ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.36-44

$SU(3,f,Q)$ の表現について

麻生春弘（島根大理）

1°. スペッシャル表現，スーパーキュスピダル表現の研究は，進んでいる簡約代数群は GL_2（および SL_2）のみであろう。他方，$SU(3)$ は最もプリミティヴな非分裂な quasi-split 群である。目標は $SU(3)$ について supercuspidal 表現を構成・分類することであるが，まだそれは出来ていない。ここでは，主系列表現について整理しておく。

K：離散付値に関して完備で，その剰余体は有限体とする。

$L=K(\varepsilon)$：K の不分岐2次拡大，$\sigma \in Gal(L/K)$.

V：3次元ベクトル空間$/L$.

f：σ-antihermitian sesquilinear form on $V\times V$.

Q：$V \to L/K$ such that

(Q1) $q(lx)=N(l)q(x)$,　$N(l)$ は l のノルム

(Q2) $q(x+y)=q(x)+q(y)+(f(x,y)+K)$,

$l\in L$, $x,y\in V$.

(f,Q) は非退化で $Witt(f,Q)=1$ とし，V の底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を $f(e_1,e_1)=Q(e_1)=0$, $f(e_3,e_3)=Q(e_3)=0$, $f(e_1,e_3)=-1$, $f(e_1,e_2)=f(e_2,e_3)=0$, $Q(e_2)\neq 0$ とする.

2°. 定義1. (1) $h(gx, gy) = h(x,y)$, $Q(gx) = Q(x)$, $x, y \in V$

(2) $\det(g) = 1$

をみたす $g \in GL(V)$ のなす群を $G = SU(3, h, Q)$ と記す.

S を K-rational points のなす群 $S(K)$ が

$$S(K) = \{ t(k) = \mathrm{diag}(k, 1, 1/k);\ k \in K^* \}$$

で与えられる G の maximal K-split torus とし, Z および N を, それぞれ S の centralizer, normalizer とする. ルート系 $\Phi(G, S)$ は type BC_1 である.
ルート a に対応するルート群 U_a は, $l - l^\sigma - N(\xi) - h(e_2, e_2) = 0$ をみたす $(\xi, l) \in L \times L$ で parametrize される. いま, V の1次変換 $u(\xi, l)$ を

$$u(\xi, l):\ e_1 \mapsto e_1,\ e_2 \mapsto e_2 - \xi^\sigma h(e_2, e_2) e_1,$$
$$e_3 \mapsto e_3 + \xi e_2 - l e_1$$

とするとき,

$$U_a(K) = \{ u(\xi, l);\ (\xi, l) \in L \times L \},$$
$$U_{2a}(K) = \{ u(0, k);\ k \in K \}.$$

$B = Z(K) U_a(K)$: a Borel subgroup defined $/K$.
$(B, N(K))$ は Weyl 群 $W = N(K)/Z(K)$ をもつ $G(K)$ の Tits system である. (2)

$H := \{ h(e) \in \mathcal{U}(K) \,;\, h(e) \in \mathfrak{U}_K \}$. $\widetilde{W} = \mathcal{N}(K)/H$ とおき,
$\nu : \mathcal{N}(K) \to W$, $\tilde{\nu} : \mathcal{N}(K) \to \widetilde{W}$ を canonical maps とする.

Affine root $\alpha = b + \gamma$, $b \in \Phi$ に対して,

$$U_\alpha = U_{b,\gamma} = \{ u_b(\xi, e) \in U_b \,;\, \phi_b(u_b(\xi,e)) \geqq \gamma \}, \quad \gamma \in \Gamma'_b$$

とおく. $v_1(e)$ を L の付値として,

$$\phi_a(u_a(\xi,e)) = v_1(e)/2, \quad \phi_{-a}(u_{-a}(\xi,e)) = v_1(e)/2,$$

$$\phi_{2a}(u_{2a}(0,k)) = v_1(k), \quad \phi_{-2a}(u_{-2a}(0,k)) = v_1(k),$$

L/K : ramified のとき $\Gamma'_b = \mathbb{Z} + 1/2$, $\Gamma'_{2b} = 2\mathbb{Z}$.

L/K : unramified のとき $\Gamma'_b = \mathbb{Z}$, $\Gamma'_{2b} = \mathbb{Z}$.

