal{O} = S^{m-1}$ 上の関数 f による像が $\mathbb{R}^m$ 上の関数として

どのように特徴づけられるかを調べ, そのあとで

$G = SO_0(1, m)$ ($m \geq 2$), $\mathcal{O} = C = \text{light cone}$ の場合を考察する. G 上の関数としての f の性質が $\mathcal{F}f$ の中にどのような形で現われるかを見るのが目的である.

§2. 球面上の関数の Euclid Fourier 変換

S^{m-1} 上の関数は Fourier 展開の中に $SO(m)$ 上の関数としての特徴が現われている. したがって $\mathcal{F}f$ の性質も

f の Fourier 級数展開の係数を用いて表すことが出来ることは示す。

次元が上, とも同じだから以下 $n=2$ として説明する。

$$(2-1) \quad f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\theta},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta$$

とすれば, f の性質は数列 $\{c_n\}$ の性質として特徴づけられる。例えは, $f \in L^2(S) \iff \{c_n\} \in (l^2)$, $f \in C^\infty(S) \iff \{c_n\} \in (S)$ などはある。今 ξ を極座標表示

$$\xi_1 = \rho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \rho \sin \varphi$$

とすれば, f の Euclid Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ は

$$(2-2) \quad (\mathcal{F}f)(\rho, \varphi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i(\xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta)} d\theta \\ = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\rho \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

とあるから, 展開式 (2-1) を使うと

$$= \sum_n c_n e^{-in\varphi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho \cos \theta} e^{-in\theta} d\theta \\ = 2\pi \sum_n c_n i^n J_n(\rho) e^{-in\varphi}$$

となる。ここに $J_n(\rho)$ は普通の Bessel 関数で

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k}}{k! (k+n)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$$

をみたす。また (2-2) より $\mathcal{F}f$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で C^∞ である。

$$(2-3) \quad \Delta(\mathcal{F}f) = -\mathcal{F}f$$

をみたす。以上をまとめると次の Proposition が得られる:

Proposition 1 $f \in L^1(S)$ であるならば $\mathcal{F}f$ は (2-3) をみたす $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ -関数である。また f は (2-1) を満たす。

$$(2-4) \quad (\mathcal{F}f)(\rho, \varphi) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n c_n J_n(\rho) e^{-in\varphi}$$

である。

更に (2-4) と J_n の表示を用えれば次の系を得る:

Corollary $\mathcal{F}f$ は S への制限 $(\mathcal{F}f)(\varphi)$ により完全に定まり

$$(2-5) \quad (\mathcal{F}f)(\varphi) = 2\pi \sum_n i^n c_n j_n e^{-in\varphi}$$

である。ただし $j_n = J_n(1)$ 。

最初の Fourier 級数展開 (2-1) は f の Schwartz の意味での distribution のときも成立つ (例えば [2])。これは $\{c_n\}$ の緩増加であることにより特徴づけられる。この場合も $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ である。解析汎関数の特徴づけは次の定理に述べられている (国本 [3]):

④ Δ は Riemannian compact manifold M の Laplace-Beltrami operator とする と 次のことが成り立つ:

(i) $f \in L^2(M)$ が analytic $\iff \exists t > 0: e^{t\sqrt{\Delta}} f \in L^2(M)$

(ii) T が M 上の解析汎関数であるための必要十分条件は,

T の Fourier 係数 $b_n = T\phi_n$ が

$$\forall t > 0 \quad \sum |b_n| e^{-t\sqrt{\lambda_n}} < +\infty$$

と満たすことである。ただし, $\{\phi_n\}$ は $\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n$ なる

$L^2(M)$ の 正規直交基底。

これを 使う と 次の定理を得る。

Theorem $\{f: f \text{ は } S \text{ 上の解析汎関数}\}$
 $= \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^2): \Delta F = -F\}.$

まず 我々の 場合

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_0, \quad \Delta_0 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

であるから, Δ_0 の スペクトル $= \{0, 1, 2^2, 3^2, \dots\}$, $\phi_n(\varphi) = e^{-in\varphi}$

