ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.63-70

Riemann対称空間上の球型Fourier変換に対する Hardy-Littlewood-Paleyの定理について

鳥取大 教養部　　熊原啓作

$\mathbb{R}^n$ における標題の定理は次のようなものである([3], p.175).

<u>定理</u>　f の Fourier 変換を $\hat{f}$ とする。

(a)　$1 < p \leq 2$ とすると，定数 A_p が存在して，すべての $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^p |\xi|^{n(p-2)} d\xi\right)^{1/p} \leq A_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \qquad (1)$$

が成立する.

(b)　$2 \leq q < \infty$ とする. $f(x)|x|^{n(1-\frac{2}{q})} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ならば, $\hat{f}$ が存在し, f に関係しない定数 A_q が存在して,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q} \leq A_q \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q |x|^{n(q-2)} dx\right)^{1/q}$$

が成立する.

$p=2$, $q=2$ のときは，(a), (b) ともに Plancherel の公式である．Plancherel の公式の L^p への拡張としては，別に Hausdorff-Young の定理があるが，それについては [1] で考察した。(b) については [2] において，一般の Riemann 対称空間でこの型の定理が成立することが示された。

この小論において，(a) の型の不等式を少し考察したい。

$G=\mathbb{R}^n$, $K=\{e\}$ として対称空間 $G/K\cong\mathbb{R}^n$ の球関数 $\varphi_\xi(x)=e^{i\langle\xi,x\rangle}$ は Laplace-Beltrami 作用素 $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2$ の固有関数：$\Delta\varphi_\xi=-\chi(\xi)\varphi_\xi$, $\chi(\xi)=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$, である．(1) の左辺の $|\xi|$ は $\chi(\xi)^{\frac{1}{2}}$ と見なされる．

G を中心が有限な非コンパクト連結半単純 Lie 群，K をその極大コンパクト部分群とする。$G=KAN$ を一つの岩沢分解，対応する Lie 環とその分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$ とし，$\dim G/K=n$, $\operatorname{rank} G/K=l$ とする。$\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の実双対，Σ を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の正のルート系，Σ_0 を Σ の元で，Σ の他の元の整数倍にならないもの全体とする．$\alpha\in\Sigma\cup(-\Sigma)$ の重複度を $m(\alpha)$ とする。$\lambda\in\mathfrak{g}^*$ がルートでないときは $m(\lambda)=0$ とおく．$\alpha\in\Sigma_0$ に対して $a(\alpha)=m(\alpha)+m(2\alpha)$, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}m(\alpha)\alpha$ とおく．$\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$ に対して

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda-\rho)(H(xk))}\,dk$$

とおく．ただし $\int_K dk = 1$，　$x \in K\exp(H(x))N$ である．

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して $\chi(\lambda) = |\lambda|^2 + |\rho|^2$，$\Delta$ を G/K 上の Laplace-Beltrami 作用素とすれば

$$\Delta\varphi_\lambda = -\chi(\lambda)\,\varphi_\lambda$$

である。$f \in L^1(K\backslash G/K)$ の球型 Fourier 変換は

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(x)\,\varphi_{-\lambda}(x)\,dx$$

によって定義される。$C(\lambda)$ を Harish-Chandra の c-関数，w を G/K の Weyl 群の位数とすれば，$L^1(K\backslash G/K) \cap L^2(K\backslash G/K)$ 上の Fourier 変換が $L^2(K\backslash G/K)$ に拡張されて，適当な測度の正規化の下で，$f \in L^2(K\backslash G/K)$ に対して

$$\int_{\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\lambda)|^2 |C(\lambda)|^{-2} d\lambda = w \int_G |f(x)|^2 dx \tag{2}$$

が成立する．

ここでは $\mathbb{R}^n$ の場合の (a) より弱い形であるが，次の定理が成立することを示そう．

<u>定理</u>　$1 < p \leqq 2$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $A_{p,\varepsilon}$ が存在して，すべての $f \in L^p(K\backslash G/K)$ に対して

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\lambda)|^p \chi(\lambda)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(p-2)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\right)^{1/p} \leqq A_{p,\varepsilon}\left(\int_G |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

が成立する。

補題1.（[1] p.234） すべての $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$|c(\lambda)|^{-2} \leqq B \prod_{\alpha\in\Sigma_0} |\langle\lambda,\alpha\rangle|^2 (1+|\langle\lambda,\alpha\rangle|)^{a(\alpha)-2} \tag{3}$$

をみたす定数 B が存在する。

補題2.（[1] p.244） $1<p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする。$K\backslash G/K$ 上のすべての単関数 f に対して，

$$\prod_{\alpha\in\Sigma_0} |i+\langle\lambda,\alpha\rangle|^{\frac{a(\alpha)}{q}} |\hat{f}(\lambda)| \leqq C_p \|f\|_p, \quad (\lambda\in\mathfrak{a}^*) \tag{4}$$

となる（λ, f に関係しない）定数 C_p が存在する。

（注）[1] では (8.1), (8.2) 式において $\frac{a(\alpha)}{q}$ が抜け落ちているので補う必要がある。

(4) より

$$|\hat{f}(\lambda)|^p \leqq C_p^p \|f\|_p^p \prod_{\alpha\in\Sigma_0} |i+\langle\lambda,\alpha\rangle|^{a(\alpha)(1-p)} \tag{5}$$

