

C*誘導表現による自由群の表現

阪大基 梶原 毅 (Troyoshi Kajiwara)

§1. 序論

自由群は表現論, 作用素環論において, 病理的な例として古くから研究されている。ところが, 最近 Haagerup の研究とか (T) ももつ群の研究などが進むにつれ, 自由群は必ずしも最も病理的な存在ではないことがわかってきた。すなわち自由群は自由積という「構造」をもつため, (T) ももたない。表現論的に見ても群環の中に良い性質を持った極大可換環が存在して, それを用いて可換調和解析の技法を導入できることが, 最近 Rytlik, Figa-Talamanca らによって発見された。Figa-Talamanca の本も出版される予定であり, 自由群が身近な存在になる時代は近いと思う。

自由群が最初に (代数学の対象としてではなく) 最初に研究されたのは 1930 年代, von Neumann の作用素環の研究の出発点においてである。表現論においては正則表現の分解に関して, 1951 年 Yoshizawa は 2 通りの全く異なる分解があることを示した。この分解はその後 Kawahara によって一般化され, 可算無限個の分解があることが知られている。Rytlik は上にあげた研究を用いて Yoshizawa の分解とは完全に異なる

る分解を与えた。ここでは Rytlik 分解と Yoshizawa 分解をつなぐ分解の族を構成し、それが今までに知られている分解とは異なることを示す。

§2. Rytlik, Figa-Talamanca の理論

生成元 m の自由群を F_m と表す。 $x \in F_m$ に対して $|x|$ で x の長さを表す。 F_m 上の関数が長さだけによって決まるとき、それを radial 関数と呼ぶ。有限な support を持つ関数, radial 関数を $C_c(F_m)$, $C_c^\lambda(F_m)$ とかく。次の補題は最も基本的である。

補題④ $C_c^\lambda(F_m)$ は可換部分環である。

注. 実はこれは自由群の特殊事情であり, 有限生成可換群の自由積の radial 関数が環をなすならそれは自由群になってしまう。(梶原)

$C_r^*(G)$ で G の縮約群環を表す。また $C_r^{*\lambda}(F_m)$ で $C_c^\lambda(F_m)$ の $C_r^*(G)$ 内の λ ルム閉包を表す。 $C_r^{*\lambda}(F_m)$ も可換 C^* 部分環になっている。

補題④ $C_r^*(F_m)$ から $C_r^{*\wedge}(F_m)^\wedge$ の標準的な条件付期待値 E が存在する。これは Π_1 -因子における Dixmier-Umegaki の条件付期待値の制限である。

E によって $C_r^{*\wedge}(F_m)$ の表現を $C_r^*(F_m)$ まで Rieffel の意味で誘導することができる。Rieffel による C^* 環の誘導表現については講演内においておいた。例えばテトラック測度は $C_r^{*\wedge}(F_m)$ の“正則”表現を与え（これを $\pi^\wedge$ とかこう） $\pi^\wedge$ を $C_r^*(F_m)$ まで誘導すれば F_m の正則表現になる。ここでは左正則表現の方を考える。 G の左(右)正則表現を $L_G(R_G)$ と表すことにする。

補題 $C_r^{*\wedge}(F_m)$ の表現 $\pi^\wedge$ の分解は L_{F_m} の分解を与える。対応する可換環は $R_{F_m}(C_r^{*\wedge}(F_m))''$ である。

定理(P) $R_{F_m}(C_r^{*\wedge}(F_m))''$ は $R_{F_m}(F_m)''$ の極大可換奇環であり、その結果左正則表現の既約分解を与えている。この分解は Yoshizawa 分解とは完全に異なる。

さらに $C_r^{*\wedge}(F_m)$ 自身も $C_r^*(F_m)$ の中で極大可換環になることが示されている。以上の Rieffel の理論は、離散 ICC 群の縮約

