

有限鏡映群とラプラスianの境界値問題
—— 4次元以上の太鼓の形を音で聴き分ける
ことはできない ——

東北大学 教養部 浦川 肇

- § 1. 問題の設定 (M. Kac の問題とは)
- § 2. 問題の背景 (小史)
- § 3. 得られた結果
- § 4. 証明の概略
- 又 献

§ 1. 問題の設定 (M. Kac の問題とは)

$\mathbb{R}^n$ n 次元ユークリッド空間,

$(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n$ の標準座標

$\Delta_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} ; \mathbb{R}^n$ の普通のラプラスian

とする. 更に, $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω について,

$\Omega \subset \mathbb{R}^n ;$ 境界 $\partial\Omega$ が適当に regular 領域

($\partial\Omega$ は滑らかとは仮定せず. 角を許してもよい, Agmon [1],
12頁 参照. 以下, 考える領域はすべて 有界領域 のみを考える.)

とし, これに対して次の二つの境界値問題を考えよう.

Dirichlet 問題 (固定膜の振動の問題)

$$\begin{cases} \Delta_0 u = \lambda u & , \Omega \text{ 上} \\ u = 0 & , \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

ここに u は, Ω の closure $\bar{\Omega}$ 上の関数で,

恒等的には零でないものとし, λ は定数とする.

Neumann 問題 (自由膜の振動の問題)

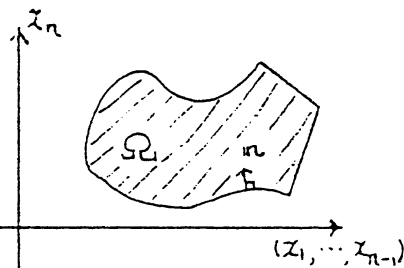
$$\begin{cases} \Delta_0 v = \lambda v & , \Omega \text{ 上} \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & , \text{a.e. } \partial\Omega \end{cases}$$

ここに, v は $\bar{\Omega}$ 上の関数 ($v \neq 0$)

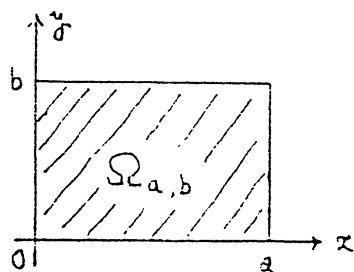
λ は定数, $\frac{\partial}{\partial n}$ は $\partial\Omega$ での単

位内法線ベクトル n に関する微分を表わす. ($\partial\Omega$ の法線ベクトル n が定義される点においてのみ $\frac{\partial}{\partial n}$ を考えるものとする.)

このような u, v は それぞれの問題の 固有関数, λ, ν は 固有値 と呼ばれる.



例 辺長 a, b の長方形 $\Omega_{a,b}$ の Dirichlet, Neumann 問題の固有値, 固有関数はそれぞれ次のように与えられる:



$$\Omega_{a,b} = \{(x, y), 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \text{固有値} & \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \\ \text{固有関数} & \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & (m, n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Neumann 問題

$$\begin{cases} \text{固有値} & \dots \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \\ \text{固有関数} & \dots \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ & (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

さて, それぞれ Dirichlet, Neumann 問題の固有値は $\mathbb{R}$ 内の discrete 部分集合をなし, かつ それぞれの固有値の重複度 (= 対応する固有関数がある $\mathbb{R}$ 上の線形空間の次元) は有限値であることが知られている. そこで, これら固有値を

重複度をこめて, 次のように, 大きさの順に並べよう:

Dirichlet問題 $\text{Spec}_D(\Omega) = \{ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \uparrow \infty \}$

Neumann問題 $\text{Spec}_N(\Omega) = \{ \nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \dots \uparrow \infty \}$

注 $0 < \lambda_1$ かつ $\nu_1 = 0 < \nu_2$ である。

固有値問題: 与えられた Ω に対して, $\text{Spec}_D(\Omega)$,
 $\text{Spec}_N(\Omega)$ を決定せよ!

わづかっ例 (= 長方形 $\Omega_{a,b}$, 円, 扇形 等) を除いて,
ほとんどわかっていない。例えば, 平行四辺形, 多角形, 楕円
等は興味ある領域だから, unknown である。近年, Pinsky
[37], Bérard [4] らの仕事がある。

さて, M. Kac は 1966年 に, 次のような興味ある, 逆固有値問題
を提出した: (cf. Kac [17])

領域 Ω を太鼓とし, $\text{Spec}_D(\Omega)$ とは, $\text{Spec}_N(\Omega)$
と, 太鼓 Ω を叩いた時に出る音 (固有振動) と考えた時,
その音のみで, 太鼓 Ω の形を決定可能かどうか?

なるわけ。

Kacの問題: $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 二つの領域,
 $\text{Spec}_D(\Omega_1) = \text{Spec}_D(\Omega_2)$ とは, $\text{Spec}_N(\Omega_1) = \text{Spec}_N(\Omega_2)$
とある。この時 Ω_1 と Ω_2 とは互いに, 合同であるか。

ここで, Ω_1 と Ω_2 とが: 合同 であるとは,

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換 Φ により, $\Phi(\Omega_1) = \Omega_2$
となる時を言う。

吉田新作：M. Kac 著「太鼓の形を耳で聴けるか？」
 をめぐって — 逆スペクトル問題，数学セミナー，1979年
 9月号，日本評論社，33-39. 1900年生れ
 によると、この M. Kac の論文は物理学者 G. E. Uhlenbeck
 の 65 歳の誕生日の記念講演によるものことである。

注意 1 $n = 1$ の時は、勿論、肯定的である。

注意 2 Ω_1, Ω_2 上に、 $\mathbb{R}^n$ の標準的ユークリッド計量
 によるリーマン計量を与え、それについて、 Ψ が Ω_1 から Ω_2 の
 上への等長写像とする。この時、 Ω_1 と Ω_2 とは合同
 となる、i.e., Ψ は $\mathbb{R}^n$ の等長変換に一意的に拡張される。
 (cf. Kobayashi-Nomizu [19], 252頁, Theorem 6.1)

注意 3 境界のないコンパクト・リーマン多様体の場合
 にも、Kac の問題と類似の問題が設定できる。
 この場合には、J. Milnor [23], A. Ikeda [15], 及び
 M. F. Vignéras [30] による反例が与えられている。

注意 4 $\Omega_1 = \mathbb{D}(\text{disc}) \subset \mathbb{R}^n$ の時、Kac の問題は
 肯定的である、i.e.,

$$\text{Spec}_{\mathbb{D}}(\Omega) = \text{Spec}_{\mathbb{D}}(\mathbb{D}) \quad \text{又は} \quad \text{Spec}_N(\Omega) = \text{Spec}_N(\mathbb{D})$$

ならば、 $\Omega \cong \mathbb{D}$ と合同となる。

実際、 Ω の体積 $\text{Vol}(\Omega)$ は $\text{Vol}(\mathbb{D})$ と一致する (32)。これと次から出る：

Faber-Krahn の定理 (cf. [12], [21])

$$\lambda_1(\Omega) \text{Vol}(\Omega)^{2/n} \geq \lambda_1(\mathbb{D}) \text{Vol}(\mathbb{D})^{2/n}$$

等号が成り立つのは、 Ω が disc の場合に限る。

Weinberger の定理 (cf. [31])

$$\nu_2(\Omega) \text{Vol}(\Omega)^{2/n} \leq \nu_2(\mathbb{D}) \text{Vol}(\mathbb{D})^{2/n}$$

等号が成り立つのは Ω が disc の場合に限る。

§2. 問題の背景 (小, 厂尺) — cf. Bérard [3]

話は Lorentz 予想を解いた 1911 年の H. Weyl [33] の仕事に始まる, Lorentz の予想 とは,

「一様な密度の振動体の固有振動数の分布は, 高周波の極限では, 振動体の形状によらず, その体積だけで定まる。」

というものである。(cf. 加藤敏夫: Lorentz の予想と Weyl-Courant の記録, 科学, 1979 年 6 月号, 396-398)

実際, Weyl は, 任意の正数 λ に対して,

$$N_D(\lambda; \Omega) := \#\{j; \lambda_j \leq \lambda\}$$

$$N_N(\lambda; \Omega) := \#\{j; \nu_j \leq \lambda\}$$

とした時,

$$N_D(\lambda; \Omega) (\text{or } N_N(\lambda; \Omega)) \sim_{\lambda \rightarrow \infty} c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2}$$

$$(\text{即ち } c_n := \frac{(2\pi)^{-n} \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad c_2 = \frac{1}{4\pi}, \quad c_3 = \frac{1}{6\pi^2})$$

