ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.45-62

Reductive Lie 群上の Eisenstein 積分の漸近展開について

広島大 総合科学部 江口正晃

1. 序

1.1. 要約

G を実 reductive リー群で (1) $\mathrm{Ad}(G) \subset G_c$ (= $\mathfrak{g}_c$ の複素 adjoint リー群. 但し $\mathfrak{g}$ は G のリー環, (2) $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に対応する G の解析的部分群 G_1 の中心は有限, (3) $[G : G^0] < \infty$, G^0 は G の単位元の連結成分, の3条件をみたすとする. この様なリー群を class $\mathcal{H}$ の群という. $G = KAN$ を岩沢分解とし $\dim A = 1$ とする. K の double 表現を固定したとき, それに対応する G 上の Eisenstein 積分の Harish-Chandra 展開が, A のユニタリ dual のある compact subset (自然に定まる) を除いたところでは一様近似を与えるということを Trombi [6] が示し, [7] でその結果を用いて G 上の K-finite 型の L^p $(0<p<2)$ 急減少関数の Fourier 像を与えた. この報告では Trombi [6] の結果を精密にし, Eisenstein 積分の近似として, その Harish-Chandra 展開のある項までをとったとき, 実はその近似が K

のdouble表現τ，Mの既約ユニタリ表現σについても多項式orderの良い一様近似を与えていることを示す。この結果はG/Kの場合の[3]のものと類似している。

1.2. 記号と準備

θをCartan involution，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{s}$を$\theta$に対応するCartan分解，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{s}$とする．$F=\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}^*$，$F_c=\mathfrak{a}_c^*$，$F_R=\mathfrak{a}^*$（$\mathfrak{a}^*$は$\mathfrak{a}$の実双対空間）と表す．$x\in G$は岩沢分解によって一意的に$x=K(x)\exp H(x)n(x)$（$K(x)\in K$，$H(x)\in\mathfrak{a}$，$n(x)\in N$）と表される．いつものように$\rho(H)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}H|_{\mathfrak{n}}$（$H\in\mathfrak{a}$）とおく．Cartan分解によって$x=k\exp X$（$k\in K$，$X\in\mathfrak{s}$）であるとき$\sigma(x)=\|X\|$（長さはKilling form Bで計ったもの），$\Xi(x)=\int_K e^{-\rho(H(xk))}dk$（$dk$は$\int_K dk=1$と正規化されたK上のHaar measure）とおく．

このとき

$$1\le e^{\rho(\log a)}\Xi(a)\le C(1+\sigma(a))\ ,\quad a\in A^+ \qquad (1.1)$$

となる$C>0$が存在する。

KやMの既約ユニタリ表現の“長さ”を各々その最高weightsのKilling formによる長さによって定義する．$\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\mu_i$（$\mu_i$はKの既約ユニタリ表現）のとき$\|\mu\|=\sum_{i=1}^{n}\|\mu_i\|$とおく．またある多項式$p$が存在し，$\mu$の表現空間$V_\mu$の次元$d(\mu)$は

$$d(\mu)=\dim V_\mu\le p(\|\mu\|) \qquad (1.3)$$

更に μ の微分表現も μ で，μ の M への制限を μ_M と表すと

$$\|\mu(X)\| \leq p(\|\mu\|)\|X\|, \qquad X \in \mathfrak{k} \tag{1.4}$$

$$\|\mu_M\| \leq p(\|\mu\|). \tag{1.5}$$

(cf. 杉浦[5]，Arthur[2])．K の double ユニタリ表現 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ に対しては $\|\tau\| = \|\tau_1\| + \|\tau_2\|$ とおく．

2. Eisenstein 積分

M の既約ユニタリ表現の同値類を $\mathcal{E}_M$ で表し，各 $\sigma \in \mathcal{E}_M$ に対し代表元を1つづつ選んでおき，それをも σ で表すことにする．また K の有限次元 double ユニタリ表現の同値類の集合を F_K^2 で表わす。F_K^2 についても同様の約束をしておく．$\sigma \in \mathcal{E}_M$ に対し，その行列要素で生成されるM上の Schwartz 空間 $\mathcal{C}(M)$ の閉部分空間を $\mathcal{C}_\sigma(M)$ で表す。$(\tau, V_\tau) \in F_K^2$，$\sigma \in \mathcal{E}_M$ のとき

$$\mathcal{C}(M, \tau_M) = \{ \psi \in \mathcal{C}(M) \otimes V_\tau,\ \ \tau_M\text{-spherical} \}$$

$$\mathcal{C}_\sigma(M, \tau_M) = \{ \mathcal{C}_\sigma(M) \otimes V_\tau \} \cap \mathcal{C}(M, \tau_M)$$

