ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.27-35

Poisson境界とdiscrete群上の合成方程式

名大 理　　伊藤 正之

§1. 序

Gを第2可算公理を満す局所コンパクト群，σをG上の確率測度とし，G上の合成方程式

$$(1) \qquad h = h * \sigma$$

を考える。ただし，$h * \sigma(g) = \int h(gg'^{-1})\,d\sigma(g')$である。(1)の左一様連続かつ有界な解全体に一様収束位相を導入した空間をH_σとかく。正整数nに対して，σ^nをσのn個の合成とする。この時，$h, h' \in H_\sigma$に対して，

$$h \times h' = \lim_{n \to \infty} \int h(gg'^{-1})\, h'(gg'^{-1})\, d\sigma^n(g')$$

が定義される。H_σはこのproductに依り，C^*-代数となり，そのspectre Π_σはコンパクト空間であり，GはΠ_σに連続にactすることになる。

以後，σとして，G上の（左不変）Haar測度ξに関して絶対連続な確率測度のみを取り扱う。この時，H_σは$C(\Pi_\sigma)$と同相であり，しかも，Π_σ上の確率測度νが唯一つ存在して，$\forall h \in H_\sigma$に対して，

$$h(g) = \int_{\Pi_\sigma} \hat{h}(gx)\,d\nu(x) \quad (g \in G)$$

を満す．ただし，$C(\Pi_\sigma)$ は Π_σ 上の連続関数全体に sup. norm を導入した空間であり，$\hat{h}$ は h に対応する $C(\Pi_\sigma)$ の元である．こうして得られた (Π_σ, ν) を σ-Poisson 境界と呼び，H_σ の研究は (Π_σ, ν) の研究に帰されるのである．尚，ν を σ-Poisson 核と言う．

このような定義から出発して，次の関心は，(Π_σ, ν) がいつ σ に依らず決定されるかである．感覚的には明らかなことであるが，G が全ての Π_σ に transitive に作用していれば，(Π_σ, ν) は σ に依らず決定されることがわかる（[1]）．このような観点から，特に，G が有限な中心を持つ連結半単純 Lie 群であれば，(Π_σ, ν) は σ に依らず決定されることがわかる（[2]）．

以後，我々は G として，有限な中心を持つ連結な半単純 Lie 群に限って議論を進めることとする．G 上の Laplacian Δ に対して，有界な調和関数 h，$\Delta h=0$，の全体 H は，G 上の Δ を生成作用素とする convolution 半群 $(\mu_t)_{t\geq 0}$ に対して，$H = H_{\mu_t}$ $(\forall t>0)$ を満す．従って，H に関する Poisson 境界のみ調べれば十分である．これを特に (B, m_B) とかくこととする．

G の discrete 部分群 Γ に対して，G/Γ が compact となる時（即ち，Γ が compact な基本領域を持つ時），Γ を co-compact 部分群と言う．又，G/Γ 上に有限な不変測度を持つ時，Γ を

fullであると言う。H. Furstenberg [5] は，G が $G_r = SL(r, R)$ である時，次の興味ある結果を証明している。

定理 A (Furstenberg)．Γ を G_r 内の full discrete 部分群とする。Γ 上の確率測度 σ が存在して，Γ 上の convolution 方程式

$$(2) \qquad h = h * \sigma$$

から決定される σ- Poisson 境界 (π_σ, ν) が (B, m_B) と一致する。

換言すれば，G_r 上の有界な調和関数は Γ 上の値に依って，全て決定されると言うことを述べているのであって，感覚的には見やすいものである。我々はこの定理を一般の有限な中心を持つ連結半単純 Lie 群に拡張することを試みる。得られた結果は次の定理である。

定理 B．G を有限な中心を持つ連結半単純 Lie 群とし，Γ を G の discrete，co-compact 部分群とする。この時，Γ 上の確率測度 σ が存在して，Γ 上の convolution 方程式（2）から決定される σ- Poisson 境界 (π_σ, ν) が (B, m_B) と一致する。