を, 更に精密に, $\lambda \rightarrow \infty$ の時,

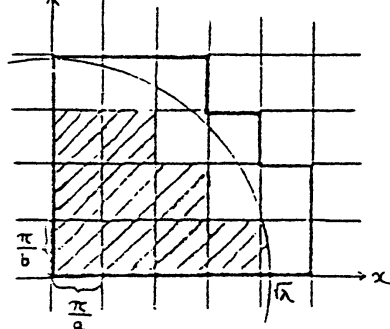
$$N_D(\lambda; \Omega) (\text{or } N_N(\lambda; \Omega)) = c_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \log \lambda)$$

を示した (Weyl [33], [34], Courant [11]). この評価は 主項評価 と呼ばれている。

この残余项 $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \log \lambda)$ は, $n=3$ の時, Seeley [36],
 (一般の n では Pham The Lai [25] により $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ に置き換え
 ておける事が示されている。

例 長方形 $\Omega_{a,b}$ について, $N_D(\lambda; \Omega_{a,b}), N_N(\lambda; \Omega_{a,b})$ が, 上

記漸近挙動を示すには、次のように定められる：



(x, y) 平面上に格子 $\Gamma_{a,b}$
 $\Gamma_{a,b} := \{(\frac{\pi}{a}m, \frac{\pi}{b}n); m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

と取る。正数 λ に対し、

$$B_{\sqrt{\lambda}}(0) := \{(x, y); x^2 + y^2 \leq \lambda\}$$

とする。この時、前述した $\Omega_{a,b}$ の固有値の計算より、直ちに、

$$N_D(\lambda; \Omega_{a,b}) = \#(B_{\sqrt{\lambda}}(0) \cap \Gamma_{a,b} \cap \{(x, y); x, y > 0\}),$$

$$N_N(\lambda; \Omega_{a,b}) = \#(B_{\sqrt{\lambda}}(0) \cap \Gamma_{a,b} \cap \{(x, y); x, y \geq 0\})$$

を得る、(ただし、 $\#P$ は集合 P の元の数個数を表わす。) 故に、

$$N_D(\lambda; \Omega_{a,b}) \times \left(\frac{\pi^2}{ab}\right) = \text{斜線部の面積},$$

$$N_N(\lambda; \Omega_{a,b}) \times \left(\frac{\pi^2}{ab}\right) = \text{実線で囲まれた部分の面積}$$

となる。従って、 λ が十分大の時、

$$\begin{aligned} N_D(\lambda; \Omega_{a,b}) (N_N(\lambda; \Omega_{a,b}) \text{と同様}) &\div \frac{ab}{\pi^2} \times B_{\sqrt{\lambda}}(0) \text{の面積} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{ab}{\pi^2} \times \pi \lambda \times \frac{1}{4} = \frac{ab}{4\pi} \lambda. \end{aligned}$$

これは、 $n=2$ 、 $\Omega = \Omega_{a,b}$ の場合の Weyl-Courant 型の漸近式を表わしている。

このように、Dirichlet、Neumann 問題に対する関数 $N_D(\lambda; \Omega)$ 、 $N_N(\lambda; \Omega)$ の漸近挙動を調べる事は、与えられた原点中心の開球内に含まれる格子点の個数を数え上げる問題（いわゆる格子点問題）と密接に関係している。Bérard [3], Clark [10] に従って、更にこの事情を説明しよう。簡単のため $\Omega_{a,a}$ ($a=b$) で考えよう。

格子点問題は、古くから整数論の分野で研究されてきたが、今日も様々な研究が為されている (例えば Huxley [14], Bernard, Beresnyak [6], 橋爪, etc). リーマン多様体の閉測地線, 基本群の研究, エルゴート理論とも深く関係している。それに付いては,

$$M(r) := \#(B_r(0) \cap \mathbb{Z}^2)$$

= 原点中心 半径 r の閉球内に含まれる整数点の個数

とした時, r : 十分大の時,

$$M(r) = \pi r^2 + O(r^{\frac{2}{3}}) \quad , \quad 1906, \text{Sierpinski}$$

$$(\text{もっと精密に, } M(r) = \pi r^2 + O(r^{24/37}), 1962, \text{Wen Lin Yin [32]})$$

であることが知られている。ここには $N_D(\lambda; \Omega_{a,a})$ 等と $M(r)$ とは

$$4 N_D(\lambda; \Omega_{a,a}) + 4[r] + 1 = M(r)$$

$$+ N_N(\lambda; \Omega_{a,a}) - 4[r] - 1 = M(r) \quad , \quad r = \frac{a}{\pi} \sqrt{\lambda}$$

なる関係を満たす (図を置いてみるのもいい)。 $[r]$ は Gauss の記号,

すなわち,

$$\begin{cases} N_D(\lambda; \Omega_{a,a}) = \frac{1}{4} M(r) - r + O(1) = \frac{a^2}{4\pi} - \frac{4a}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \\ N_N(\lambda; \Omega_{a,a}) = \frac{1}{4} M(r) + r + O(1) = \frac{a^2}{4\pi} + \frac{4a}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

となる。ここでも注意するべき事は、上式は Weyl - Courant 型の評価式。詳しい評価を与えている事である。これに関して次の予想がある:

Weyl's conjecture (2次元で説明する)

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ に対して,}$$

$$N_D(\lambda; \Omega) = \frac{\text{area}(\Omega)}{4\pi} \lambda - \frac{\text{length}(\partial\Omega)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}),$$

$$N_N(\lambda; \Omega) = \frac{\text{area}(\Omega)}{4\pi} \lambda + \frac{\text{length}(\partial\Omega)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

(cf. Ivrii [16], Melrose [22], Bérard [4],)

これまで, $N_0(\lambda; \Omega)$, $N_N(\lambda; \Omega)$ について主な結果を紹介した.

一方, 1934年, T. Carleman [9] によって始められ, Minakshisundaram-Pleijel [24], McKean-Singer [20] によって発展せられたものに, 熱方程式の基本解のトレースを用いて, Dirichlet, Neumann 問題の固有値を研究する方法があり, これは, コンパクトリーマン多様体の固有値問題の研究に多くに活用された (cf. Berger [7], Patodi [38], Atiyah-Bott-Patodi [2], Gilkey [13]).

これは, 正数 t に対し, 絶対収束級数

$$Z_D(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$$

$$Z_N(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$$

の $t=0$ での漸近挙動を調べるものである. それによれば,

$$Z_D(t) \sim_{t \downarrow 0} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{D,k} t^{k/2}$$

$$Z_N(t) \sim_{t \downarrow 0} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{N,k} t^{k/2}$$

となる. ここで,

$$\begin{cases} a_{D,0} = a_{N,0} = \text{Vol}(\Omega) & (\Omega \text{ の } n \text{ 次元体積}) \\ a_{D,1} = -\sqrt{\frac{\pi}{4}} \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega) & (\text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega) \text{ は } \partial\Omega \text{ の } \\ a_{N,1} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega) & n-1 \text{ 次元体積}) \\ a_{D,2} = a_{N,2} = -\frac{1}{6} \int_{\partial\Omega} J & (J(x), x \in \partial\Omega, \text{ は点 } x \in \partial\Omega \\ & \text{での } \partial\Omega \text{ の平均曲率}) \end{cases}$$

等と定まる. Z_D, Z_N と $N_D(\lambda) := N_0(\lambda; \Omega)$, $N_N(\lambda) := N_N(\lambda; \Omega)$

との関係は, Riemann-Stieltjes 積分の定義より

$$Z_D(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} dN_D(\lambda), \quad Z_N(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} dN_N(\lambda)$$

である. ここで, Karamata の Tauber 型定理と合わせて,

$$N_0(\lambda; \Omega) \text{ (及 } N_N(\lambda; \Omega)) = C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2})$$

を得ることが出来る(しかし、この方法では、対数評価までには出て来ない)。

$Z_D(t)$, $Z_N(t)$ の漸近公式より、次のことが言える:

定理

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), n の領域 とする。

$\text{Spec}_D(\Omega_1) = \text{Spec}_D(\Omega_2)$ 又は $\text{Spec}_N(\Omega_1) = \text{Spec}_N(\Omega_2)$

と仮定時、次の幾何的条件を Ω_1, Ω_2 は満たす:

$\text{Vol}(\Omega_1) = \text{Vol}(\Omega_2)$, $\text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_1) = \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_2)$ 及び

$$\int_{\partial\Omega_1} J = \int_{\partial\Omega_2} J, \text{ etc.}$$

(この定理は Kac の問題 に対する 1 つの必要条件, 部分的解決を与える, §1, 注意 4.)

