

ベキ零リ一環の分類

日本文理大学 竹本義夫

Yoshio Takemoto

§1. 序

ベキ零リ一環の分類に関しては、6次元までは G. Văranceanu によりなされているがここではベキ零リ一環の構成と分類を別の方法 (極大ベキ零リ一環を定義し、その部分リ一環としてベキ零リ一環をとらえる) で行う。

§2. $\mathfrak{g}$ の基底

定義 1. R 上の k -step ベキ零リ一環とは、次の 1 次写像の存在する R 上のベクトル空間である。

- (1) $[X, Y] + [Y, X] = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$
- (2) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- (3) $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(h)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(h-1)}] \quad (h \geq 2)$ とするとき
 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0, \mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$

補題 1. $\mathfrak{g}$ をベキ零リ一環、 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ の基底を $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ($n = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$) とする。そのとき、その代表元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を用いて $\mathfrak{g}$ の基底を得ることができる。

(証明)

 $x_{1i} = x_i (1 \leq i \leq n_1 = n)$ とすると

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{R} x_{1i} + \mathcal{F}^{(1)}$$

$$\therefore \mathcal{F}^{(1)} = [\mathcal{F}, \mathcal{F}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{R} [x_{1i}, x_{1j}] + [\mathcal{F}, \mathcal{F}^{(1)}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} \mathbb{R} x_{2i} + \mathcal{F}^{(2)}$$

$x_{2i} (1 \leq i \leq n_2, n_2 = \dim \mathcal{F}^{(1)} / \mathcal{F}^{(2)})$ は $\{[x_{1i}, x_{1j}] / 1 \leq i, j \leq n_1\}$ の中の 1 次独立なベクトルの組
更に

$$\mathcal{F}^{(2)} = [\mathcal{F}, \mathcal{F}^{(1)}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbb{R} [x_{1i}, x_{2j}] + [\mathcal{F}, \mathcal{F}^{(2)}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_3} \mathbb{R} x_{3i} + \mathcal{F}^{(3)}$$

$x_{3i} (1 \leq i \leq n_3, n_3 = \dim \mathcal{F}^{(2)} / \mathcal{F}^{(3)})$ は $\{[x_{1i}, x_{2j}] / 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2\}$ の中の 1 次独立なベクトルの組

これを続けて . . .

$$\mathcal{F}^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{n_{k-1}} \mathbb{R} x_{(k-1)i}$$

$x_{(k-1)i} (1 \leq i \leq n_{k-1}, n_{k-1} = \dim \mathcal{F}^{(k-1)})$ は $\{[x_{1i}, x_{(k-2)j}] / 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_{k-2}\}$ の中の 1 次独立なベクトルの組

これにより $\mathcal{F}$ の基底 $\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{(k-1)n_{k-1}}\}$ を得る。
Q.E.D

定義2. 上の $x_1, x_2, \dots, x_n$ をベキ零リー環の生成元
その個数を rank という。

§3. 極大ベキ零リー環

定義3. k -step, n -rank のベキ零リー環の中で、
最大次元をもつものを極大ベキ零リー環という。

極大ベキ零リー環の生成元を $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$m_1 = \{ x_{i_1} / 1 \leq i_1 \leq n \},$$

$$m_2 = \{ [x_{i_2}, x_{i_1}] / 1 \leq i_1, i_2 \leq n \},$$

$\vdots$

$$m_{k-1} = \{ [x_{i_{k-1}}, \dots, [x_{i_2}, x_{i_1}] \dots] / 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n \},$$

m を $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ の和集合とする。

補題2. 定義1の(1), (2)は次の(1)₁, (2)₁と同値である。

$$(1)_1 \quad [x, Y] = -[Y, x] \quad (x \in m_1, Y \in m)$$

$$(2)_1 \quad [[x, Y], Z] = [x, [Y, Z]] - [Y, [x, Z]]$$

$$(x \in m_1, Y \in m, Z \in m)$$

(証明)

(1), (2) $\Rightarrow$ (1)₁, (2)₁ は明らかである。

逆に(1)₁, (2)₁ から帰納法により 次の(1)_h, (2)_h ($1 \leq h \leq k-1$)