とおく．ここで $\tau_M = \tau|_M$．

$\tau = (\tau_1, \tau_2) \in F_K^2$，$\sigma \in \mathcal{E}_M$，$\psi \in \mathcal{C}_\sigma(M, \tau_M)$，$\nu \in \mathcal{F}_c$ に対し

$$E(\tau : \sigma : \psi : \nu : x) = E(\psi : \nu : x) = \int_K \psi(xk)\tau(k^{-1}) e^{(\nu - \rho)(H(xk))} dk$$

$(x \in G)$ を Eisenstein 積分という．ここで $\psi(1) \in \{ v \in V_\tau ;\ \tau_1(m)v = v\tau_2(m),\ m \in M \} = V_\tau^M$ で $\psi(x) = \tau_1(K(x))\psi(1)$ によって ψ

は G 上に拡げられているものとする．

$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(F_c)$ を F_c 上の多項式微分作用素の algebra，$\mathcal{G}$ を $\mathfrak{g}_c$ 上の展開環とし $\mathcal{G}^{(2)}=\mathcal{G}\times\mathcal{G}$，$\tilde{\mathcal{G}}=\mathfrak{D}\times\mathcal{G}^{(2)}$ と表わす．次の結果は Arthur[2] によるもので高位の近似評価を得る perturbation method の出発点となる評価式である．

Lemma 2.1. $D\in\tilde{\mathcal{G}}$ に対し，適当な多項式 p がとれて，$\tau\in F_K^2$，$\sigma\in\mathcal{E}_M$，$\psi\in\mathcal{C}_\sigma(M,\tau_M)$，$\nu\in F$ および $x\in G$ に対して

$$\|DE(\tau:\sigma:\psi:\nu:x)\|\leq\|\psi\|p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(x))\Xi(x).$$

3. Eisenstein積分が満す基本的微分方程式

$\mathfrak{h}_k$ を $\mathfrak{m}$ の CSA とすると $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_k+\mathfrak{a}$ $\mathfrak{g}$ の θ-stable CSA である．$(1,\mathfrak{m}_c)$，$(1,\mathfrak{a}_c)$，$(1,\mathfrak{h}_c)$ で生成される $\mathcal{G}$ の subalgebra を夫々 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{H}$ と表す．$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$，$(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{h})$ $(\mathfrak{m}_1=\mathfrak{m}+\mathfrak{a})$ の Weyl 群を夫々 $W_\mathfrak{g}$，$W_{\mathfrak{m}_1}$ とかく．この時 canonical map $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}:\mathfrak{Z}\to\mathfrak{H}^{W_\mathfrak{g}}$ ($=\mathfrak{H}$ の元で $W_\mathfrak{g}$ 不変なもの全体のつくる subalgebra) 及び $\mu_{\mathfrak{m}_1/\mathfrak{h}}:\mathfrak{Z}_\mathfrak{m}\mathfrak{A}\to\mathfrak{H}^{W_{\mathfrak{m}_1}}$ が知られている．$z\in\mathfrak{Z}$，$\Lambda\in\mathfrak{h}_c^*$ に対して $\chi_\Lambda(z)=\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(z:\Lambda)$ とおく．次の結果は良く知られている．

Lemma 3.1. $\tau\in F_K^2$，$\sigma=\sigma(\lambda)\in\mathcal{E}_M$，$\psi\in\mathcal{C}_\sigma(M,\tau_M)$，$\nu\in F$，$x\in G$ とする．このとき Eisenstein 積分は次の微分方程式を満す．

$$E(\tau:\sigma:\psi:\nu:x\,;z)=\chi_{\lambda+\nu}(z)\,E(\tau:\sigma:\psi:\nu:x), \qquad (z\in\mathfrak{Z})$$

$H\in\mathfrak{a}^+$ を $\|H\|=1$ なる元，$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の唯一の simple root を α_0 と表すと $\|\alpha_0\|=\alpha_0(H)$. $\Lambda=\lambda+\nu$, $\lambda\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^*$ $\nu\in\mathcal{F}$ とおく. $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の正の roots (compatible order に関する) の全体を $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ そのうち $\mathfrak{a}$ に制限して消えないもの全体を Δ_+ とおく. 各 $\alpha\in\Delta_+$ に対し $\tilde{\alpha}=\alpha|\mathfrak{a}$ と表すと $B(Q_{\tilde{\alpha}},H)=\tilde{\alpha}(H)$ $(H\in\mathfrak{a})$ を満す $Q_{\tilde{\alpha}}\in\mathfrak{a}$ が唯一つ定まる. また各 root $\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に対して $X_{\pm\alpha}\in\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ を $B(X_\alpha,X_{-\alpha})=1$, 更に $X_{\pm\alpha}=Y_{\pm\alpha}+Z_{\pm\alpha}$ ($Y_{\pm\alpha}\in\mathfrak{k}_c$, $Z_{\pm\alpha}\in\mathfrak{s}_c$ と表す。 今 F が V_τ に値を持つ τ-spherical 関数で $(zF)(x)=\chi_\Lambda(z)F(x)$,$(z\in\mathfrak{Z},\ x\in G)$ を満すとする. $d_P(a)=e^{\rho(H(a))}$ $(a\in A)$ で定まる A 上の関数 d_P は A 上の微分作用素とみなす. $\mathfrak{G}$ および $\mathfrak{M}$ の Casimir 作用素を各々 ω, ω_m と表わすとき，作用素 $d_P\circ\omega\circ d_P^{-1}$ は球関数に対して次の右辺で作用する (cf. Warner [10], Corollary 9.1.2.12)