最後に, $N_D(\lambda)$, $N_N(\lambda)$ の重複度 m に対して数え k 番目の固有値 λ_k , ν_k との関係を示す:

λ_k の重複度 $m_k := \#\{j; \lambda_j = \lambda_k\}$ について, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} m_k &= N_D(\lambda_k) - N_D(\lambda_k - \varepsilon) \\ &= C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda_k^{n/2} + o(\lambda_k^{n/2}) - C_n \text{Vol}(\Omega) (\lambda_k - \varepsilon)^{n/2} - o((\lambda_k - \varepsilon)^{n/2}) \\ &= o(\lambda_k^{n/2}) \end{aligned}$$

故に, $k - m_k \leq N_D(\lambda_k) \leq k + m_k$ を用いて,

$$k = C_n \text{Vol}(\Omega) \lambda_k^{n/2} + o(\lambda_k^{n/2}), \text{ 故に}$$

$$\lambda_k = C_n^{-2/n} \text{Vol}(\Omega)^{-2/n} k^{2/n} + o(k^{2/n})$$

となる。(ν_k についても同様である)

この λ_k , ν_k に対する漸近公式に関連して, G. Polya は次の予想を立てた: (cf. Yau [35], 問題集 70 番)

Polya's conjecture

$$\nu_k \leq C_n^{-2/n} \text{Vol}(\Omega)^{-2/n} k^{2/n} \leq \lambda_k \quad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

(Weyl's conjecture が正しいとすれば、十分大なる k について、)
 Pólya's conjecture が正しい事を意味する。

$n=2$ の時、Pólya's conjecture は

$$\nu_k \leq +\pi \text{Vol}(\Omega)^{1/k} \leq \lambda_k, \quad k=1, 2, \dots$$

である。Pólya [26], Kellner [18] は実際次の定理を示した:

定理 (彼らは $n=2$ で行っているが、高次元化はそのままできる)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 平面被覆領域, すなわち, Ω に合同な領域
 におよそ平面を測度 0 の集合を除き, gap なく overlap なく
 に被覆できる, とする。この時,

(i) $\nu_k \leq +\pi \text{Vol}(\Omega)^{1/(k-1)}$, (ii) $+\pi \text{Vol}(\Omega)^{1/k} \leq \lambda_k$,
 $k=1, 2, \dots$ が成立する。

注意 1 どんなような領域が平面被覆領域か? ということを

決定する問題は "タイル張り" の問題と呼ばれ, Hilbert の

第 18 番目の問題と関係する興味ある問題である。

任意の三角形, 四角形はタイル張り可能である。タ

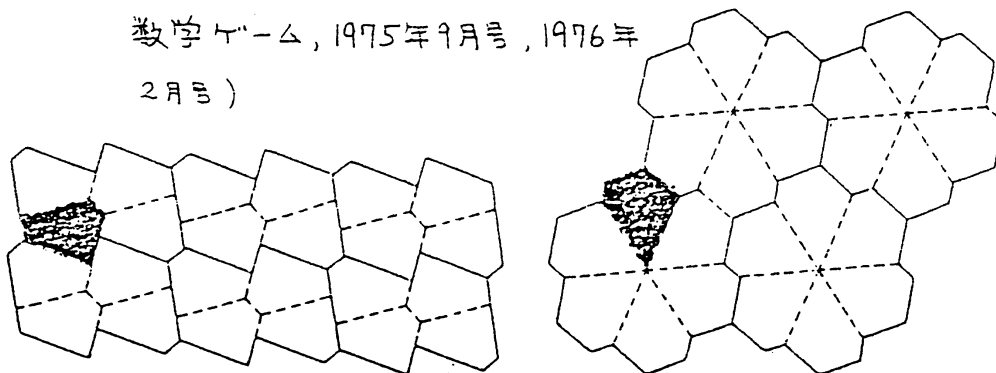
イル張り可能な凸五角形を決定する問題は今なお未

解決である。1918年, K. Reinhardt はタイル張り可

能な凸六角形の分類を行っている。(cf. マーティン・ガードナー:

数学ゲーム, 1975年9月号, 1976年

2月号)





馬に乗った騎士

(「サイエンス」より転載)

1つの基本的な図形を並に並べただけでなく、
それを鏡にうつした時のように、
ひっくり返した図形がシンメトリーになっている。
エッシャーのこうした作品は、
科学への深い造詣に裏付けられたものであるが、
この芸術が現代の心理学等に与えた影響も
見逃さない。

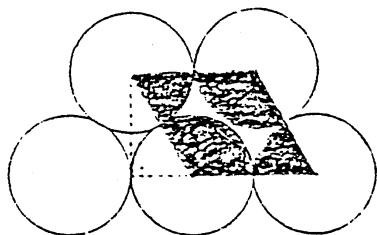
注意2 Polya の予想は、非常に sharp な評価を要求
しているように思われる。Polya の定理 (ii) については
次のように拡張できる:

定理 (cf. Urakawa [29])

$$\lambda_R \geq C_n^{-2/n} V_d(\Omega)^{-2/n} k^{2/n} \delta(\Omega)^{2/n}, \quad k=1,2,\dots$$

ここに、定数 $\delta(\Omega)$ は Ω と合同な図形で overlap
ないに、 $\mathbb{R}^n$ 内に最も密度が大きくなるように詰め込んだ
時の密度の上限を表わす。タイル張り可能な Ω に
対しては、 $\delta(\Omega) = 1$ であるが、更に、凸領域
 Ω に対して、 $\delta(\Omega)^{2/n} \geq \left(\frac{2(n!)^2}{(2n)!} \right)^{2/n} \sim \frac{1}{16} = 0.0625$
となる (cf. Rogers [27])。

例として、 $\Omega = \mathbb{D}_2$: $\mathbb{R}^2$ 内の単位 disc で考えよう。



$$\delta(\mathbb{D}_2) = \frac{\text{1つのdiscの面積}}{\text{平行四辺形の面積}}$$

$$= \pi / 2\sqrt{3}$$

$$= 0.9069. \quad \text{故に上の定理より}$$

$$\lambda_R(\mathbb{D}_2)/R \geq 4 \times 0.9069 = 3.6276 \dots$$

一方, Polya の予想は.

$$\lambda_k(\mathbb{D}_2)/k \geq 4, \quad k=1,2,\dots$$

である. 実際には, $\lambda_k(\mathbb{D}_2)/k$ の数値計算は次のようになる.

$\mathbb{D}_2$ に対する Dirichlet 問題の固有値と固有関数:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{固有値 } \lambda_{n,m} = (j_m^{(n)})^2, \quad m=0,1,2,\dots; n=1,2,\dots \\ \left(\begin{array}{l} m=0 \text{ の時, } \lambda_{n,m} \text{ の重複度} = 1, \\ m=1,2,\dots \text{ の時, } \quad \quad \quad = 2 \end{array} \right) \\ \text{固有関数 } \varphi_{n,m}(re^{i\theta}) = J_m(j_m^{(n)}r) \cos m\theta \quad \text{または} \\ J_m(j_m^{(n)}r) \sin m\theta \end{array} \right.$$

ただし, $J_m(r)$ は m 次 Bessel 関数, $j_m^{(n)}$ はその n 番目の零点.
従って $\lambda_k(\mathbb{D}_2)$ は $(j_m^{(n)})^2$ と $m=0$ の時は重複度=1
と数え, $m=1,2,\dots$ の時は重複度=2 と数え, 小さい順に
並べた時, k 番目に当るものであり, 実際にはこの数値が
どうなるかを求めることは容易でない. 柏川正充氏に計
算センター(東北大)で計算していただいた. その結果は,

" $\mathbb{D}_2$ につき, 2455 番までの固有値について,

Polya 予想は 肯定的である."

No	k	m	n	$j_m^{(n)}$	λ_k/k (求める数値)
1	1	0	1	2.404825558	5.783135963
2	2	1	1	3.831705970	7.340985321
3	4	2	1	5.135622302	6.593654107
4	6	0	2	5.520078110	5.078543724
5	7	3	1	6.380161896	5.815209403
6	9	1	2	7.015586670	5.466717369
7	11	4	1	7.588342435	5.234812809
8	13	2	2	8.417244140	5.449999917
9	15	0	3	8.653727913	4.992467119
10	16	5	1	8.771483816	4.308683021
11	18	3	2	9.761023130	5.293198475
12	20	6	1	9.936109524	4.936313624
13	22	1	3	10.173468135	4.704520632
14	24	4	2	11.064709489	5.101158169
15	26	7	1	11.086370019	4.727215392
16	28	2	3	11.619841172	4.822168176
17	30	0	4	11.791534439	4.634676148
18	31	8	1	12.225092264	4.821060673