群環 $C_r^*(G)$ の極大可換部分環を種々構成し、その表現を Dixmier - Umemaki の条件付期待値によって $C_r^*(G)$ に誘導して新しい(既約)表現を作る可能性を示唆している。自由群以外の場合、標準的な可換環の構成が難しく、また条件付期待値の具体的な記述が難しい。 $SL(2, \mathbb{Z})$ などに同様の理論を作ることは興味ある問題である。

以上は Rydlik の「作用素環的」な理論で、それに対して、Figa-Talamanca, Piccadello (F-P) は半単純リー群との類似によって研究を進めている。それについては著名な論文[3]を参照されたい。

§3. 正則表現の既約分解

F_m の生成元 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ を固定する。ここで $g \in F_m$ によって生成される部分群を $\langle g \rangle$ とかくことにする。古典的な Yoshizawa 分解は、 $\langle a_i \rangle$ の一次元表現からの誘導表現による分解である。Kawakami 分解は任意の極大可換群 $(\langle g \rangle$ の形で与えられ、 $g = h^2$ とは表されない) の一次元表現からの誘導表現によって分解を与えた。

Yoshizawa 分解は 1 つの生成元だけに関係し、逆に Rydlik 分解はすべての生成元に平等に関係している。そこでこの 2 つの族を補間する既約分解の族を考えることが自然である。

$2 \leq r \leq n$ とする。 $\{1, \dots, n\}$ の r 個の元からなる部分集合を $\{i_1, \dots, i_r\}$ とかく。 $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ から生成される部分群 H_r は自由群 ($\cong F_r$) で、これを $F_{\{i_1, \dots, i_r\}}$ とかく。略して $I_r = \{i_1, \dots, i_r\}$ ともかく。 $F(I_r)$ に対して $C_r^{*\lambda}(F(I_r))$ を考える。これは可換 C^* 部分環で、 $C_r^{*\lambda}(F_n)$ の部分 C^* 環と見ることが出来る。

補題 $C_r^{*\lambda}(F_n)$ から $C_r^{*\lambda}(F(I_r))$ への平均化期待値 $P_r(D-U)$ が存在する。これは F_n から $F(I_r)$ への制限と、 $P_{r+1:k}$ の期待値の合成によって与えられる。

P_r によって $C_r^{*\lambda}(F(I_r))$ の“正則リ表現を誘導するとやはり F_n の左正則表現が得られるので、 $P_{r+1:k}$ と同様の手法で左正則表現の分解が得られる。これを $D_{\{i_1, \dots, i_r\}}$ または $D(I_r)$ とかく。この分解の対角環は $R_{F_n}(C_r^{*\lambda}(F(I_r)))''$ であるから、この可換環の極大性が問題になる。

補題 $R_{F_n}(C_r^{*\lambda}(F(I_r)))''$ は極大可換環である。

これは Popa [8] Cor 6.2 を用いることによってわかる。

命題 $D(I_r)$ はすべて既約分解である。

そこで以下は各 $D(I_r)$ ($r=2, \dots, m$) の相互の関係を調べることになる。その議論にあつては次の2つの補題が主たる道具になる。

補題 A [7]. G を離散群, G_1, G_2 を2つの部分群とする。 G_1 の表現 π を G で誘導して G_2 に制限したものを σ とする。 $x \in G$ を1つ固定する。 $G_2 \cap x G_1 x^{-1} \ni s \mapsto \pi(x^{-1} s x)$ は $G_2 \cap x G_1 x^{-1} (= G_2^x)$ の表現 π^x を与える。 $\sigma^x = \text{Ind}_{G_2^x \uparrow G_1} \pi^x$ は x の属する両側 coset のみによって決まるので σ^D ($D \in G_2/G_1$) とかく。そのとき,

$$\sigma \cong \sum_{D \in G_2/G_1}^{\oplus} \sigma^D$$

補題 B [2]. G を第2可算公理を満たす局所コンパクト群, π をそのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ表現とする。そのとき, $\{ \xi \in \mathcal{H} : \int_G | \langle \pi(g) \xi, \xi \rangle |^2 dg < +\infty \}$ が $\mathcal{H}$ の中で稠密であることと, L_G の I_∞ の部分表現になることが同値である。