$$\begin{aligned}
d_P\circ\omega\circ d_P^{-1} &= d_P\circ\omega_m\circ d_P^{-1}+\gamma(\omega)+2\sum_{\alpha\in\Delta_+} e^{-2\alpha}(1-e^{-2\alpha})^{-1}d_P\circ Q_{\tilde{\alpha}}\circ d_P^{-1}\\
&\quad -8\sum_{\alpha\in\Delta_+} e^{-2\alpha}(1-e^{-2\alpha})^{-2}\{d_P\circ Y_\alpha Y_{-\alpha}\circ d_P^{-1}+d_P\circ(Y_\alpha Y_{-\alpha})^{a^{-1}}\circ d_P^{-1}\}\\
&\quad +8\sum_{\alpha\in\Delta_+} e^{-\alpha}(1+e^{-2\alpha})(1-e^{-2\alpha})^{-2}d_P\circ Y_\alpha^{a^{-1}}Y_{-\alpha}\circ d_P^{-1}
\end{aligned}$$

$(a\in A'=\{\exp tH=a_t\ ;\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$. 但し $\gamma(\omega)=H^2-\|\rho\|^2$.

$F_1(a) = d_{\mathfrak{p}}(a)F(a)$, $F_2(a) = F_1(a; H) = F(a; H\circ d_{\mathfrak{p}})$ $(a \in A)$ とおく。 $\mathbb{V}_\tau = V_\tau \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ とおき $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j})$ $(j=1,2)$ とする. X_j $(j=1,2)$, $\gamma(\Lambda) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ をこの基底に関して

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_\Lambda(\omega) + \|\rho\|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

で表わされるものとし, $\mathbb{B}: A' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_\tau, \mathbb{V}_\tau)$ を次で与えられる写像とする:

$$\mathbb{B}(\tau : a_t) = \xi(t) 1 \otimes X_1 + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \eta_\alpha(t) \left(\tau_1(Y_\alpha Y_{-\alpha}) + \tau_2(Y_\alpha Y_{-\alpha})\right) \otimes X_2$$

$$+ \sum_{\alpha \in \Delta_+} \zeta_\alpha(t) \tau_1(Y_\alpha) \tau_2(Y_{-\alpha}) \otimes X_2 - \|\rho\| \xi(t) 1 \otimes X_2,$$

ここで $\xi(t)$, $\eta_\alpha(t)$, $\zeta_\alpha(t)$ は次で与えられる.

$$\xi(t) = -2\|\alpha_0\| \left[p e^{-2\|\alpha_0\| t} / (1 - e^{-2\|\alpha_0\| t}) + 2q e^{-4\|\alpha_0\| t} / (1 - e^{-4\|\alpha_0\| t}) \right]$$

$$(\ p = \dim \mathfrak{g}_{\alpha_0}, \quad q = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha_0} \ )$$

$$\eta_\alpha(t) = 8 e^{-2\alpha(H)t} / (1 - e^{-2\alpha(H)t})^2$$

$$\zeta_\alpha(t) = -8 e^{-\alpha(H)t} (1 + e^{-2\alpha(H)t}) / (1 - e^{-2\alpha(H)t})^2.$$

この時 $\mathbb{F}(a) = F_1(a) \otimes e_1 + F_2(a) \otimes e_2$ に関して次の微分方程式が得られる:

$$\frac{d\mathbb{F}}{dt}(a_t) = \left(1 \otimes \gamma(\Lambda) - \tau_2(\omega_{\mathfrak{m}}) \otimes X_2 + \mathbb{B}(\tau : a_t)\right) \mathbb{F}(a_t). \tag{3.5}$$

L_τ を $\|\alpha_0\|(1 \otimes X_1)$, $\|\alpha_0\| \|\rho\| (1 \otimes X_2)$, $\tau_1(Y_\alpha Y_{-\alpha}) \otimes X_2 + \tau_2(Y_\alpha Y_{-\alpha}) \otimes X_2$

及び $\tau_1(Y_\alpha)\tau_2(Y_{-\alpha})\otimes X_2$ $(\alpha\in\Delta_+)$達で張られる $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_\tau,\mathbb{V}_\tau)$ の加法部分群とする.

Lemma 3.2. (i) 各 $k\in\mathbb{Z}^+$, $k>0$ に対して $\exists B(k)\in L_\tau$ s.t.

$$\mathbb{B}(\tau:a)=\sum_{k\geq 1} B^\tau(k)\, e^{-k\alpha_0(H(a))},\qquad (a\in A^+).$$

級数は $a\in A(\upsilon)=\{a\in A;\ \alpha_0(H(a))>\upsilon\}$, $(\upsilon>0)$ において絶対かつ一様収束する.