H. Furstenberg [5] は定理 A の証明に確率論的な方法を用いているが，我々は定理 B の証明にそれから全く離れポテンシャル論的方法，掃散，最大値原理等を用いる。尚，定理 B において，co-compact は full で置き換え得ると考えているが，まだ成功していない。

尚，調和性，合成方程式等は全て対称空間で同様の議論が出来る訳であるが，議論を簡単にする為に，全てG上で考えることとした。

§2. 調和関数に附随するΓ上の合成方程式

良く知られた定義から始める。位相空間Tは，Gが（左から）Tに連続にactしている時，（左）G-空間と呼ばれる。局所compact空間X上のRadon測度全体を$M(X)$とかくこととし，G-空間Tが局所compactである時，$\mu\in M(G)$，$\lambda\in M(T)$に対して，$\mu\otimes\lambda$の写像 $G\times T\ni(g,x)\to gx\in T$による像測度が定義される限り，$\mu*\lambda$とかく。又$f$をT上のBorel関数，$\lambda\in M(T)$とする。G上の関数$f*\lambda$を

$$f*\lambda(g)=\int_T f(gx)\,d\lambda(x)\quad(g\in G)$$

によって定義する。勿論BはG-空間，compactであり，

$$H=\{f*m_B\ ;\ f\in C(B)\}$$

である。更に，compact G-空間Tは，同値である次の(a), (b)のいずれかを満す時，Gの境界であると言う。

(a) T上の任意の確率測度λと$\forall x\in T$に対して，

$$\delta_x\in\overline{\{\delta_g*\lambda\ ;\ g\in G\}}.$$

ただし，δ_xはxにおけるDirac測度，閉包は$M(X)$の弱*-位相によるそれである。

(b) T上の任意の確率測度λと$\forall x\in T$に対して，写像

$C(T) \ni f \to f*\lambda \in C(G)$ が等距離的である．

Poisson境界 B は殆んど明らかに境界であることがわかる．更に，次の注意が知られている．

注意 1（［2］）．2つの G の境界 T_1，T_2 に対して，$T_1 > T_2$ を T_1 から T_2 への equi-valiant map が存在することによって定義する。この時，B は順序 $>$ に関して極大である．

さて，我々の定理Bに取って，次の命題は基本的である．

命題1．Γ を G の co-compact, discrete 部分群とする．この時，$\forall g \in G$ に対して，Γ 上の確率測度 σ_g で次の性質 (1), (2) を満すものが存在する．

(1). $\delta_g * m_B = \sigma_g * m_B$.

(2). $\sigma_g(\{g\}) = 0$ かつ $\forall \gamma \in \Gamma$ で，$\gamma \neq g$ ならば，$\sigma_g(\{\gamma\}) > 0$.

これは，$\forall h \in H$ に対して，$h(g) = \int h\, d\sigma_g$ であることを意味する。尚，証明はポテンシャル論における掃散の方法を用いて実現される．この命題から直ちに，次の系が得られる。

系 1．B は Γ の境界になる．

こゝで，命題1で得られた σ_g の全体を $I_g(\Gamma)$ とかくことにする。この時，次の命題が成立する．

命題2．e を G $(\ni \Gamma)$ の単位元とする．

(1). $\forall g \in G$ に対して，$\gamma_g * \gamma_{g^{-1}} \in I(\Gamma)$.

(2). $\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$, $\forall g \in G$, $\sigma_g \in I_g(\Gamma)$ に対して,

$\sigma * \sigma_g \in I_g(\Gamma)$, $\sigma_g * \sigma \in I_g(\Gamma)$.

(3). $\forall g \in G$, $\forall\sigma_g \in I_g(\Gamma)$ に対して, $\check{\sigma}_g \in I_{g^{-1}}(\Gamma)$,

ただし, $\check{\sigma}_g$ は e に関して対称な確率測度である.