を得る。

$$(1)_h \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad (X \in \mathcal{M}_h, Y \in \mathcal{M})$$

$$(2)_h \quad [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ (X \in \mathcal{M}_h, Y \in \mathcal{M}, Z \in \mathcal{M})$$

i) $h = 1$ の時は、 $(1)_1, (2)_1$ となり成り立つ。

ii) h の時、成り立つとする。

このとき $x \in \mathcal{M}_1, X \in \mathcal{M}_h, Y \in \mathcal{M}$ に対して、

$(1)_{h+1}$:

$$\begin{aligned} & [[x, X], Y] \\ &= [x, [X, Y]] - [X, [x, Y]] && \because (2)_1 \\ &= [x, [X, Y]] + [[x, Y], X] && \because (1)_h \\ &= [x, [X, Y]] + [x, [Y, X]] - [Y, [x, X]] && \because (2)_1 \\ &= -[Y, [x, X]] && \because (1)_h \end{aligned}$$

また $Z \in \mathcal{M}$ に対して、

$(2)_{h+1}$:

$$\begin{aligned} & [[x, X], Y], Z \\ &= [[x, [X, Y]] - [X, [x, Y]], Z] && \because (2)_1 \\ &= ([x, [X, Y]], Z) - ([X, [x, Y]], Z) \\ &= ([x, [[X, Y], Z]] - [[X, Y], [x, Z]]) && \because (2)_1 \\ &\quad - ([X, [[x, Y], Z]] - [[x, Y], [X, Z]]) && \because (2)_h \\ &= ([x, [X, [Y, Z]] - [x, [Y, [X, Z]]]) && \because (2)_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -([X, [Y, [x, Z]]] - [Y, [X, [x, Z]]]) \quad \because (2)_h \\
& -([X, [x, [Y, Z]]] - [X, [Y, [x, Z]]]) \quad \because (2)_1 \\
& +([x, [Y, [X, Z]]] - [Y, [x, [X, Z]]]) \quad \because (2)_1 \\
& =([x, [X, [Y, Z]]] - [X, [x, [Y, Z]]]) \\
& \quad -([Y, [x, [X, Z]]] - [Y, [X, [x, Z]]]) \\
& =[[x, X], [Y, Z]] - [Y, [[x, X], Z]] \quad \because (2)_1 \\
& \qquad \qquad \qquad \text{Q. E. D}
\end{aligned}$$

以下、簡略化の為、次の略記法を用いる。

$$\begin{aligned}
xX &= x^1 X = [x, X], \quad x^0 X = X \quad (x \in \mathcal{M}_1, \\
& X \in \mathcal{M})
\end{aligned}$$

補題3. (2)₁により $\mathcal{M}$ の元のブラケット積は $\mathcal{M}$ の元の1次結合で一意的に表わす事ができる。即ち、

$$\begin{aligned}
(2)'_1 \quad & [x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z] \\
& = \sum_{\substack{\varepsilon_h, \dots, \varepsilon_2 = 0, 1}} (-1)^{\varepsilon_h + \dots + \varepsilon_2} x_{i_h}^{1-\varepsilon_h} \cdots x_{i_2}^{1-\varepsilon_2} x_{i_1}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_h}^{\varepsilon_h} Z \\
& \quad (x_{i_h} \ (1 \leq h \leq k) \in \mathcal{M}_1, Z \in \mathcal{M})
\end{aligned}$$

逆に、(2)'₁により (2)₁ が成り立つ。

証明)

(2)₁ を仮定すると

$$\begin{aligned}
& [x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z] \\
& = x_{i_h} [x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, Z] - [x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1}, x_{i_h} Z] \quad \because (2)_1 \\
& = x_{i_h} x_{i_{h-1}} [x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, Z] - x_{i_h} [x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, x_{i_{h-1}} Z] \quad \because (2)_1
\end{aligned}$$

$$-x_{i_{h-1}}[x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, x_{i_h} z] + [x_{i_{h-2}} \cdots x_{i_1}, x_{i_{h-1}}, x_{i_h} z] \quad \because (2)_1$$

$$= \dots$$

これを続けると $(2)'_1$ を得る。

逆に $(2)'_1$ を仮定し、 $x \in \mathcal{M}_1$, $Y = x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1} \in \mathcal{M}_h$,
 $z \in \mathcal{M}$ とする。