(ii) $\forall \ell\in\mathbb{Z}^+$ に対し, $\mathbb{B}(\tau:a;H^\ell)=\sum_{k\geq 1} B^\tau_\ell(k)\, e^{-k\alpha_0(H(a))}$,

ここで $B^\tau_\ell(k)=(-k\alpha_0(H))^\ell B^\tau(k)$ で収束は(i)と同様.

(iii) $\exists p$: 多項式 s.t.

$$\|B^\tau(k)\|\leq k\,p(\|\tau\|)\quad かつ\quad \|B^\tau_\ell(k)\|\leq k^{\ell+1}p(\|\tau\|). \qquad (3.7)$$

$L\in\mathbb{Z}^+$ に対して $B_L(\tau:a)=\sum_{k\geq L+1} B^\tau(k)\, e^{-k\alpha_0(H(a))}$, $(a\in A^+)$ とおく。この時上記補題から多項式 p, および $\upsilon>0$, $\ell, L\in\mathbb{Z}^+$ に対して適当な定数 $b_{\ell,L,\upsilon}>0$ がとれて次の不等式が成立つ:

$$\|B_L(\tau:a;H^\ell)\|\leq b_{\ell,L,\upsilon}\,p(\|\tau\|)\,e^{-(L+1)\alpha_0(H(a))},\quad (a\in A(\upsilon))\qquad (3.9)$$

特に

$$\|\mathbb{B}(\tau:a;H^\ell)\|\leq b_{\ell,\upsilon}\,p(\|\tau\|)\,e^{-\alpha_0(H(a))},\quad (a\in A(\upsilon))\qquad (3.10)$$

が成立つ多項式 p と定数 $b_{\ell,\upsilon}>0$ が存在することが分る.

$\mathcal{E}_\tau = \{ \theta_i \ ; \ 1 \leq i \leq r_\tau \}$ を $\tau_2(\omega_m)$ の相異る固有値全体の集合とする。 $r_\tau \leq \dim V_\tau$ であるから，(1.3)によって適当な多項式 p を選んで次のように評価される.

$$r_\tau \leq p(\|\tau\|) \qquad (\tau \in F_K^2) \tag{3.11}$$

$V_{\tau,i} = \{ v \in V_\tau \ ; v\tau_2(\omega_m) = \theta_i v \}$ $(1 \leq i \leq r_\tau)$ と表すと $V_\tau = \bigoplus_{i=1}^{r_\tau} V_{\tau,i}$, $\mathbb{V}_\tau = \sum_{i=1}^{r_\tau} V_{\tau,i} \otimes \mathbb{C}^2 = \sum_{i=1}^{r_\tau} \mathbb{V}_{\tau,i}$ と書ける. 更に $\mathbb{V}_{\tau,i}$ 上

$$\Gamma(\tau : \Lambda) = 1 \otimes \gamma(\Lambda) - \tau_2(\omega_m) \otimes X_2 \tag{3.12}$$

は $\gamma(\Lambda) - \theta_i X_2$ として働き，それは標準基底に関して行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \|\lambda\|^2 - \|\nu\|^2 - \|\lambda_{\delta_i}\|^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

で表わされる。 λ_{δ_i} は $[\tau_2, \delta_i]_M > 0$ なる $\delta_i \in \mathcal{E}_M$ を表す最高 weight で $\mu_{m/\mathfrak{h}_K}(\omega : \lambda_{\delta_i}) = \theta_i$ となる。

$$F_\lambda = \{ \nu \in F \ ; \ \|\nu\| > \|\lambda\| \}$$

と表し， $\nu \in F_\lambda$ に対し

$$\mu_i = \mu(\lambda : \nu : \theta_i) = (\|\nu\|^2 - \|\lambda\|^2 + \|\lambda_{\delta_i}\|^2)^{1/2} \tag{3.14}$$

とおくと $\mu_i > 0$ である. 更に $d > 0$ に対して次の様におく：

$$F_\lambda(d) = \{ \nu \in F \ ; \ \|\nu\| > \|\lambda\| + d \}.$$

Lemma 3.3. $d > 0$ に対し $C_d > 0$ が存在し，適当な多項式 p を取ると， $\tau \in F_K^2$, $\lambda \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_k^*$, $\nu \in F_\lambda(d)$ および i $(1 \leq i \leq r_\tau)$

に対して次が成り立つ：

$$\mu(\lambda : \nu : \theta_i) + \mu(\lambda : \nu : \theta_i)^{-1} < C_d\, p(\|\tau\| + \|\lambda\| + \|\nu\|). \tag{3.15}$$

（3.13）の行列は固有値 $\pm\sqrt{-1}\mu_i$ および固有ベクトル $(1, \pm\sqrt{-1}\mu_i)$ を持つ． $\mathbb{V}_{\tau, i, \pm\mu_i} = V_{\tau, i} \otimes (e_1 \pm \sqrt{-1}\mu_i e_2)$ とおくと $\mathbb{V}_\tau = \sum_{i, \varepsilon} \mathbb{V}_{\tau, i, \varepsilon\mu_i}$（直和）と表される． $E_i(\pm\mu_i)$ を $\mathbb{V}_{\tau, i, \pm\mu_i}$ 上への射影とすれば次の2つの結果が得られる．但し $\Lambda = \lambda + \nu$.