650	1276	9	19	72.484349818	4.117539944
651	1278	23	13	72.506260381	4.113581999
652	1280	31	10	72.603106543	4.118133657
653	1282	7	20	72.706551172	4.123434152
654	1284	65	1	72.718301512	4.118342192
655	1286	40	7	72.736045744	4.113944285
656	1288	34	9	72.805076755	4.115356523
657	1290	16	16	72.850543507	4.114109837
658	1292	37	3	72.854898745	4.108232408
659	1294	5	21	72.872161297	4.103826810
660	1296	3	22	72.982080400	4.109864244
661	1298	47	5	73.027921357	4.108638211
662	1300	1	23	73.036895226	4.103375434
663	1302	26	12	73.080932227	4.102014323
664	1304	21	14	73.150087892	4.103478036
665	1306	55	3	73.170526347	4.099433864
666	1308	14	17	73.273096621	4.104699303
667	1310	51	4	73.306668639	4.102189059
668	1312	60	2	73.506694530	4.118318705
669	1314	29	11	73.531116961	4.114783228
670	1316	44	6	73.586288462	4.114697454
671	1318	12	18	73.634641961	4.113854702
672	1320	19	15	73.723414331	4.117531682
673	1322	66	1	73.755069638	4.114833810
674	1324	24	13	73.819651352	4.115316409
675	1326	32	10	73.850533117	4.113047694
1215	2398	34	2	98.929472794	4.081334690
1216	2400	41	14	98.981761730	4.082245435
1217	2402	12	26	99.013841799	4.081903011
1218	2404	21	22	99.033924020	4.083870216
1219	2406	79	3	99.133735886	4.084991252
1220	2408	56	9	99.179346030	4.084942973
1221	2410	10	27	99.242610870	4.086761748
1222	2412	44	13	99.248985022	4.083897607
1223	2414	53	10	99.385588223	4.091754410
1224	2416	47	12	99.410316260	4.090401395
1225	2418	3	28	99.424316480	4.088210973
1226	2420	36	16	99.439784360	4.086062273
1227	2422	63	7	99.447852350	4.083350676
1228	2424	50	11	99.453798041	4.080879747
1229	2426	26	20	99.470335869	4.078506651
1230	2428	19	23	99.498043590	4.077372602
1231	2430	6	29	99.565992669	4.079583085
1232	2432	91	1	99.576688915	4.077104019
1233	2434	31	18	99.594829264	4.075238297
1234	2436	4	30	99.666546818	4.077758848
1235	2438	2	31	99.726765734	4.079338722
1236	2440	0	32	99.746819859	4.077634456
1237	2441	75	4	99.770236734	4.077877975
1238	2443	67	6	99.842834652	4.080471401
1239	2445	17	24	99.867250872	4.079127933
1240	2447	39	15	99.886172951	4.077338597
1241	2449	71	5	99.970660547	4.080903622
1242	2451	85	2	99.982820662	4.078565658
1243	2453	60	8	99.985102434	4.075426298
1244	2455	24	21	99.994343624	4.072858964
1245	2457	0	0	99999.000000000	4069922.670329670

§3. 得られた結果

次の結果が得られた: (cf. Urakawa [28])

定理 1

$\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) における二つの領域 Ω_1, Ω_2 で,
 $\text{Spec}_D(\Omega_1) = \text{Spec}_D(\Omega_2)$ かつ $\text{Spec}_N(\Omega_1) = \text{Spec}_N(\Omega_2)$
 しかし, Ω_1, Ω_2 は互いに合同ではないものが
 存在する。

注意

上の定理は, 4次元以上の場合には, M. Kac の
 問題に対する一つの解答を与えるものである。しかし,
 ここで与えられた例は, 肩コシのように, 角をとり
 領域である。従って, 境界の Ω が滑らかな領域
 Ω に対しては Kac の問題は 2次元以上の $n \geq 2$
 の次元で open である。

Kac の問題に答えるには, $\mathbb{R}^n$ 内の多くの領域に対
 し, 固有値を決定するための手続を待つことが必要である。
 反例の構成は次の方針で行われる:

次のような "truncated cones" D_ε を考える。

$$\mathbb{R}^n \supset D_\varepsilon := \{ r\omega; \varepsilon < r < 1, \omega \in C_\perp \}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

ここで, $C_\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} 内の領域である。

さて, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ の各元を極座標表示して ($\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$)

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \ni x = r\omega \quad (\omega \in S^{n-1}) \longleftrightarrow (r, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$$

とした時, $\mathbb{R}^n$ の普通のラプラシアン Δ_0 は,

$$\Delta_0 = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta$$

と書ける。ここで、 Δ は単位球面 S^{n-1} 上の定曲率 1 のリマン計量に関する、普通のラプラスアン (正値性) である。

さて、この truncated cones D_ε の固有値は、次のように変数分離法によって決定される:

開区間 $(\varepsilon, 1)$ 上の関数 $\Phi(r) \in C_1$ 上の関数 $\Psi(\omega)$ に対して、

$$\Delta_0(\Phi(r)\Psi(\omega)) = -(\Phi''(r) + \frac{n-1}{r}\Phi'(r))\Psi(\omega) + \frac{1}{r^2}\Phi(r)(\Delta\Psi)(\omega)$$

となる。従って、

$$\Delta_0(\Phi(r)\Psi(\omega)) = \lambda \Phi(r)\Psi(\omega), \quad (D_\varepsilon \text{ 上})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\Phi'' - \frac{n-1}{r}\Phi' + \frac{\mu}{r^2}\Phi = \lambda \Phi, & ((\varepsilon, 1) \text{ 上}) \\ \Delta\Psi = \mu\Psi & (C_1 \text{ 上}) \end{cases}$$

となる。 μ は定数である。

一方、 $\partial D_\varepsilon = \bar{C}_1 \cup \varepsilon\bar{C}_1 \cup \{r\partial C_1; \varepsilon < r < 1\}$ 。

($\bar{C}_1, \partial C_1$ は S^{n-1} での C_1 の closure と境界である)

∂D_ε に関する境界条件については、

$$\bar{\Phi}(r)\Psi(\omega) = 0 \quad (\partial D_\varepsilon \text{ 上})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\Phi}(r) = 0 & (r = \varepsilon, 1) \\ \Psi(\omega) = 0 & (\partial C_1 \text{ 上}) \end{cases}$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial n}(\Phi(r)\Psi(\omega)) = 0 \quad \text{a.e. } \partial D_\varepsilon$$

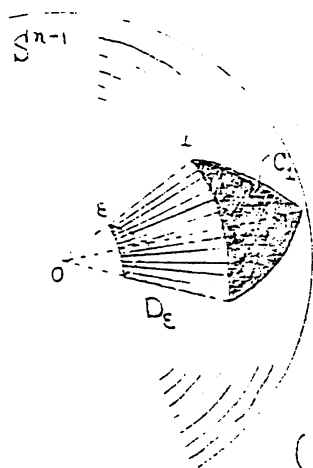
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'(r) = 0 & (r = \varepsilon, 1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & (\text{a.e. } \partial C_1) \end{cases}$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ は、後の n は ∂C_1 の S^{n-1} での内向単位法ベクトル)

そこで、 S^{n-1} 内の領域 C_1 において、Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta\Psi = \mu\Psi & (C_1 \text{ 上}) \\ \Psi = 0 & (\partial C_1 \text{ 上}) \end{cases}$$

及び Neumann 問題



$$\begin{cases} \Delta \Psi = \mu \Psi & (C_1 \text{ 上}) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & (\text{a.e. } \partial C_1) \end{cases}$$

を考え、それらの重複度をこめて数え上げた固有値全体を、

$\text{Spec}_0(C_1)$ 及び $\text{Spec}_N(C_1)$ としよう。

この時 次のことがわかる。

補題

D_ε に対する固有値全体 $\text{Spec}_0(D_\varepsilon)$ は C_1 に対する固有値全体 $\text{Spec}_0(C_1)$ 及び正数 ε により完全に決定される。($\text{Spec}_N(D_\varepsilon)$ についても同様である)
(詳しくは, Urakawa [28] 参照)

そこで、次を示そう：

定理 2

単位球面 S^{n-1} ($n \geq 4$) 内の $n-1$ の領域 $C_1, \tilde{C}_1$ で
 $\text{Spec}_0(C_1) = \text{Spec}_0(\tilde{C}_1)$ かつ $\text{Spec}_N(C_1) = \text{Spec}_N(\tilde{C}_1)$
 しかし $C_1, \tilde{C}_1$ は S^{n-1} で合同でないものが存在する。
 (ここで $C_1, \tilde{C}_1$ が S^{n-1} で 合同 とは、 S^{n-1} の等長変換 Φ が存在して、 $\Phi(C_1) = \tilde{C}_1$ となることをいう。)

この定理 2 における $C_1, \tilde{C}_1$ と正数 ε ($0 < \varepsilon < 1$) に対し、

$$D_\varepsilon := \{r\omega; \varepsilon < r < 1, \omega \in C_1\}, \quad \tilde{D}_\varepsilon := \{r\omega; \varepsilon < r < 1, \omega \in \tilde{C}_1\}$$

とおく。この時、定理 2 と補題より、

$$\text{Spec}_0(D_\varepsilon) = \text{Spec}_0(\tilde{D}_\varepsilon) \quad \text{かつ} \quad \text{Spec}_N(D_\varepsilon) = \text{Spec}_N(\tilde{D}_\varepsilon)$$

が言える。更に、

$$D_\varepsilon, \tilde{D}_\varepsilon \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ で合同} \iff C_1, \tilde{C}_1 \text{ が } S^{n-1} \text{ で合同.}$$