$$[x, [Y, z]]$$

$$= [x x_{i_h} \cdots x_{i_1}, z]$$

$$= \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_h, \dots, \epsilon_2=0,1}} (-1)^{\epsilon_1 + \epsilon_h + \dots + \epsilon_2} x^{1-\epsilon_1} x_{i_h}^{1-\epsilon_h} \cdots x_{i_1}^{\epsilon_h} x^{\epsilon_1} z \quad \because (2)_1$$

$$= x \sum_{\substack{\epsilon_h, \dots, \epsilon_2=0,1}} (-1)^{\epsilon_h + \dots + \epsilon_2} x_{i_h}^{1-\epsilon_h} \cdots x_{i_1}^{\epsilon_h} z$$

$$- \sum_{\substack{\epsilon_h, \dots, \epsilon_2=0,1}} (-1)^{\epsilon_h + \dots + \epsilon_2} x_{i_h}^{1-\epsilon_h} \cdots x_{i_1}^{\epsilon_h} x z$$

$$= [x, [Y, z]] - [Y, [x, z]] \quad \because (2)_1$$

§4. 極大ベキ零リ-環の基底

定義4. $\mathcal{M}_h (1 \leq h \leq k-1)$ の元に (辞書式) 順序を次の
 様にいれる。

- 1) $Y \in \mathcal{M}_{h'}$, $X \in \mathcal{M}_h (h' > h)$ のとき $Y > X$
- 2) $x_{i_{h_0}} > x_{j_{h_0}}$, $x_{i_{(h_0-1)}} = x_{j_{(h_0-1)}}$, $\dots$, $x_{i_1} = x_{j_1}$ を満たす
 $h_0 (h_0 \leq h)$ が存在するとき。

$$x_{i_h} x_{i_{(h-1)}} \cdots x_{i_1} > x_{j_h} x_{j_{(h-1)}} \cdots x_{j_1}$$

と定める。

(1)₁, (2)₁ を使って帰納的に極大ベキ零リ-環の基底をとりだすことができる。

i) $\mathcal{M}_1$ の元の組 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ は 1 次独立だから基底にに入れる。

ii) $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_h}$ を $\mathcal{M}_h$ から取りだした最大個数の 1 次独立な組とする (即ち $n_h = \dim \mathfrak{g}^{(h)} / \mathfrak{g}^{(h+1)}$)。

そのとき $\mathcal{M}_{h+1}$ の全ての元は、

$$\mathcal{M}'_{h+1} = \left\{ \begin{array}{l} x_n Y_{n_h}, x_{n-1} Y_{n_h}, \dots, x_1 Y_{n_h} \\ x_n Y_{n_{h-1}}, x_{n-1} Y_{n_{h-1}}, \dots, x_1 Y_{n_{h-1}} \\ \vdots \\ x_n Y_1, x_{n-1} Y_1, \dots, x_1 Y_1 \end{array} \right\}$$

の元に 1 次従属である。

故に $\mathcal{M}'_{h+1}$ の元から 1 次独立な元を選びだせばよい。

$\mathcal{M}'_{h+1}$ の最大元は、 $x_n Y_{n_h} = -[Y_{n_h}, x_n]$ により $\mathcal{M}'_{h+1}$ 内の線形関係を与える。この関係が恒等式でないならば、その式に表われる最小元を $\mathcal{M}'_{h+1}$ から除く。

以下、 s 番目、 t 番目等の元について同様の手続を行くと最終の $\mathcal{M}'_{h+1}$ は 1 次独立であり求めるものである。

定義 5. $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をリ-環、 f を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ の上への 1 次写像とする。そのとき次の条件を満たす f を同型写像、 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ は

同型であるという。

$$(1) f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

$$(2) X \neq Y \text{ ならば } f(X) \neq f(Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

定義 6. $Y \in \mathfrak{M}_h, X \in \mathfrak{M}_h (h' > h)$ に $Y = x_{h'-h} x_{h'-h-1} \cdots x_{h+1} X$ ($x_i (h+1 \leq i \leq h'-h) \in \mathfrak{M}_1$) の関係があるとき、 Y を X の下位のベクトルという。