Lemma 3.4. (i) $\Gamma(\tau : \Lambda) E_i(\pm\mu_i) = \pm\sqrt{-1}\mu_i E_i(\pm\mu_i) \quad (1 \leq i \leq r_\tau)$

(ii) $\sum_{i, \varepsilon} E_i(\varepsilon\mu_i) = I$, $\quad I =$ 恒等変換

(iii) $E_i(\varepsilon\mu_i) E_j(\varepsilon'\mu_j) = \delta_{ij}\delta_{\varepsilon\varepsilon'} E_i(\varepsilon\mu_i)$

Lemma 3.5. $d > 0$ とする. $C = C_d > 0$ および多項式 p が存在し， $\tau \in F_K^2$, λ, $\nu \in F_\lambda(d)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ 及び $i\ (1 \leq i \leq r_\tau)$ に対して次が成り立つ：

$$\|E_i(\varepsilon\mu_i)\| \leq C\, p(\|\tau\| + \|\lambda\| + \|\nu\|),$$

$$\|e^{t\Gamma(\tau : \Lambda)}\| \leq C\, p(\|\tau\| + \|\lambda\| + \|\nu\|).$$

4. Eisenstein 積分の漸近展開

各 $(\tau, V_\tau) \in F_K^2$, $\sigma \in \mathcal{E}_M$ に対して関数 $(\nu, x) \longrightarrow \phi(\tau : \sigma : \nu : x)$ は $F \times G$ 上の V_τ-値 C^∞ τ-球関数とし，その様な ϕ 全体の集

合を $C^\infty(F_K^2\times\mathcal{E}_M\times\mathcal{F}\times G)$ で表す．$\phi\in C^\infty(F_K^2\times\mathcal{E}_M\times\mathcal{F}\times G)$ が次の2条件を満すとき type II$(F_K^2,\mathcal{E}_M)$（単に type II）という．

(i) $\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\nu\in\mathcal{F}$ に対して $\phi_{\tau,\sigma,\nu}(\cdot)=\phi(\tau:\sigma:\nu:\cdot)$ とするとき

$$z\,\phi_{\tau,\sigma,\nu}=\chi_\Lambda(z)\,\phi_{\tau,\sigma,\nu} \tag{4.1}$$

(ii) $D\in\tilde{\mathcal{G}}$ に対し多項式 p が存在して，$\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\nu\in\mathcal{F}$, $x\in G$ に対して $\phi_{\tau,\sigma}(\nu:x)=\phi(\tau:\sigma:\nu:x)$ と表すとき

$$\|D\phi_{\tau,\sigma}(\nu:x)\|\le p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(x))\,\Xi(x) \tag{4.2}$$

が成り立つ．

d_P を $ma\in MA$ に対して $d_P(ma)=d_P(a)$ とおいて MA 上に拡張する．type II の関数 ϕ に対して

$$\phi_1(\tau:\sigma:\nu:m)=d_P(m)\,\phi(\tau:\sigma:\nu:m),\quad \phi_2(\tau:\sigma:\nu:m)=\phi(\tau:\sigma:\nu:m;H\circ d_P),$$

$$\Phi(\tau:\sigma:\nu:m)=\phi_1(\tau:\sigma:\nu:m)\otimes e_1+\phi_2(\tau:\sigma:\nu:m)\otimes e_2$$

（$\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\nu\in\mathcal{F}$, $m\in MA$）とおく．

Lemma 4.1. type II の関数 ϕ に対し Φ を上の様に定義する．$k\in\mathbb{Z}^+$ に対して多項式 p がとれて，τ,σ,ν, $m\in M$, $a\in A$ に対し

$$\|\Phi(\tau:\sigma:\nu:ma;H^k)\|\le p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(a)).$$

$\Lambda = \lambda_\sigma + \nu$, $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\lambda_\sigma}$ $(\sigma \in \mathcal{E}_M)$ とおく．§3 の様にして Φ の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\Phi(\tau:\sigma:\nu:a_t) = (\Gamma(\tau:\Lambda) + \mathbb{B}(\tau:a_t))\Phi(\tau:\sigma:\nu:a_t) \tag{4.4}$$

が得られるが，これは $\Phi(\tau:\sigma:\nu:a:t) = e^{-t\Gamma(\tau:\Lambda)}\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_t)$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\Phi(\tau:\sigma:\nu:a:t) = e^{-t\Gamma(\tau:\Lambda)}\mathbb{B}(\tau:aa_t)\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_t)$$