なので求める結論を得る。

さて、定理 2 についてであるが、近年の Bérard-Bessem [5] の仕事を思い起そう。(実は、彼らの仕事に、この仕事は suggest された。) 彼らは、Weyl 群 の部屋と S^{n-1} との共通部分 $C_\perp$ に対して、 $\text{Spec}_D(C_\perp)$, $\text{Spec}_N(C_\perp)$ を決定した。彼らの結果は自然に、有限鏡映群 W の場合に拡張できる。

それによれば、 W の 部屋 と S^{n-1} との共通部分 $C_\perp$ に対して、 $\text{Spec}_D(C_\perp)$, $\text{Spec}_N(C_\perp)$ は、 W の中指数 によって完全に決定される。従って、定理 2 は次の問題に帰着される：

- (A) 同じ $\mathbb{R}^n$ に働く二つの有限鏡映群 $W, \tilde{W}$ で、
- (i) $W, \tilde{W}$ の中指数の集合が両者一致し、かつ
 - (ii) $W, \tilde{W}$ の部屋と S^{n-1} との共通部分 $C_\perp, \tilde{C}_\perp$ が合同でないものを見つけ、

ここで、条件 (ii) は、 $W, \tilde{W}$ の Coxeter グラフ が異なることと同値であることを注意しよう。結局、問題は、

- (B) 同じ $\mathbb{R}^n$ に働く二つの有限鏡映群 $W, \tilde{W}$ で、
- (i) $W, \tilde{W}$ の中指数の集合が両者一致し、かつ
 - (ii) $W, \tilde{W}$ の Coxeter グラフが相異なる、
- となるものを見つけ、

このことに帰着された。このような $W, \tilde{W}$ は、 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) で存在する。

以上の方針で、定理 2 を示すことができる。

§4. 証明の概略

ここでは、前節の最後で述べたことを説明する。

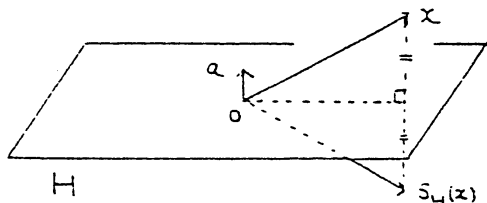
4.1. まず有限鏡映群 W について説明しよう。(cf. Bannhaki [8])

4.1.1.

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の原点を通る有限個の超平面の集合を $\mathcal{H}$ とし、 $H \in \mathcal{H}$ に対し、 H に関する鏡映 S_H を考えよう：

$$S_H(x) := x - \frac{2(x, a)}{(a, a)} a, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(ここで、 $a \in \mathbb{R}^n$ は H と直交するベクトルで、このように a の取り方には、 S_H は依らない。 $S_H \circ S_H = \text{id}$, $\det(S_H) = -1$)
 $S_H \in O(\mathbb{R}^n)$ (直交群) である。



さて、このような鏡映により生成される $O(\mathbb{R}^n)$ の部分群 W を考える：

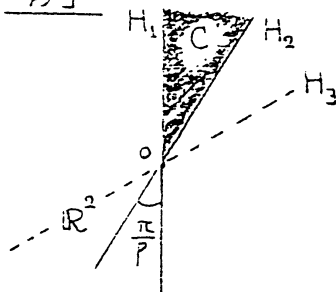
この $W := \langle S_H : H \in \mathcal{H} \rangle$ が有限鏡映群であるとは

(i) W が有限群である、かつ

(ii) $H \in \mathcal{H}$, $s \in W \Rightarrow s(H) \in \mathcal{H}$

を満たす時をいう。

例



2次元平面 $\mathbb{R}^2$ における原点 O を通り $\frac{\pi}{p}$ (p は自然数 ≥ 2) の角を為す p 直線 $H_1, H_2, \dots, H_p$ とする。

$I_2(p) := \langle S_{H_1}, S_{H_2} \rangle$ とすると、これは位数 $2p$ の有限群で、更に、有限鏡映群である。対応する $\mathcal{H}$ は H_1 と

角度 $k\frac{\pi}{p}$ ($k=1, 2, \dots, p$) を为す p 個の直線

となる。 $I_2(p)$ は 2面体群 (dihedral 群) と呼ばれる。

さて, $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ の 1 つの連結成分を 部屋 とし、部屋 C を 1 つとり、 $C_1 := C \cap S^{n-1}$ とする。この C_1 が、考察の対象である。

C の $\mathbb{R}^n$ での closure $\bar{C}$ と W の C_1 の S^{n-1} での closure $\bar{C}_1$ は次の重要な性質をもつ:

(*) $\bar{C}$ は $(\bar{C}_1)$ の W の $\mathbb{R}^n$ での (S^{n-1}) 作用に関する基本領域である。

(**) W は、部屋集合の上に単純推移的に作用する。

4.1.2.

W_i ($1 \leq i \leq s$) をユークリッド空間 E_i に働く有限鏡映群, $W_0 = \{id\}$ とする。この時, W_i ($0 \leq i \leq s$) の直積の群 $W = W_0 \times \cdots \times W_s$ は直積のユークリッド空間 $E = E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_s$ に自然に働き, この作用によって W は有限鏡映群となる。 W に対応する超平面の集合 $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \{ H = E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times H_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_s ; H_i \text{ は } W_i \text{ に対応する } E_i \text{ の超平面である } (1 \leq i \leq s) \}$$

となり、対応する部屋 C は

$C = E_0 \times C_1 \times \cdots \times C_s$ であり、ここで $E_i \supset C_i$ は W_i の部屋である、の形で与えられる。

逆に、任意の有限鏡映群 W は上の通りに分解し

$$W = W_0 \times W_1 \times \cdots \times W_s, \quad E = E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_s$$

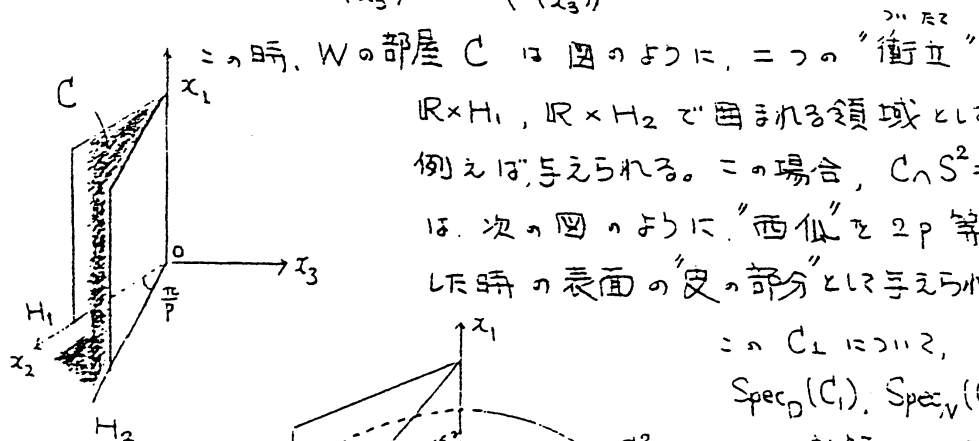
$W_0 = \{id\}$, かつ W_i の E_i への作用は既約 ($1 \leq i \leq s$) とする (ここで W の作用するユークリッド空間を E とした)。

$W' := W_1 \times \cdots \times W_s$, $E' := E_1 \times \cdots \times E_s$ とした時 W' は E' に働く有限鏡映群となるが、この W' は W の essential part と呼ばれる。 W' の部屋 C' は

$$C' = C_1 \times \cdots \times C_s \quad \text{と} \quad \text{なる。}$$

例 $W = \{id\} \times I_2(p)$ は自然に $\mathbb{R}^3$ に次のように作用する:

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ w(x_2) \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad w \in I_2(p)$$



この C_1 について,
 $\text{Spec}_D(C_1)$, $\text{Spec}_V(C_1)$
 の計算を問題と
 しているのである。

4.1.3

次に、有限鏡映群の部屋の構造を述べよう。

有限鏡映群 W (E に働く) の essential part を W' (E' に働く)

とし、 E' を W' の対応する E' の超平面全体とする。

$H \in \mathcal{P}'$ が、 W' の部屋 C' の壁 であるとは $H \cap \overline{C'}$ が H の空でない閉集合を含む時をいう。

$\mathcal{M} : C'$ の壁全体 とし、 $H \in \mathcal{M}$ に対し、

e_H を E' における単位ベクトルで, H と直交し, 超平面 H に関して, C' と同じ側にあるものとする。この時,

$\{e_H : H \in \mathcal{H}\}$ は E' の基底, 従って又, $\#\mathcal{H} = \dim E'$ となることが知られている。 ($\ell := \dim E'$ とおく。) そこで,