(2), (4) より $1<p<2$, f が単関数ならば,

$$\int_{\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\lambda)|^p (|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(p-2)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

$$\leqq B C_p^p \|f\|_p^p \int_{\mathfrak{a}^*} (|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(p-2)} \prod_{\alpha\in\Sigma_0} |\langle\lambda,\alpha\rangle|^2 (1+|\langle\lambda,\alpha\rangle|)^{a(\alpha)-2}$$

$$\times |i+\langle\lambda,\alpha\rangle|^{a(\alpha)(1-p)} \, d\lambda \tag{6}$$

$1<p_0<\frac{\ell+2\varepsilon}{\ell+\varepsilon}$ とする. $M>0$ として, $|\lambda|\geqq M$ ならば

$$\prod_{\alpha\in\Sigma_0} |\langle\lambda,\alpha\rangle|^2 (1+|\langle\lambda,\alpha\rangle|)^{a(\alpha)-2} |i+\langle\lambda,\alpha\rangle|^{a(\alpha)(1-p)}$$

$$\leqq C_{M,p} \prod_{\alpha\in\Sigma_0} (|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\frac{a(\alpha)}{2}(2-p)} = C_{M,p}(|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\frac{\dim N}{2}(2-p)}$$

となる $C_{M,p}>0$ がある. $p=p_0$ とすると, (6) の積分の $M\leqq|\lambda|$ なる部分は $\dim N = \dim G - \dim K - \dim A = n-\ell$ であるから,

$$\int_{|\lambda|\geqq M} (|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-\frac{n-\ell}{2}\right)(p_0-2)} d\lambda$$

$$= \int_M^\infty (t^2+|\rho|^2)^{\frac{\ell+\varepsilon}{2}(p_0-2)} t^{\ell-1} dt \tag{7}$$

$(\ell+\varepsilon)(p_0-2)+\ell < \ell+2\varepsilon-2(\ell+\varepsilon)+\ell=0$ だから (7) は

収束．$|\lambda|\leqq M$ の部分の積分はもちろん有限．よって

$$A_{p_0,\varepsilon}=C_{p_0}\left(B\int_{\mathfrak{a}^*}(|\lambda|^2+|\rho|^2)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(p_0-2)}\prod_{\alpha\in\Sigma_0}|\langle\lambda,\alpha\rangle|^2\left(1+|\langle\lambda,\alpha\rangle|\right)^{a(\alpha)-2}\right.$$
$$\left.\times\,|i+\langle\lambda,\alpha\rangle|^{a(\alpha)(1-p_0)}\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

とおく．すると定理が $p=p_0$ に対して成立．

ここで E. M. Stein による次の補間定理（[4], p.485）を用いる．

<u>補題</u>　M, N を測度空間，k_0, k_1 を N 上の，u_0, u_1 を N 上の非負可測関数とする．T を M の単関数を N 上の可測関数に写す一次変換とする．$1\leqq p_0, p_1, q_0, q_1\leqq\infty$ と仮定し，$0\leqq t\leqq 1$ に対して，$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}$, $\frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$ とおく．単関数 f に対して

$$\|(Tf)\cdot k_0\|_{q_0}\leqq M_0\|f\cdot u_0\|_{p_0},$$
$$\|(Tf)\cdot k_1\|_{q_1}\leqq M_1\|f\cdot u_1\|_{p_1}$$

が成立するとする．$k=k_0^{1-t}\cdot k_1^{t}$, $u=u_0^{1-t}\cdot u_1^{t}$ とする．すると T は $\|f\cdot u\|_p<\infty$ なる関数 f 上の一次変換に一意的に拡張され，$M_t=M_0^{1-t}\cdot M_1^{t}$ とするとき，

$$\|(Tf)\cdot k\|_q\leqq M_t\|f\cdot u\|_p$$

が成立する.

ここで M を $(K\backslash G/K, dx)$, N を $(\mathfrak{a}^*, |c(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ $(Tf)(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, $p_0 = q_0$ を $1 < p_0 < \frac{\ell+2\varepsilon}{\ell+\varepsilon}$ なる数, $p_1 = q_1 = 2$, $u_0 = u_1 \equiv 1$, $k_0 = \chi(\lambda)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(1-\frac{2}{p_0})}$, $k_1 \equiv 1$ とおく. $1 < p < 2$ なる任意の p に対して, $1 < p_0 < p$ で上の条件をみたす p_0 をとり, $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{2}$ なる t をとる. すると, $u \equiv 1$. $(1-\frac{2}{p_0})(1-t) = 1-\frac{2}{p}$ だから,

$$\therefore k(\lambda) = \chi(\lambda)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(1-\frac{2}{p})}.$$

$M_0 = A_{p_0,\varepsilon}$, $M_1 = w^{\frac{1}{2}}$, $A_{p,\varepsilon} = M_t$ とおけば, すべての $f \in L^p(K\backslash G/K)$ に対して

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\lambda)|^p \chi(\lambda)^{\frac{n+\varepsilon}{2}(p-2)} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda\right)^{1/p} \leq A_{p,\varepsilon} \|f\|_p$$

がえられる.

References

[1] M.Eguchi and K.Kumahara, An L^p Fourier analysis on symmetric spaces, J.Funct.Anal.47(1982),230-246.

[2] M.Eguchi and K.Kumahara, A Hardy-Littlewood theorem for spherical Fourier transforms on symmetric spaces, in preparation.

[3] C.Sadosky, Interpolation of Operators and Singular Integrals, Marcel Dekker, New York/Basel, 1979.

[4] E.M.Stein, Interpolation of linear operators, Trans.Amer. Math.Soc.83(1956),482-492.