と直され，更にこれより次式が成り立つ：　$a \in A^+$, $t \geqq 0$ に対して

$$\Phi(\tau:\sigma:\nu:a:t) = \Phi(\tau:\sigma:\nu:a) + \int_0^t e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\mathbb{B}(\tau:aa_u)\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_u)\,du. \tag{4.6}$$

Lemma 4.2. (i) τ, σ; $\nu \in \mathcal{F}_\sigma$ および $a \in A^+$ に対して $\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a) = \lim_{t\to\infty}\Phi(\tau:\sigma:\nu:a:t)$ が存在し，

$$\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a) = \Phi(\tau:\sigma:\nu:a) + \int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\mathbb{B}(\tau:aa_u)\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_u)\,du \tag{4.7}$$

が成り立つ．積分は絶対収束．

(ii) 上と同じ τ, σ, ν, a および $a' \in cl(A^+)$ に対し

$$\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:aa') = e^{\alpha_0(H(a'))\Gamma(\tau:\Lambda)}\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a)$$

(iii) $a \in A$, $a', a'' \in A^+$ で $aa', aa'' \in A^+$ のとき

$$e^{-\alpha_0(H(a''))\Gamma(\tau:\Lambda)}\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:aa'') = e^{-\alpha_0(H(a'))\Gamma(\tau:\Lambda)}\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:aa').$$

上記(iii)によって $\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:\cdot)$ は A 全体に拡張される。$\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$ に対し $(\nu, a)\to\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a)$ は $\mathcal{F}_\sigma\times A$ 上の $V_\tau\otimes\mathbb{C}$ 値 C^∞ 関数で $k\in\mathbb{Z}^+$ に対し

$$\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)=\Phi(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)+\int_0^\infty e^{-u\Gamma}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\mathbb{B}(aa_u;H^\ell)\times\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_u;H^{k-\ell})\,du, \tag{4.9}$$

$$\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)=e^{\alpha_0(H(a))\Gamma(\tau:\Lambda)}\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:1;H^k) \tag{4.10}$$

$(a\in A^+)$ が成り立つ。

Lemma 4.4. $k\in\mathbb{Z}^+$, $v>0$, $d>0$ とする。多項式 $p=p_k$ 及び定数 $C_1=C_{k,d,v}$, $C_2=C_{k,d}>0$ が存在して次を満す:

$\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\nu\in\mathcal{F}_\sigma(d)$, $a\in A(v)$ に対して

(i) $\|\Phi(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)-\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)\|\leqslant C_1\,p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(a))\,e^{-\alpha_0(H(a))}$;

(ii) $\|\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:1;H^k)\|\leqslant C_2\,p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|)$.

[6] と同様にして各 τ, σ; $i, k\in\mathbb{Z}^+$ $(1\leq i\leq r_\tau)$, $\varepsilon\in\{1,-1\}$, $d>0$ に対して, n に関し帰納的に C^∞ 関数 $P_{i,\varepsilon}^{n,k}(\tau:\sigma:\cdot):\mathcal{F}_\sigma(d)\to V_\tau$ を以下の様にして定義する。まず $n=0$ に対しては

$$P_{i,\varepsilon}^{0,k}(\tau:\sigma:\nu)=E_i(\varepsilon\mu_i)\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:1;H^k)$$

と定めると, これは明らかに $\mathcal{F}_\sigma(d)$ $(d>0)$ 上 C^∞ である。今

$N \in \mathbb{Z}^+$ に対して，全ての $n\,(n \in \mathbb{Z}^+, n<N)$ について $\mathbb{P}$ が定義されていると仮定して

$$\mathbb{P}^{N,k}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu) = -\|\alpha_0\|^{-1} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \sum_{s,\varepsilon'} E_s(\varepsilon'\mu_s)\Big[(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i - \sqrt{-1}\varepsilon'\mu_s - N)^{-1}$$

$$\times \sum_{p=1}^{N} B^{\tau}_{\ell}(N-p+1)\,\mathbb{P}^{p-1,k-\ell}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)\Big] \tag{4.11}$$

とおくと，これも $\mathcal{F}_\sigma(d)$ 上 C^∞ である．

Lemma 4.5. $N, k \in \mathbb{Z}^+$, $N, k>0$, と $d \in \mathbb{R}^+$ を与えるとき多項式 $p = p_{k,N}$ および定数 $C = C_{k,N,d} > 0$ が存在して

$$\|\mathbb{P}^{n,k}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)\| \leq C\,p(\|\tau\| + \|\sigma\| + \|\nu\|)$$

が $\tau \in F^2_K$, $\sigma \in \mathcal{E}_M$, $n\,(0 \leq n \leq N)$, $i\,(1 \leq i \leq r_\tau)$, $\nu \in \mathcal{F}_\sigma(d)$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ に対して成り立つ．