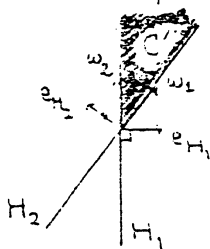
$\mathcal{H} = \{H_i\}_{i=1}^{\ell}$ とし, $\{e_{H_i}\}_{i=1}^{\ell}$ は E' の双対基底 $\{\omega_i\}_{i=1}^{\ell}$

$$\text{i.e., } (\omega_i, e_{H_j}) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq \ell)$$

とする。 $(\cdot, \cdot)$ は E' における内積である。 この時, 部屋 C' は, 原点 O を頂点とする次のような開単体錐となっている:

$$C' = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_i \omega_i \in E' : x_i > 0 (1 \leq i \leq \ell) \right\}.$$

例1 $W' = I_2(p)$ の場合,



さて, 有限鏡映群において,
重要な概念である中指数
について説明しよう。

W' の元 $c = s_{H_1} \cdots s_{H_\ell}$ は W' の

Coxeter 変換という。各 Coxeter 変換は, 部屋の取り方と, $\{H_1, \dots, H_\ell\}$ の番号付に依存するが, 可換で, W' において, 互いに共役であることが知られている。この結果, W' のすべての Coxeter 変換は,

(i) 同一の位数 (Coxeter 数 h と呼ばれる) を持ち,

(ii) 同一の特性多項式 $P(T) = \det(T \text{id} - c)$ を持つ。

この特性多項式は,

$$P(T) = \prod_{j=1}^{\ell} (T - e^{2\pi i m_j / h})$$

ここで, $m_j (j=1, \dots, \ell)$ は非負整数で,

$$0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\ell < h$$

と並べられているとしてよい。この $m_j (j=1, \dots, \ell)$ が W' の中指数である。

例 $I_2(p)$ の場合.

$$e_{H_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_{H_2} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{p} \\ \sin \frac{\pi}{p} \end{pmatrix}$$

より, S_{H_1}, S_{H_2} の定義から,

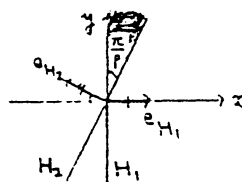
$$S_{H_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$$

$$S_{H_2} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi}{p} & \sin \frac{2\pi}{p} \\ \sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} \end{pmatrix} \quad \text{と与えられる. 従って}$$

$$C = S_{H_1} \circ S_{H_2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} & -\sin \frac{2\pi}{p} \\ \sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} \end{pmatrix},$$

$$P(T) = \det \begin{pmatrix} T - \cos \frac{2\pi}{p} & \sin \frac{2\pi}{p} \\ -\sin \frac{2\pi}{p} & T - \cos \frac{2\pi}{p} \end{pmatrix} = (T - \cos \frac{2\pi}{p})^2 + (\sin \frac{2\pi}{p})^2 \\ = (T - e^{2\pi i/p})(T - e^{-2\pi i/p}). \quad \text{故に,}$$

$I_2(p)$ の Coxeter 数 $= p$, 巾指数 $= \{1, p-1\}$ となる.



$\vec{p}_i, \vec{p}'_i \in W, W'$ に対応する E, E' の超平面の集合とすると, それらの元の個数について,

$$\# \vec{p}_i = \# \vec{p}'_i = \sum_{i=1}^l m_i$$

となる.

4.1.4.

記号は 4.1.3 のとおりとし, 今,

$m_{ij} := W'$ にあける元 $S_{H_i} \circ S_{H_j}$ の位数

とする. このとき,

$$(1) (e_{H_i}, e_{H_j}) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \quad (1 \leq i, j \leq l)$$

$$(2) m_{ij} \geq 2 \quad (i \neq j) \quad \text{i.e.,} \quad (e_{H_i}, e_{H_j}) \leq 0 \\ (m_{ij} = 2 \Leftrightarrow (e_{H_i}, e_{H_j}) = 0)$$

$$(3) m_{ij} = m_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq l) \quad \text{かつ,} \quad m_{ii} = 1 \quad (i=1, \dots, l)$$

となる. 上の条件を m_{ij} を成分行列に持つ l 次の対称行列

$M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$ は Coxeter 行列 と呼ばれる.

この Coxeter 行列 $M = (m_{ij})$ に対し, 次のような l 個の頂点と数 m_{ij} より成る図形 Γ を考える (Coxeter グラフと呼ばれる).

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & l \\ \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{matrix} & & & & \end{matrix}$$

頂点 i と頂点 j について, $m_{ij} \geq 3$ ならば, i と j とを線分で結ぶ. そうでなければ ($m_{ij} = 2$), 結ばない. 特に, $m_{ij} > 3$ の時には, 数字 m_{ij} を, 結んだ線分の上に書き加える.

例 $I_2(p)$ について, $M = \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}$. この Coxeter グラフは,

$$p = 2 \text{ の時, } \quad \circ \quad \circ$$

$$p = 3 \text{ の時, } \quad \circ \text{ --- } \circ$$

$$p \geq 4 \text{ の時, } \quad \circ \text{ --- }^p \text{ --- } \circ \quad \text{となる.}$$

Coxeter グラフ Γ の s 個の頂点 a, b が結ばれているとは,

$a = x_0, b = x_r$ となる Γ の頂点 $x_j (j=0, 1, \dots, r)$ で, 各頂点 x_j

と x_{j+1} とが線分で結ばれている時をいう.

又, Γ のそれぞれ結ばれている部分集合の極大集合を Γ の連結成分と云う.

この時, essential な有限鏡映群 $W' = W_1 \times \cdots \times W_s, E' = E_1 \times \cdots \times E_s$ (各 W_i は E_i に既約に働いているとする) に対応する Coxeter グラフは, s 個の連結成分 $\Gamma_i (i=1, \dots, s)$ より成り, 各 Γ_i は, それぞれ, W_i の Coxeter グラフとなる.

したがって既約な有限鏡映群の Coxeter グラフは次の表のとおりか 1 つと一致する:

Coxeter グラフ	頂点数	Coxeter 数	# $\frac{r}{2}$	群の位数
$A_l (l \geq 1)$	$1, 2, \dots, l$	$l+1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	$(l+1)!$
$B_l (l \geq 2)$	$1, 3, 5, \dots, 2l-3, 2l-1$	$2l$	l^2	$2^l \cdot l!$
$D_l (l \geq 4)$	$1, 3, 5, \dots, 2l-3, l-1$	$2l-2$	$l(l-1)$	$2^{l-1} \cdot l!$

E_6		1, 4, 5, 7, 8, 11	12	36	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
E_7		1, 5, 7, 9, 11, 13, 17	18	63	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
E_8		1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	30	120	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
F_4		1, 5, 7, 11	12	24	$2^7 \cdot 3^2$
G_2		1, 5	6	6	12
H_3		1, 5, 9	10	15	120
H_4		1, 11, 19, 29	30	60	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
$I_2(p) (p=5, p \geq 7)$		1, p-1	p	p	2p

$A_n \sim G_2$ に対する有限鏡映群は Weyl 群 と呼ばれる。
(以上で有限鏡映群の説明は終った。)

4.2. さて, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に働く有限鏡映群 W に対する部屋 C と球面 S^{n-1} との共通部分 C_1 は...

$$\text{Spec}_{\mathbb{C}}(C_1), \text{Spec}_{\mathbb{N}}(C_1)$$

を決定せよ。

Dirichlet 問題 を考えよ。

このため, 今, 天狗的に, $f \in C^\infty(S^{n-1})$ で

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta f = \lambda f & (S^{n-1} \text{ 上}) \\ w \cdot f(x) = (\det w) f(x), & x \in S^{n-1}, w \in W \end{cases}$$

を満たすものを考えよう。ただし $w \cdot f(x) := f(w^{-1}(x))$ である。

そこで, f の C_1 への制限 (同じ f とかく) を考えると,

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f & (C_1 \text{ 上}) \\ f = 0 & (\partial C_1 \text{ 上}) \end{cases} \quad \text{を満たす。}$$

実際, 境界条件を調べると, C_1 の作り方が, x を通る

超平面 $H \in \mathcal{H}$ が存在する。この時, $S_H(x) = x$, f の条件より,

$$f(x) = f(S_H(x)) = (\det S_H) f(x) = -f(x), \text{ 従って } f(x) = 0.$$

こつて, (★) を満す $f \in C^\infty(S^{n-1})$ あり, C_1 に対する Dirichlet 問題の解が得られた.

実は Dirichlet 問題の解は, 常に, このよりにして得られる. すなわち, f_1 を解とする. この時, $\overline{C_1}$ は, W の S^{n-1} への作用について, 基本領域になっていること (★) と (★★) より, f_1 を S^{n-1} 全体の関数 f に,

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x), & x \in C_1 \\ f(w^{-1}(x)) = (\det w) f_1(x), & x \in C_1, w \in W \end{cases}$$

により拡張できる.

この f は, 実は, $S^{n-1} \cong C^\infty$ となることがわかる. 従つて, f は (★) を満たす.

こつて, $\text{Spec}_D(C_1)$ を求めるには, (★) について考えればよいことに帰着された.