であることに注意しよう。上の定理を使うと (2-1) の f が

S 上の解析汎関数であるための条件は

$$(2-6) \quad \forall t > 0 \quad \sum_n |c_n| e^{-t|n|} < +\infty.$$

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が $\Delta F = -F$ を満たせば F は $\mathbb{R}^2$ で, かつ

$F|_S$ は S 上 analytic. よって上の定理より

$$\exists s > 0: \{c_n e^{s|n|}\} \in (l^2),$$

たに、 $F(1, \varphi) = \sum c_n e^{-in\varphi}$. 7 た $F(\rho, \varphi) = \sum A_n(\rho) e^{-in\varphi}$
 と書くと, $\Delta F = -F$ より $A_n(\rho)$ は Bessel 方程式をみたす:
 $\rho^2 A_n'' + \rho A_n' + (\rho^2 - n^2) A_n = 0$. F は全平面で解析的ゆえ $A_n(\rho) = \alpha_n J_n(\rho)$
 ($\alpha_n \in \mathbb{C}$). よって上の $c_n = \alpha_n j_n$. 今 $a_n = i^{-n} \alpha_n$ とおくと
 $\forall t > 0$ に対し

$$\left(\sum |a_n| e^{-tn} \right)^2 \leq \left(\sum |c_n|^2 e^{2stn} \right) \left(\sum j_n^{-2} e^{-2|t+sn|n} \right).$$

$j_n^{-2} \sim 2^{2n}$ ゆえ右辺は収束する. (たまた $f = \sum a_n e^{-in\theta}$
 は S 上の解析的汎関数であり, $\mathcal{F}f = F$ をみたす).

7 た次の系が成立つ.

Corollary $\mathbb{R}^2$ で $\Delta F = -F$ をみたす C^∞ -関数 F は, S
 上の解析的汎関数の Euclid Fourier 像であり, 更に F の S へ
 の制限を $\sum a_n e^{-in\varphi}$ と表わす可

$$(i) \exists f \in \mathcal{D}'(S) : F = \mathcal{F}f \iff \{a_n/j_n\} \text{ が緩増加列},$$

$$(ii) \exists f \in L^2(S) : F = \mathcal{F}f \iff \{a_n/j_n\} \in (l^2)$$

$$(iii) \exists f \in C^\infty(S) : F = \mathcal{F}f \iff \{a_n/j_n\} \in (\mathcal{S})$$

7 たことが成立つ.

§ 3. $L^2(\mathbb{C})$ の分解

$n+1$ 次元 Minkowski 空間 E_{n+1} の light cone $C = \{x \in E_{n+1} |$
 $[x, x] = 0, x_0 > 0\}$ には Lorentz 群 $G = SO_0(1, n)$ が推移

的に作用可3. 記号

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & k \end{pmatrix} : k \in SO(n) \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & m & \\ & & 1 \end{pmatrix} : m \in SO(n-1) \right\},$$

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & & & \sinh t \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \sinh t & & & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{および}$$

$$N = \left\{ n(\xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\delta}{2} & \xi_2 & \dots & \xi_n & -\frac{\delta}{2} \\ \xi_2 & 1 & & & -\xi_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \xi_n & & & 1 & -\xi_n \\ \frac{\delta}{2} & \xi_2 & \dots & \xi_n & 1 - \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{R} \\ \delta = \sum \xi_j^2 \end{array} \right\}$$

~~を使う~~を使うと, $C_* = (1, 0, \dots, 0, 1) \in C$ 2" a stationary subgroup = MN 2" G の素分解は $G = KAN$ 2" 5.2.3 2" 3.