Proposition 4.6. $L, k \in \mathbb{Z}^+$ と $d>0$, $\upsilon>0$ が与えられたとき，多項式 $p = p_{k,L}$ 及び定数 $C = C_{k,L,d,\upsilon} > 0$ が存在して $\tau, \sigma, \nu \in \mathcal{F}_\sigma(d)$, $a \in A(\upsilon)$ に対して次が成り立つ．

$$\|\Phi(\tau:\sigma:\nu:a;H^k) - \sum_{n=0}^{L}\sum_{i,\varepsilon} P^{n,k}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)\,e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i - n)\alpha_0(H(a))}\|$$

$$\leq C\,p(\|\tau\| + \|\sigma\| + \|\nu\| + \sigma(a))\,e^{-(L+1)\alpha_0(H(a))}.$$

以下 Proposition 4.6. の証明の概略をのべる. $L,k\in\mathbb{Z}^+$ に対して $\Phi_{L,k}$, $R^k_{j,L}$ $(j=1,2)$ を次の様に定義する. まず $L=0$ に対しては

$$\Phi_{0,k}(\tau:\sigma:\nu:a)=\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a;H^k),\quad R^k_{j,0}=0$$

$(k\in\mathbb{Z}^+,\ j=1,2)$ とおく. $L>0$ ならば

$$\Phi_{L,k}(\tau:\sigma:\nu:a)=\Phi_\infty(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)-\int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\mathbb{B}(\tau:aa_u;H^\ell)$$
$$\times\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{i,\varepsilon}\mathbb{P}^{n,k-\ell}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i-n)\alpha_0(H(aa_u))}du \tag{4.12}$$

$$\mathbb{R}^k_{1,L}(\tau:\sigma:\nu:a)=-\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\sum_{i,\varepsilon}\int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\sum_{\substack{0\le n\le L-1\\ 1\le m\le L\\ m+n\ge L+1}}B^\tau_\ell(m)\mathbb{P}^{n,k-\ell}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)$$
$$\times e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i-(n+m))\alpha_0(H(aa_u))}du \tag{4.13}$$

$$\mathbb{R}^k_{2,L}(\tau:\sigma:\nu:a)=-\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}B_L(\tau:aa_u;H^\ell)$$
$$\times\sum_{n=0}^{L-1}\sum_{i,\varepsilon}\mathbb{P}^{n,k-\ell}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i-n)\alpha_0(H(aa_u))}du \tag{4.14}$$

とおく. 各 τ, σ に対して上記定義式の積分は $F_\sigma(d)\times A(v)$ $(d>0,\ v>0)$ において絶対かつ一様収束である. 更に次の関係式が成り立つことが示される ([6]).

$$\Phi_{L,k}(\tau:\sigma:\nu:a)=\sum_{n=0}^{L}\sum_{i,\varepsilon}\mathbb{P}^{n,k}_{i,\varepsilon}(\tau:\sigma:\nu)e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i-n)\alpha_0(H(a))}+\sum_{j=1}^{2}\mathbb{R}^k_{j,L}(\tau:\sigma:\nu:a). \tag{4.15}$$

$$\Phi(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)-\Phi_{L,k}(\tau:\sigma:\nu:a)$$

$$=\int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathbb{B}(\tau:aa_u;H^l)\big(\Phi(\tau:\sigma:\nu:aa_u;H^{k-l})-\Phi_{L-1,k-l}(\tau:\sigma:\nu:aa_u)\big)du$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\int_0^\infty e^{-u\Gamma(\tau:\Lambda)}\mathbb{B}(\tau:aa_u;H^l)\mathbb{R}_{j,L-1}^{k-l}(\tau:\sigma:\nu:aa_u)du \qquad (4.16)$$

$\mathbb{R}_{jL}^{k}$ については次の様に評価される：適当な多項式 $p=p_{k,L}$ 及び定数 $C=C_{k,L,d,\upsilon}>0$ をとれば次の不等式が成り立つ．

$$\|\mathbb{R}_{j,L}^{k}(\tau:\sigma:\nu:a)\|\leqq C\,p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(a))e^{-(L+1)\alpha_0(H(a))}$$

$(j=1,2,\quad \tau\in F_K^2,\quad \sigma\in\mathcal{E}_M,\quad \nu\in\mathcal{F}_\sigma(d),\quad a\in A(\upsilon))$.