ところで, S^{n-1} 上の ラプラスアン Δ の固有値は,

$$k(k+n-2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

であり, 固有値 $k(k+n-2)$ に対する固有関数は, すべて, $\mathbb{R}^n$ 上の k 次調和多項式の S^{n-1} への制限によつて得られる.

$$H_k(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \text{ 上の } k \text{ 次斉次多項式 } P \text{ で, } \Delta P = 0 \text{ となるもの (} k \text{ 次調和多項式) 全体,}$$

$$H_k^a(\mathbb{R}^n) := \{ P \in H_k(\mathbb{R}^n) ; w \cdot P = (\det w) P, \forall w \in W \}$$

$$h_k^a(n) := \dim H_k^a(\mathbb{R}^n)$$

となる. この時, 上列したことがり,

補題 1 C_1 に対する Dirichlet 問題の固有値はすべて, 集合 $\{k(k+n-2); k = 0, 1, 2, \dots\}$ に属し, 更に,

$k(k+n-2)$ が実際に固有値となるための必要十分条件は $h_k^a(n) \neq 0$ である。

この時、固有値 $k(k+n-2)$ の重複度は $h_k^a(n)$ である。

C_L に対する Neumann 問題についても、同様に、
 $f \in C^\infty(S^{n-1})$ で、

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f & (S^{n-1} \text{ 上}) \\ w \cdot f = f & (\forall w \in W) \end{cases}$$

を満すものの正否はわからないことがわかる。そこで、

$$H_k^i(\mathbb{R}^n) := \{P \in H_k(\mathbb{R}^n); w \cdot P = P, \forall w \in W\}$$

$$h_k^i(n) := \dim H_k^i(\mathbb{R}^n)$$

とする。この時、

補題 1' C_L に対する Neumann 問題の固有値は次の

集合 $\{k(k+n-2); k=0, 1, 2, \dots\}$ に属し、更に、

$k(k+n-2)$ が実際に固有値となるための必要十分条件は、 $h_k^i(n) \neq 0$ である。

この時、固有値 $k(k+n-2)$ の重複度は $h_k^i(n)$ である。

したがって、 $h_k^a(n), h_k^i(n) (k=0, 1, 2, \dots)$ を決定

することによって問題は帰着されたが、このために、次の級数

(Poincaré 級数) を考える：

$$F^a(T) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k^a(n) T^k,$$

$$F^i(T) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k^i(n) T^k$$

この級数 $F^a(T), F^i(T)$ を決定すること、 $\text{Spec}_D(C_1), \text{Spec}_N(C_1)$

を決定することは同等である。 W の作用による不変多項式環に関する Poincaré 級数の理論を用いて、 $F^a(T), F^i(T)$

は次のように決定される:

命題 2

$$F^i(T) = \frac{1-T^2}{\prod_{j=1}^n (1-T^{m_j+1})}, \quad F^a(T) = T^d \cdot F^i(T),$$

ここで, $\{m_j\}_{j=1}^n$ は $W = \{\lambda\} \times W'$, $\mathbb{R}^n = E_0 \times E'$,
 (W', E') は W の essential part とした時に,
 $\underbrace{0, \dots, 0}_{\dim E_0}$ 及び W' の中指数 列になる。又,
 $d = \# \bar{c}_2 = \sum_{j=1}^n m_j$ である。

例 4.1. における例 C_1 について, $F^i(T)$, $F^a(T)$ がどの
 ふうになるかをみよう。

$\mathbb{R}^3$ における $W = \{\lambda\} \times I_2(p)$ の, 命題 2 における

$\{m_j\}_{j=1}^n$ は, $\{0, 1, p-1\}$ になる。従って,

$$F^i(T) = \frac{1-T^2}{(1-T)(1-T^2)(1-T^p)} = \frac{1}{(1-T)(1-T^p)}$$

$$F^a(T) = \frac{T^p}{(1-T)(1-T^p)} \quad \text{となる。}$$

これを形式的に下級数展開した時, T^k の係数
 がそれぞれ Neumann, Dirichlet 問題の固有値

$k(k+1)$ ($n=3$) の重複度を与える:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-T)(1-T^p)} &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} T^l \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} T^{pm} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^l T^{m+p(l-m)} \right), \end{aligned}$$

$N(k) := \# \{ (l, m) ; m+p(l-m) = k, 0 \leq m \leq l \}$ となる。

Neumann 問題の時,

$N(k) \neq 0 \Leftrightarrow k(k+1)$ が固有値,

この時, $k(k+1)$ の重複度 $= N(k)$ である。

Dunkley 問題の時.

$k < p$ の時, $k(k+1)$ は固有値でない.

$k \geq p$ の時, $N(k-p) \neq 0 \Leftrightarrow k(k+1)$ が固有値,

この時, $k(k+1)$ の重複度 $= N(k-p)$ となる.

さて, 命題 2 より, 次の定理が得られる.

定理 3

$W, \tilde{W}$ が同一の $\mathbb{R}^n$ に作用する有限鏡映群,

$W = \{id\} \times W', \tilde{W} = \{id\} \times \tilde{W}', \mathbb{R}^n = E_0 \times E', \mathbb{R}^n = \tilde{E}_0 \times \tilde{E}'$,

$W', \tilde{W}'$ は $E', \tilde{E}'$ に働く $W, \tilde{W}$ の essential part,

とし, $C, \tilde{C}$ は $W, \tilde{W}$ の部屋.

$C_1 := C \cap S^{n-1}, \tilde{C}_1 := \tilde{C} \cap S^{n-1}$ とする. この時,

(1) $\dim E_0 = \dim \tilde{E}_0$ かつ, $W', \tilde{W}'$ の中指数の集合は一致するとする. この時

$$\text{Spec}_D(C_1) = \text{Spec}_D(\tilde{C}_1) \text{ かつ } \text{Spec}_N(C_1) = \text{Spec}_N(\tilde{C}_1)$$

となる.

(2) $E_0 = \tilde{E}_0$ かつ $E' = \tilde{E}'$ とする. この時

$C_1, \tilde{C}_1$ が S^{n-1} で合同

$\Leftrightarrow W', \tilde{W}'$ の Coxeter グラフが同一, とする.

実際, (2) については,

$C_1, \tilde{C}_1$ が S^{n-1} で合同

$\Leftrightarrow C, \tilde{C}$ が $\mathbb{R}^n$ で合同

$\Leftrightarrow C', \tilde{C}'$ が E' で合同, E' の等長変換重みには $\tilde{C}' = \tilde{C}$

(ここで $C = E_0 \times C', \tilde{C} = E_0 \times \tilde{C}', C', \tilde{C}'$ は E' における原点および頂点とする開単体錐である.)

すなわち $\tilde{C}'$ は $W', \tilde{W}'$ に対する E' の超平面の集合とすると,

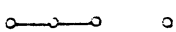
$$\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}' = \{\Phi(H) ; H \in \mathcal{H}'\}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{W}' = \Phi W' \Phi^{-1}, \text{ i.e., } W', \tilde{W}' \text{ の Coxeter グラフ が一致}$$

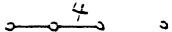
4.3. 最後に, Π 指数の集合が一致し, Coxeter グラフの相異なる二つの有限鏡映群の例をさがし, それらの対応する部屋がどのような図形になるかをみよう。

求める例として, 次のものがある。(他にもたくさんできる。)

例 1

$A_3 \times A_1$	$A_2 \times B_2$	
1, 2, 3, 4	1, 2, 1, 3	Π 指数
		Coxeter グラフ

例 2

$B_3 \times A_1$	$B_2 \times G_2$	
1, 3, 5, 4	1, 3, 1, 5	Π 指数
		Coxeter グラフ

これらの部屋をそれぞれみてみよう, これらは, Coxeter グラフから読み取れる。

例 1 の時,

$$A_3 \times A_1 \text{ の部屋} = \left\{ \sum_{i=1}^4 x_i \omega_i ; x_i > 0 (i=1, \dots, 4) \right\}$$

ω_4 は, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ と直交しているわけではない。

$\{\omega_i\}_{i=1}^3$ について, これは, $\{e_{H_i}\}_{i=1}^3$ の双対基底であった。

単位ベクトル $e_{H_i} (i=1, 2, 3)$ の互いの角度の関係は, Coxeter グラフ (Coxeter 行列) からわかる (cf. 4.1.4):

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{cf. 4.1.4}$$

$\angle(e_{H_1}, e_{H_2}) = 120^\circ$, $\angle(e_{H_2}, e_{H_3}) = 120^\circ$, $\angle(e_{H_1}, e_{H_3}) = 90^\circ$
となる。図に示す,

$$e_{H_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{oa}, \quad e_{H_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{ob}, \quad e_{H_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{oc}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ と ω_4 に直交する $\mathbb{R}^4$ の 3次元部分空間の正規直交基底とした時,