Good maximal compact subgroups および Iwahori subgroups を次のようにとる.

L/K : ramified のとき,

$$P_0 = (U_{2a,0} U_{a,1/2} H U_{-a,1/2}) \cup (U_{2a,0} U_{a,1/2} m H U_{a,1/2} U_{2a,0})$$

$$m = m(0,k), \; k \in \mathfrak{U}_K : e_1 \mapsto e_3/k, \; e_2 \mapsto e_2, \; e_3 \mapsto -k e_1.$$

$$I_W = U_{2a,0} U_{a,1/2} H U_{-a,1/2}.$$

L/K: unramified のとき,

$P_0 = (U_{a,0} H U_{-a,1}) \cup (U_{a,0}\, w H U_{a,0})$,

$m = m(q,\ell)$, $N(\ell) \in \mathfrak{U}_K$: $e_1 \mapsto e_3/\ell^\sigma$,

$e_2 \mapsto (\ell^\sigma/\ell)\, e_2$, $e_3 \mapsto -\ell e_1$,

$I_w = U_{-a,1} H U_{a,0}$.

(注) v を K の付値とするとき, $\ell \in L$ に対して

$v_1(\ell) = v(N(\ell))$, L/K ramified

$v_1(\ell) = v(N(\ell))/2$, L/K unramified.

Bruhat 分解: $G(K) = I_w . N(K) . I_w$.

$q(w) = \mathrm{Card}(I_w . n . I_w / I_w)$ ($w = \nu(n)$) については,

L/K: ramified のとき

$q(r_{2a,0}) = q$, $q(r_{-a,1/2}) = q$,

L/K: unramified のとき

$q(r_{a,0}) = q^3$, $q(r_{-2a,1}) = q$,

q は K の剰余体の cardinality.

Iwasawa 分解: $G(K) = P_0 . B$.

Cartan 分解: $Z(K)_+ = \{t(\ell)\in Z(K);\ \ell\in \mathcal{O}_L\}$ とおくとき, $G(K) = P_0 . Z(K)_+ . P_0$.

3°. 以下, $t(\ell)\in Z(K)$ と $\ell\in L^\times$ とを identify する.
$\ell\in L$ に対して, $\|\ell\| = q^{-v(N(\ell))}$ とおく.

(1) modulus character δ_B は,

$$\delta_B(t(\ell)) = \|\ell\|^2.$$

(2) $Z(K)$の characters は, $s = \sigma_1 + \sqrt{-1}\,\sigma_2 \in \mathbb{C}$, $(\sigma_1, \sigma_2)\in \mathbb{R}^1\times[-1/2, 1/2]$ ~~...~~ として,

$$\cancel{\chi(\ell)}\ \chi(s,\theta) = \|\ell\|^{\frac{2\pi\varepsilon s}{\log q}}\,\theta(\ell),$$

$\varepsilon = 1$ (L/K: ramified), $\varepsilon = 1/2$ (L/K: unramified),

で ~~...~~ 与えられる.

以下, $g = t(\ell)u$ に対して, $\chi(g) = \chi(t(\ell))$ として χ を B の character とみなす.

任意の character χ に対して, 任意の $\ell\in U_L$, $(\ell-1)\in \mathfrak{P}_L^{\gamma}$ に対して $\chi(\ell)\equiv 1$ となる最小の整数 $\gamma\geqq 0$ が存在する。このとき, $\mathfrak{P}_L^{\gamma}$ を χ の conductor という. 特に conductor が H であるとき, unramified character (principal character) という.

ワイル群の作用を $(w\chi)(t) = \chi(n^{-1} t n)$, ${}^{v}\nu(n) = w$ で入れるとき, $w \neq 1$ に対して $w\chi \neq \chi$ ならば, χ を regular character という.

命題1. (1) character ~~χ が~~ $\chi = \chi(s, \theta)$ が unitary であるための条件は, $\mathrm{Re}(s) = 0$.

(2) $s \neq 0$ のとき, regular character であり, $s = 0$ のとき, regular であるための条件は χ が U_K で trivial でないこと.