以上に述べた関係式と評価式とから Proposition 4.6 は帰納法で証明される．

Proposition 4.6 の Φ とその近似において，特に第一成分をとれば次の定理が得られる．

Theorem 4.7. Φ を type II の関数とする. $\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$ $i,k\in\mathbb{Z}^+$ $(1\leq i\leq r_\tau)$, $\varepsilon\in\{1,-1\}$ に対して C^∞ 関数 $p_{i,\varepsilon}^{n,k}:F_\sigma\to V_\tau$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が存在して次の条件をみたす: $L\in\mathbb{Z}^+$, $d>0$, $v>0$ に対して多項式 $p=p_{k,L}$ 及び定数 $C=C_{k,L,d,v}>0$ で次を満すものが取れる.

$$\| \Phi(\tau:\sigma:\nu:a;H^k)-\sum_{n=0}^{L}\sum_{i,\varepsilon} p_{i,\varepsilon}^{n,k}(\tau:\sigma:\nu)e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i-n)\alpha_0(H(a))}\|$$
$$\leq CP(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(a))\,e^{-(L+1)\alpha_0(H(a))}$$

$(\nu\in F_\sigma(d),\ a\in A(v))$.

5. Harish-Chandra 展開との関係

$\tau\in F_K^2$, $\sigma\in\mathcal{E}_M$, $\psi\in\mathcal{E}_\sigma(M,\tau_M)$, $\nu\in F_c$ に対し $E(\tau:\sigma:\psi:\nu:x)$ を §2 の様に与える. $x=a$ が A^+ 上を動くとき次にのべる級数展開を Harish-Chandra 展開という: F_c 上の $\mathrm{Hom}(V_\tau^M,V_\tau^M)$ 値有理型関数 C_s^τ $(s\in W(A))$ 及び有理関数 Γ_n^τ $(n=0,1,2,\cdots)$ が存在して, $a\in A^+$ に対し

$$d_P(a)E(\tau:\sigma:\psi:a)=\sum_{s\in W(A)}\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\Gamma_n^\tau(s\nu)C_s^\tau(\nu)\psi(1)e^{(s\nu-n\alpha_0)(H(a))}$$

と展開される. ここで ν は F_c の或る open dense subset ${}^*F_c$ を動き, Γ_n^τ は或る explicit recursion formula によって与えられる.

一方 $^\forall L$, $k\in\mathbb{Z}^+$, τ, σ; $\nu\in F_\sigma\cap{}^*F_c$ に対して上記二つの近

似は一致することが分る（[6]）．即ち，

$$\sum_{n=0}^{L}\sum_{i,\varepsilon} P_{i,\varepsilon}^{n,k}(\tau:\sigma:\nu)\, e^{(\sqrt{-1}\varepsilon\mu_i - n)t\alpha_0(H)}$$

$$=\sum_{s\in W(A)}\sum_{n=0}^{L}(s\nu(H)-n\alpha_0(H))^k\,\Gamma_n^\tau(s\nu)\,C_s^\tau(\nu)\,\psi(1)\,e^{(s\nu(H)-n\alpha_0(H))t},$$

$$(t>0). \qquad (5.2)$$

この結果と定理4.7とから次が得られる．

Theorem 5.3. $\forall L, k\in\mathbb{Z}^+$; $d, v>0$ に対して多項式 $p=p_{k,L}$ 及び定数 $C=C_{k,L,d,v}>0$ が存在して次を満す：

$$\|E(\tau:\sigma:\psi:\nu:a;H^k\circ d_p)-\sum_{n=0}^{L}\sum_{s\in W(A)}(s\nu(H)-n\alpha_0(H))^k$$

$$\times\,\Gamma_n^\tau(s\nu)\,C_s^\tau(\nu)\,\psi(1)\,e^{(s\nu-n\alpha_0)(H(a))}\|$$

$$\leqslant C\,p(\|\tau\|+\|\sigma\|+\|\nu\|+\sigma(a))\,e^{-(L+1)\alpha_0(H(a))}\|\psi(1)\|,$$

$(\tau\in\mathcal{F}_K^2,\ \sigma\in\mathcal{E}_M,\ \psi\in\mathcal{C}_\sigma(M,\tau_M),\ \nu\in\mathcal{F}_\sigma(d),\ a\in A(v))$.

REFERENCES

1. J. G. ARTHUR, Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one, Ph.D. Thesis, Yale University, 1970.

2. J. G. ARTHUR, Harmonic analysis of the Schwartz space on a reductive Lie group I, preprint.

3. M. EGUCHI, Asymptotic expansions of Eisenstein integrals and Fourier transform on symmetric spaces, J. Functional Analysis 34(1979), 167-216.

4. HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on real reductive Lie groups, II, Inv. Math. 36(1976), 1-55.

5. M. SUGIURA, Fourier series of smooth functions on compact Lie groups, Osaka J. Math. 8(1971), 33-47.

6. P. C. TROMBI, Asymptotic expansions of matrix coefficients: the real rank one case, J. Functional Analysis 30(1978), 83-105.

7. P. C. TROMBI, Harmonic analysis of $C^p(G:F)$ $(1 \leq p < 2)$, J. Functional Analysis 40(1981), 84-125.

8. P. C. TROMBI AND V. S. VARADARAJAN, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 94(1971), 246-303.

9. V. S. VARADARAJAN, "Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

10. G. Warner, "Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I, II," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.

11. M. EGUCHI, Asymptotic expansions of Eisenstein integrals on reductive Lie groups of real rank one, preprint.