C 上 n 次数 $-\frac{n-1}{2} + i\nu$ ($\nu \in \mathbb{R}$) の同次関数の空間 H_ν に G の既約 unitary 表現 π_ν が構成 2" 2". $L^2(C)$ は H_ν の直和に分解 2" 2". 即ち $f \in C_c^\infty(C)$ に対し $f_\nu \in H_\nu$ 2

$$(3-1) \quad f_\nu(c) = \int_0^\infty f(tc) t^{\frac{n-1}{2} - i\nu} dt$$

に 2" 2" define 2" 2" 2

$$(3-2) \quad f(c) = f(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r^{-\frac{n-1}{2} + i\nu} f_\nu(\omega) d\nu,$$

$$\int_C |f(c)|^2 dc = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(r, \omega)|^2 r^{n-2} d\omega dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|f_\nu\|^2 d\nu$$

が成立つ。 他方

$$(A_\nu f)(c) = \int_{S^{n-1}} f(\omega) [\omega', c]^{-\frac{n-1}{2}-i\nu} d\omega$$

と (17) は A_ν は H_ν の $H_{-\nu}$ への写像で $A_\nu \pi_\nu(g) = \pi_{-\nu}(g) A_\nu$ ($g \in G$)。 以上

$$J_\nu f = a(\nu)^{-1} A_\nu f, \quad a(\nu) = \int_{S^{n-1}} [\omega', c_*]^{-\frac{n-1}{2}-i\nu} d\omega$$

と (17) は J_ν は $J_\nu \pi_\nu(g) = \pi_{-\nu}(g) J_\nu$ ($g \in G$) と J_ν は H_ν の $H_{-\nu}$ への unitary operator である。 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ とし (17) $f_\nu(\omega) = a(\nu)^{-1} J_\nu(A_\nu f_\nu) = |a(\nu)|^{-2} A_{-\nu}(A_\nu f_\nu)$ と (3-2) より

$$f(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{S^{n-1}} (A_\nu f_\nu)(\omega) [\omega', c]^{-\frac{n-1}{2}+i\nu} d\omega \right) \frac{d\nu}{|a(\nu)|^2}$$

(3-3)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{S^{n-1}} \tilde{f}(\nu; \omega) [\omega', c]^{-\frac{n-1}{2}+i\nu} d\omega \right) \frac{d\nu}{|a(\nu)|^2}$$

が成立つ。 以上

$$(3-4) \quad \tilde{f}(\nu; \omega) = A_\nu f_\nu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} f(c) [\omega', c]^{-\frac{n-1}{2}-i\nu} dc.$$

L^2 -norm の計算に於て

$$(3-5) \quad \int_{\mathbb{C}} |f(c)|^2 dc = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{S^{n-1}} |\tilde{f}(\nu; \omega)|^2 d\omega \right) |a(\nu)|^{-2} d\nu$$

が成り立つ。 以上

§ 4. C 上の関数の Euclid Fourier 変換

cone C 上の関数 f に対し

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_C f(c) e^{i[c, \xi]} dc$$

を f の Euclid Fourier 変換と呼ぶことにする. これに関心を引くのは $\mathcal{F}$ が G の変換と可換なことから前 § の表現 π_ν の intertwining operator を構成できること, 適当な条件下に $\mathcal{F}f$ は波動方程式 $\square(\mathcal{F}f) = 0$ をみたすことによる.

$f \in H_\nu$ (ν は実数とは限らない) ならば

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(\omega) r^{\frac{n-1}{2} + i\nu} e^{ir[\omega', \xi]} d\omega \frac{dr}{r}$$

$[\xi, \xi] \geq 0$ ならば $[\omega', \xi]$ は $\omega \in S^{n-1}$ の定符号. 例えは $\xi_1 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} &= \int_{S^{n-1}} f(\omega) [\omega', \xi]^{-\frac{n-1}{2} - i\nu} d\omega \int_0^\infty r^{\frac{n-1}{2} - 1 + i\nu} e^{ir} dr \\ &= \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + i\nu\right) e^{\frac{\pi}{2}\left(i\frac{n-1}{2} - \nu\right)} \int_{S^{n-1}} f(\omega) [\omega', \xi]^{-\frac{n-1}{2} - i\nu} d\omega \end{aligned}$$

即ち $\mathcal{F}f$ は $A_\nu f$ の定数倍となる.

f の群論的な意義はそれの Fourier 変換 $\tilde{f}(\nu, \omega)$ として表わされているはずだから, 以下では $\tilde{f}$ の代わりに $\mathcal{F}f$ と結わつけていこうと考える. まず f の球面調和関数によ

展開係数と f の関係と調べる.