4°. $I(\chi) = \mathrm{Ind}(\chi | G, B)$ を次の条件をみたす関数空間とする; (1) $f : G \to \mathbb{C}$ で, $f(bg) = (\delta_B^{1/2}\chi)(b) f(g)$, $b \in B$

(2) ある G の open compact subgroup G_0 に対して

$$R_g f = f, \quad g \in G_0, \quad R_g f(g') = f(g'g).$$

$\pi_\chi(g) f(g') := (R_g f)(g')$.

定義2. $(\pi_\chi, I(\chi))$ を主系列の表現といって, character χ が unramified のとき unramified principal series の表現, ~~ramified~~ ramified のとき ramified principal series の表現という.

定義3. G を totally disconnected type の群, すなわち compact open subgroups が 1 の基本近傍系をなす群とし, (π, V) を G の表現とする.

(i) $v \in V$ が smooth vector であるとは, $\{g \in G;\ \pi(g)v = v\}$ が open subgroup となるときをいい, 任意の $v \in V$ が smooth vector のとき (π, V) を smooth な表現という.

(ii) (π, V) が smooth で, さらに G の任意の compact open subgroup G_0 に対して, $\dim(V^{G_0})$ が finite のとき, (π, V) を admissible な表現という.

$$V^{G_0} := \{v \in V;\ \pi(g)v = v,\ \forall g \in G_0\}.$$

命題2. Character χ が unitary のとき, $(\pi_\chi, I(\chi))$ は preunitary である.

以下, 再び $G = SU(3)$ とする.

5°. (π, V) を G の任意の smooth な表現とするとき, $V(U_a)$ を $\{\pi(u)x - x;\ u \in U_a,\ x \in V\}$ により生成される V の部分空間とし, $V_{U_a} := V/V(U_a)$.
$V(U_a)$ は B-stable で, U_a は V_{U_a} 上に trivial に作用する. よって, π を $Z(K)$ に制限して, $Z(K)$ の表現 (π_{U_a}, V_{U_a}) を得る. これを (π, V) に associate した Jacquet module という.

~~V_{U_a}~~ $V = V(U_a)$ なるGの既約 admissible 表現を absolutely cuspidal (or supercuspidal) という.

定理1 (Jacquet): Gの任意の既約 admissible 表現は $\mathrm{Ind}(\tau|G, P)$ の subrepresentation である. ここに P は parabolic subgroup of G defined/K であり, τ は $P/U(P)$ の absolutely cuspidal な表現.

定理2: $\mathbb{C}(\chi)$ を $Z(K)$ の作用 $\delta_B^{1/2}\chi$ を与えた複素数の空間とする. このとき, Gの任意のスムースな表現 (π, V) に対して,

$$\mathrm{Hom}_G(V, I(\chi)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Z(K)}(V_{U_a}, \mathbb{C}(\chi))$$

[Frobenius reciprocity].

定理3: $Z(K)$の任意の character χ に対して, $Z(K)$-module $I(\chi)_{U_a}$ の semi-simplified form は

$$\mathbb{C}(\chi) \oplus \mathbb{C}(w\chi), \quad w = v_a \in \overline{W}$$

であり, χ が unramified のとき, 岩堀群 H は $I(\chi)_{U_a}$ に trivial に作用する.

さらに, regular character χ に対して, 上式は $Z(K)$-module として成立する.

命題3: Character χ が regular かつ unitary のとき, $I(\chi)$ は既約である.

6°.

定理4:

(1) χ が regular character のとき, $\mathrm{Re}(s) \neq 0$ ならば $I(\chi)$ は既約である。

(2) χ を regular かつ unramified characters とする

(2-1) L/K が ramified のとき, $s = \pm \frac{1}{2\pi} \log q$ を除いて, $I(\chi)$ は既約である.

(2-2) L/K が unramified のとき, 次の場合を除いて $I(\chi)$ は既約である; $s = \pm \frac{1}{\pi} \log q$,
$s = \frac{1}{2\pi} \log q + \frac{1}{2}\sqrt{-1}$ および $s = -\frac{1}{2\pi} \log q - \frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

(3) χ を regular かつ unramified characters とするとき, 上の parameters s を除いて $I(\chi)$ と $I(w\chi)$ とは equivalent.

定理5: 任意の unramified character χ に対して, $(T_\chi, I(\chi))$ は supercuspidal ではない.