まず $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$ の場合から考える。

補題 $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$ なら $D\{i_1, \dots, i_r\}$ と $D\{j_1,$

... α は完全に異なる。

(証明) それぞれの表現を $F\{\alpha, \dots, \alpha_r\}$ に制限する。そのとき補題 A を用いると, 一方は $LF\{\alpha, \dots, \alpha_r\} \otimes I$ と同値になるが, もう一方は既約部分表現を含み, 自由群が $I \subset C$ 群であることより, 同値になり得ない。

P_{Y+I} 表現と Yoshizawa 表現が同値になることはすでに [9] によって示されているが, より簡単な証明を与えることができる。

命題. P_{Y+I} 表現と Yoshizawa 表現は同値にならない。

(証明) Yoshizawa 表現が $\langle a_1 \rangle$ によって与えられているとしよう。 a_1 と a_2 の取り替えは F_m の自己同型 α を与える。このとき P_{Y+I} 表現は α -不変だが, Yoshizawa 表現を α で動かすと $\langle a_2 \rangle$ によって与えられる表現になり, もとの表現と同値でない。

次に $r \neq r'$ の場合に表現が決して同値にならないことを示す。

補題 $r \neq r'$ なら $D(I_r)$ と $D(J_{r'})$ は異なる分解を与える。

(証明) $r' \leq r-1$ とする。そのとき $D(I_r), D(J_{r'})$ の表現の $F(J_{r'})$ への制限を考える。前と同じ議論により、既約な部分表現をもつ。F-P [3] 定理 2 (ii) により、 $F(I_r)$ の環関数 ϕ_z は $\phi_z(x) = C_z (2r-1)^{-z|x|} + C_{1-z} (2r-1)^{(z-1)|x|}$ と表されている。この事実と補題 A, 補題 B を用いて可積分性を調べると、前者の制限は $L_F(J_{r'})$ の I_0 の部分表現と同等になり、やはり既約な部分表現を持たない。

補題 $D(I_r)$ は Kawakami 型の分解とは異なる。

(証明) 極大可換部分群を与え $g \in F_n$ をとって $\langle g \rangle$ を作る。この $\langle g \rangle$ に関してこの補題と同様の議論を行なう。やはり $\mathbb{Z}$ の正則表現が既約な部分表現を持たないことから結論が導かれる。

これらすべてをまとめると、

定理. $D\{i_1, \dots, i_r\}$ ($2 \leq r \leq n-1$) は左正則表現の既約分解であり、Pytlík 分解とも Kawakami 分解とも (Yoshizawa 分解とも) 完全に異なる。 r が異なるか $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_{r'} \neq \emptyset$ であればまた互いに完全に異なる。

REFERENCES

- [1] J. Cohen and L. De Michele, Radial Fourier-Stieltjes algebra of free groups, in "Operator algebras and K theory"
- [2] A. Connes and M. Takesaki, The flow of weights on factor of type III, Tôhoku Math. J., 29(1977), 473-575.
- [3] A. Figa-Talamanca and M.A. Picadello, Spherical functions and harmonic analysis on free groups, JFA 47, (1982), 281-304.
- [4] H. Furstenberg, Random walk and discrete subgroups of Lie groups, in "Advances in Probability" Dekker.
- [5] U. Haagerup, An example of a non-nuclear C^* -algebra which has the metric approximation property, Invent. Math., 50, (1979), 279-293.
- [6] S. Kawakami, A remark on decompositions of the regular representations of free groups, Math. Japon., 28 no.3 (1983), 337-340.
- [7] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math., 55, (1952), 101-139.
- [8] S. Popa, Orthogonal pairs of subalgebras in finite von Neumann algebras, J. Operator theory, 9, (1983), 253-268.
- [9] T. Pytlik, Radial functions of free groups and a decomposition of the regular representation into irreducible components, J. reine. Angew. Math., 326, (1981), 124-135.
- [10] H. Yoshizawa, Some remarks on unitary representations of free group, Osaka Math. J., 3, (1951), 55-63.