定理

- 1) 同じ rank, step をもつ極大ベキ零リ-環 $\mathfrak{g}$ は全て同型である。
- 2) 任意のベキ零リ-環 $\mathfrak{g}$ は同じ rank, step をもつ極大ベキ零リ-環の部分リ-環である。更に $\mathfrak{g}$ の基底は $\mathfrak{g}$ の基底の元に (下位のベクトルを除いて) 順位の高い元との 1 次結合を与え、それらを除くことにより得られる。
逆に、そのような 1 次結合を与えることにより、ベキ零リ-環を得ることができる。

(証明)

- 1) 極大ベキ零リ-環 $\mathfrak{g}$ の基底は、(1)₁, (2)₁ の関係だけを用いて得られるから明らかである。
- 2) § 1, 補題 1 の手順で 1 次独立な元を順位の高い方が

ら取っていい。また下位ベクトルとのノ次結合がある場合には、ベキ零ではなくなる。

逆に上のような線形結合を与えても条件(1), (2)に反しないからベキ零リ-環を得る。

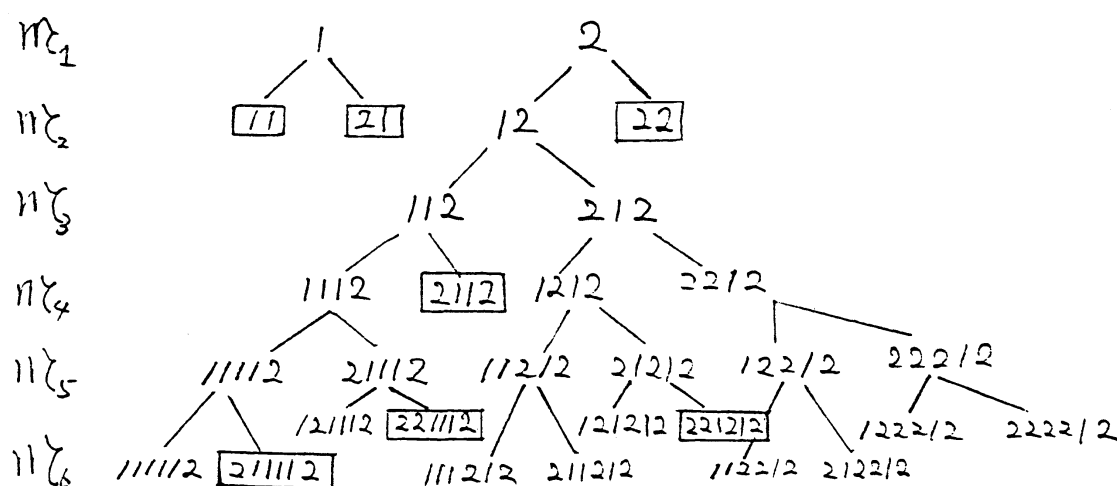
§ 5. 極大ベキ零リ-環の例

§ 4 の方法で得られる例を示す。以下、次の略記法を用いる。

$$i_h i_{h-1} \cdots i_1 = x_{i_h} x_{i_{h-1}} \cdots x_{i_1} \in \mathcal{M}_h \quad (1 \leq h \leq k-1)$$

また $\square$ は他のベクトルに從属するものを表わし、線 $/$ は下位ベクトルへの対応を表わす。

例 2-rank, 6 step ($\mathcal{M}_1 = \{x_1, x_2\}$)



$$11 = 0, 21 = -12, 22 = 0, 2112 = 1212$$

$$21112 = -111212 + 121112 \times 2$$

$$221112 = -121212 \times 3 + 112212 + 211212 \times 3$$

$$221212 = -122212 + 212212 \times 2$$

§ 6. ベキ零リ-環の分類

補題4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を n -rank, k -step のベキ零リ-環、 $\mathcal{A}$ をそれを含む極大ベキ零リ-環、 $\mathcal{M}_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}$ とする。そのとき次の条件は同値である。

1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は同型である。

2) $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{(k-1)n_{k-1}}$ を $\mathcal{B}$ の基底とすると、行列 $A (n \times n, |A| \neq 0)$, $B ((N-n) \times n)$ ($N = \dim \mathcal{B}$) が存在し、 $\mathcal{B}$ の他の生成元として $\{x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*\}$ をとると、 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の基底に同じ線形関係を与える。

但し、

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x_{11}^* \\ x_{12}^* \\ \vdots \\ x_{1n}^* \end{pmatrix} = (A \ B) \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(k-1)n_{k-1}} \end{pmatrix}$$

とする。

(証明)