$$(4-1) \quad f(c) = f(r, \omega) = \sum_{k,j} \varphi_{kj}(r) Y_{kj}(\omega)$$

と可なり

$$\tilde{f}(\nu, \omega) = \int_C f(c) [\omega', c]^{-\frac{n-1}{2}-i\nu} dc$$

(4-2)

$$= \sum \int_{S^{n-1}} Y_{kj}(\sigma) [\sigma', \omega']^{-\frac{n-1}{2}-i\nu} d\sigma \int_0^\infty \varphi_{kj}(r) r^{\frac{n-1}{2}-i\nu} \frac{dr}{r}$$

であるから, S^{n-1} 上の積分部分は $(\nu$ の関数) $\times Y_{kj}(\omega)$ となりそうである

係数 $\varphi_{kj}(r)$ は $(\nu$ の関数) $\times \int \tilde{f}(\nu, \omega) Y_{kj}(\omega) d\omega$ の逆 Mellin 変換により得られる. 例として $n=2$ のとき

$$f(c) = \sum_k \varphi_k(r) e^{-ik\theta},$$

$$\tilde{f}(\nu, \varphi) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}-i\nu} d\theta \cdot \sum_k \left(\int_0^\infty \varphi_k(r) r^{-\frac{1}{2}-i\nu} dr \right) e^{-ik\varphi}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-i\nu)}{2^{\frac{1}{2}+i\nu} \Gamma(\frac{1}{2}-i\nu)} \sum_k \left(\int_0^\infty \varphi_k(r) r^{-\frac{1}{2}-i\nu} dr \right) e^{-ik\varphi}$$

$$\therefore \varphi_k(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{2^{\frac{1}{2}+i\nu} \Gamma(\frac{1}{2}-i\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-i\nu)} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\nu, \varphi) e^{ik\varphi} d\varphi d\nu.$$

f の展開式を用いて $\mathcal{F}f$ の計算は次のようになる. さて円柱座標 (x, ρ, ω) で表示すると

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)(z, \rho, \omega) &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \sum \varphi_{kj}(r) Y_{kj}(\sigma) e^{irz - ir\rho\sigma \cdot \omega} r^{n-2} d\sigma dr \\
&= \sum \int_0^\infty \varphi_{kj}(r) r^{n-2} e^{irz} dr \int_{S^{n-1}} Y_{kj}(\sigma) e^{-ir\rho\sigma \cdot \omega} d\sigma \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum i^k Y_{kj}(\omega) \int_0^\infty (r\rho)^{l-\frac{n}{2}} \varphi_{kj}(r) J_{\frac{n}{2}+k-1}(r\rho) r^{n-2} e^{irz} dr
\end{aligned}$$

と表す。

Proposition f の展開式 (4-1) 2 項よりとる, f の Euclid Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ は同柱座標で

$$(\mathcal{F}f)(z, \rho, \omega) = \sum \Phi_{kj}(z, \rho) Y_{kj}(\omega)$$

$$\Phi_{kj}(z, \rho) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^k \int_0^\infty (r\rho)^{l-\frac{n}{2}} \varphi_{kj}(r) J_{\frac{n}{2}+k-1}(r\rho) r^{n-2} e^{irz} dr$$

と表すことができる。

参 考 文 献

- [1] I.M. Gelfand, M.I. Graev and N.Ya. Vilenkin,
Generalized functions, vol 5, Academic Press 1968
- [2] M.J. Lighthill, Introduction to Fourier analysis
and generalized functions, Cambridge Univ. Press, 1964
- [3] 岡本清郷, 等質空間上の解析学, 紀伊国屋書店 1980

- [4] R. Raczka, N. Limić and J. Niederle, Eigenfunction expansions associated with the second order invariant operator on hyperboloids and cones I, II, III, J. Math. Physics, 1966, 1967
- [5] E. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.
- [6] R. S. Strichartz, The stationary observer problem for $\square u = Mu$ and related equations, J. Diff. eq., 1971
- [7] ———, Harmonic analysis on hyperboloids, J. Func. analysis 12, 1973
- [8] N. Ya. Vilenkin, Special functions and theory of group representations, A.M.S., 1968