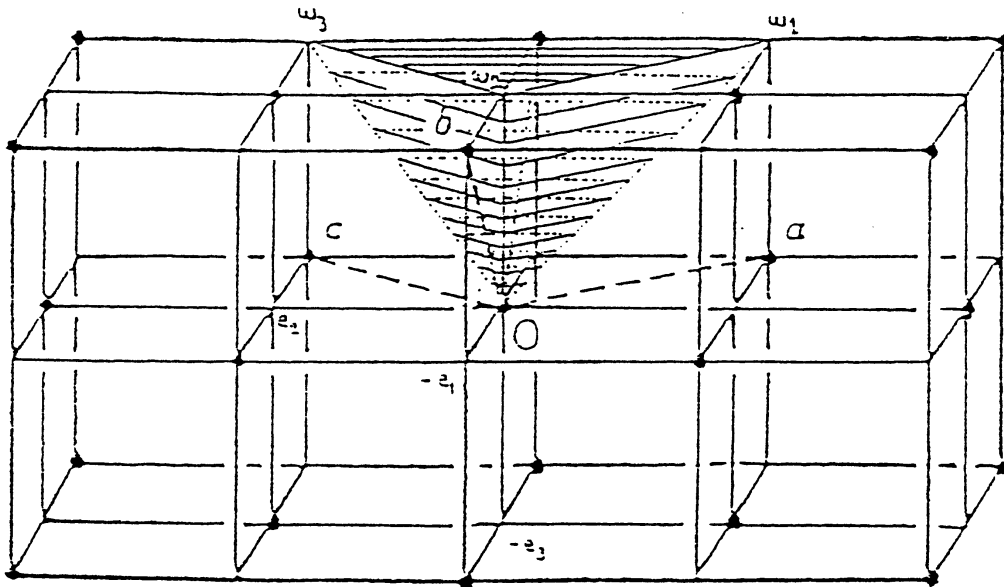
$$\vec{oa} = e_1 - e_2, \quad \vec{ob} = -e_1 + e_3, \quad \vec{oc} = e_1 + e_2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2 + e_3), \quad \omega_2 = \sqrt{2} e_3, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2 + e_3)$$

となる。(図では, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の方向のみを示してある。)

$$\angle(\omega_1, \omega_2) = \arctan \sqrt{2} = 54.7356 \dots^\circ$$

である。



次に $A_2 \times B_2$ の部屋 $= \{ \sum_{i=1}^4 y_i \tilde{\omega}_i ; y_i > 0 (i=1, \dots, 4) \}$

を調べよう。

$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ と $\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$ とは直交してゐなければならぬ。

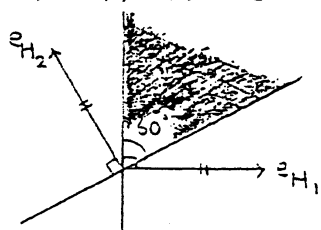
$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ が A_2 型, $\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$ が B_2 型に対応してゐる

としてゐる。

$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ は $\{e_{H_1}, e_{H_2}\}$ の双対基底であり, A_2 型の Coxeter グラフ

$$\text{---} \circ \text{---}$$

より $\angle(e_{H_1}, e_{H_2}) = 120^\circ$ となる。従って、
 $\angle(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = 60^\circ$ である。

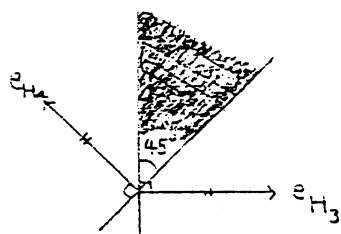


A_2 型の部屋 (斜線部)

$\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4$ は $\{e_{H_3}, e_{H_4}\}$ の双対基底であり, B_2 型の Coxeter グラフ

$$\text{---} \underset{4}{\circ} \text{---}$$

より, $\angle(e_{H_3}, e_{H_4}) = 135^\circ$ となる。故に, $\angle(\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4) = 45^\circ$



B_2 型の部屋 (斜線部)

より, $A_3 \times A_1, A_2 \times B_2$ のそれぞれの部屋がわかったが、両者は、等長変換により移り合えることができない。なぜならば、合同であるといは、錐の母線

$\mathbb{R}^+ \omega_1, \mathbb{R}^+ \omega_2$ が、もう一方の錐の母線に移っていくことはならないが、 $\angle(\omega_1, \omega_2) = \arctan \sqrt{2} = 54.7356 \dots^\circ$ であり、それは不可能である。

(例 2 についても同様にできる。)

References

- [1] S. Agmon, Lecture Notes on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Company, Tronto, Princeton, New York, London, 1965
- 及び アグモン, 楕円型境界値問題, 吉岡書店, 1968
- [2] M.F. Atiyah, R. Bott and V.K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.*, 19(1973)279-330.
- [3] P.H. Bérard, Lattice Point Problems and Eigenvalue Asymptotics, Seminar on Math. Sciences, no.2, Keio Univ., 1980.
- [4] _____, Spectres et groupes cristallographiques I: Domaines Euclidiens, *Invent. Math.*, 58(1980)179-199.
- [5] _____ and G. Besson, Spectres et groupes cristallographiques II: domaines spheriques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 30(3)(1980) 237-248.
- [6] L. Berard Bergery, Sur les longueurs des geodesiques periodiques et le spectre des formes d'espace hyperbolique compactes, *Variétés a Courbure Negative, Seminaire Geometrie Riemannienne, Publ. Math. Univ. Paris VII*, 1970-1971, 87-122.
- [7] M. Beger, P. Gauduchon and E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math., 197, Springer, 1971.
- [8] N. Bourbaki, *Groupes et Algebres de Lie*, Chapitres 4 à 6, Hermann Paris, 1968.
- [9] T. Carleman, Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, 8th Scand. Math. Congress(1934), *Collected Works*, Malmö, 1960, 471-483.
- [10] C. Clark, The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems, *SIAM Review*, 9(1967) 627-646.
- [11] R. Courant, Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, *Math. Z.*, 7(1920)1-57.
- なお R. コーラン, D. ヒルベルト, 数理物理学の方法, 東京図書.

- [12] G.Faber, Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleichner Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitz. ber. bayer. Acad. Wiss.(1923)169-172.
- [13] P.Gilkey, The spectral geometry of a Riemannian manifold, J. Diff. Geom.,10(1975)601-618.
- [14] H.Huber, Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, Math. Ann.,138(1959)1-26.
- [15] A.Ikeda, On lens spaces which are isospectral but not isometric, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, 13(1980)303-315.
- [16] V.Ya.Ivrii, Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, Funct. Anal. Appl.,14(2)(1980)98-105.
- [17] M.Kac, Can one hear the shape of a drum ? , Amer.Math. Monthly. 73(1966)1-23.
- [18] R.Kellner, On a theorem of Pólya, Amer. Math. Monthly,73(1966) 856-858.
- [19] S.Kobayashi and K.Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol I, Interscience Publ.,New York,London,1963.
- [20] H.P.McKean and I.M.Singer, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom., 1(1967)43-69.
- [21] E.Krahn, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann.,94(1925)97-100.
- [22] R.Melrose, Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary, Proceedings of Symp. in Pure Math 36,Geometry of the Laplace Operator, Amer. Math. Soc.(1980)257-274.
- [23] J. Milnor, Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds, Proc. Nat. Acad. Sc.,51(1964)542.
- [24] S.Minakshisundaram and Å.Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds, Canad. J. Math.,1(1949)242-256.
- [25] Pham The Lai, Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonctions spectrale et des valeurs propres relatifs au lapla-

cien, C.R.Acad. Sc. Paris, 289(1979)463-466.

[26] G.Pólya, On the eigenvalues of vibrating membranes, Proc. London Math. Soc., 11(1961)419-433.

[27] C.A.Rogers, Packing and Covering, Cambridge Univ. Press, London, 1964.

[28] H.Urakawa, Bounded domains which are isospectral but not congruent, (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t.15(3)(1982))

[29] _____, Lower bounds for the eigenvalues of the fixed vibrating membrane problems (preprint).

[30] M.F.Vignéras, Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques, Ann. Math., 112(1980)21-32.

[31] H.F.Weinberger, An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem, J. Rat. Mech. Anal., 5(1956)533-536.

[32] Wen Lin Yin, The lattice points in a circle, Sci. Sinica, 11(1962)10-15.

[33] H.Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Gottinger Nachr., 110(1911)110-117.

[34] _____, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte einerer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraum strahlung), Math. Ann. 71(1912)441-479.

[35] S.T.Yau, Seminar on Differential Geometry, Annals of Math. Studies, 102, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1982.

[36] S.Seeley, A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$, Advances Math., 29(1978) 244-269.

[37] M.A.Finsky, The eigenvalues of an equilateral triangle, SIAM J. Math. Anal., 11(5)(1980)819-827.

[38] V.K.Patodi, Curvature and the eigenforms of the Laplace operator, J. Diff.Geom., 5(1971)233-249.