1) $\Rightarrow$ 2)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が同型ならば、定義5の 1), 2) を満たす $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が存在する。これを用いると、 $x_{1i}^* = f(x_{1i})$ ($1 \leq i \leq n$) は $\mathcal{B}$ の生成元であり、 $\mathcal{A}$ の基底に同じ線形関係を与える。

故に、(*) を満たす A, B が存在する。

2) $\Rightarrow$ 1) は明らかである。

§4 の定理により得られる部分リ一環の可能な場合について、補題4によって同値なものを求めると次のようになる。

1-step (I) 1, 2

2-step (I) 1, 2
12

3-step (I) 1, 2 (II) 1, 2 (III) 1, 2

(I) $\boxed{212} = 0$ (II) $\boxed{112} = 212 \times A$

4-step (I) 1, 2

(I) $\boxed{212} = 0$ $\cong$ $\boxed{112} = 212 \times A$

(II) 1, 2

(II) $\boxed{212} = 1112 \times A \ (A \neq 0)$ $\cong$ $\boxed{112} = 212 \times A + 2212 \times B \ (B \neq 0)$

(III)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1112 \quad 1212 \quad \boxed{2212} \end{array} & \cong & \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad 1212 \quad 2212 \end{array}
 \end{array}$$

$$\boxed{2212} = 0 \qquad \boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2 + 4B = 0)$$

(IV)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1112 \quad \boxed{1212} \quad \boxed{2212} \end{array} & \cong & \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad \boxed{1212} \quad 2212 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{1212} = 0 \\ \boxed{2212} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{1112} = 2212 \times A \\ \boxed{1212} = 2212 \times B \end{array} \quad (B = A^2)$$

(V)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad 1212 \quad \boxed{2212} \end{array} & \cong & \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad \boxed{1212} \quad 2212 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{1112} = 1212 \times A \\ \boxed{2212} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{1112} = 2212 \times A \\ \boxed{2212} = 2212 \times B \end{array} \quad (B < A^2)$$

(VI)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ 1112 \quad \boxed{1212} \quad 2212 \end{array} & \cong & \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad 1212 \quad 2212 \end{array}
 \end{array}$$

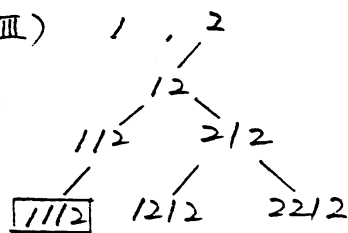
$$\boxed{1212} = 2212 \times A \qquad \boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2 + 4B > 0)$$

(VII)

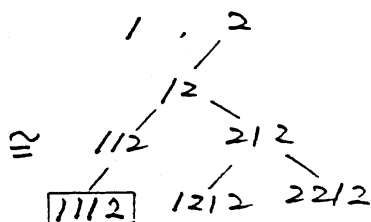
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad \boxed{1212} \quad 2212 \end{array} & \cong & \begin{array}{c} 1, 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 12 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 112 \quad 212 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \boxed{1112} \quad \boxed{1212} \quad 2212 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{1112} = 2212 \\ \boxed{1212} = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{1112} = 2212 \times A \\ \boxed{1212} = 2212 \times B \end{array} \quad (B > A^2)$$

(VIII)

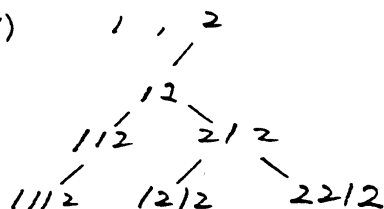


$$\boxed{1112} = -2212$$



$$\boxed{1112} = 1212 \times A + 2212 \times B \quad (A^2 + 4B < 0)$$

(IX)



但し $\boxed{}$ は $\square$ から導かれる。

References

- (1) H. Fujiwara, Affine structures of some solvable Lie groups, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 33 (1979), 346-353.
- (2) Y. Takemoto, Study on construction of an affine structure of nilpotent Lie groups, Bull. Oita Inst. Tech., 10 (1982), 126-132.
- (3) G. Vrăncăanu, Lecții de geometrie diferențială IV, București, 1968.
- (4) S. Yamaguchi, Derivations and affine structures of some nilpotent Lie algebras, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 34 (1980), 151-170.