(4). $\forall\gamma_1$, $\forall\gamma_2 \in \Gamma$, $\forall\sigma_{\gamma_j} \in I_{\gamma_j}(\Gamma)$ $(j = 1, 2)$ に対して,

$\sigma_{\gamma_1} * \sigma_{\gamma_2} \in I_{\gamma_1\gamma_2}(\Gamma)$, $\delta_{\gamma_1} * \sigma_{\gamma_2} \in I_{\gamma_1\gamma_2}(\Gamma)$, $\sigma_{\gamma_1} * \delta_{\gamma_2} \in I_{\gamma_1\gamma_2}(\Gamma)$.

$\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$ に対して, Γ 上で定義される H_σ, H_σ によって定義される σ-境界 (Π_σ, ν_σ) が存在する. 命題 2 より, 次の系が得られる.

系 2. $\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$ に対して,

(1). $H_\sigma \supset H|_\Gamma$. ただし, $H|_\Gamma = \{h|_\Gamma ; h \in H\}$ であり, $h|_\Gamma$ は h の Γ への制限である.

(2). $\Pi_\sigma > B$.

以上により, 我々の定理 B の為には, Π_σ から B への equivaliant map が 1 対 1 になる σ を見い出せば十分であることがわかる. 良く知られているように, H は定数のみでない. 従って, H_σ も又定数のみでないことがわかる. これより, 次の命題がわかる.

命題 3. $\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$ に対して, $\{x_n^\sigma\}_{n=1}^\infty$ を分布 σ の乱歩とする. この時, $\{x_n^\sigma\}_{n=1}^\infty$ は transient である.

これは明らかに, $\sum_{n=1}^\infty \sigma^n$ が $M(\Gamma)$ 内で弱*-収束することと

同値である。

§3．定理Bの証明

定理Bは次の順序で証明が実行される。

(a)． $\forall\sigma_1$, $\forall\sigma_2 \in I_e(\Gamma)$ に対して，$(\pi_{\sigma_1}, \nu_{\sigma_2}) = (\pi_{\sigma_1}, \nu_{\sigma_2})$,
即ち，$H_{\sigma_1} = H_{\sigma_2}$ であれば，$\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$ に対して，
$(\pi_\sigma, \nu_\sigma) = (B, m_B)$．

これより，$\forall\sigma_1, \forall\sigma_2 \in I_e(\Gamma)$ に対して，$H_{\sigma_1} = H_{\sigma_2}$ であることを証明すれば十分である。

(b)． $I_e(\Gamma) \ni \forall\sigma_1$, $\forall\sigma_2$ に対して，$\sigma_1 \prec \sigma_2$ をある正測度 κ が存在して，

$$\kappa * \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_1{}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_2{}^n \quad (\sigma_j{}^0 = \delta_e)$$

とかけることによって定義する。ポテンシャル論を援用して，次の結果がわかる。

$\sigma_1 \prec \sigma_2$ であれば，$(\pi_{\sigma_1}, \nu_{\sigma_1}) = (\pi_{\sigma_1}, \nu_{\sigma_1})$ である。

(c) G 上の確率測度 σ_1, σ_2 で，$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_j{}^n$ $(j = 1, 2)$ が収束するものに対しても，$\sigma_1 \prec \sigma_2$ が同様に定義される。ポテンシャル論の一般論を何度も使って，次の結果がわかる。証明はかなり複雑である。

σ_1, σ_2 を G 上の確率測度で $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_j{}^n$ $(j = 1, 2)$ が収束するとする。この時，次の性質 (i), (ii) を持つ G 上の確率測度 σ が存在する。

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\sigma^n$ が収束し，$\sigma_1 \prec \sigma$，$\sigma_2 \prec \sigma$ である．

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n$ が収束し，$\sigma_1 \prec \mu$，$\sigma_2 \prec \mu$ である任意の確率測度 μ に対して，$\sigma \prec \mu$ である．

これは，順序 $\prec$ に関して，$\sup(\sigma_1, \sigma_2)$ が存在することを述べるものであり，ポテンシャル論的感覚では当然である．証明が複雑であるのは大変不満で，感覚的によくわかる証明を考案中である．

(d) $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ を Δ を生成作用素とする合成半群とする．この時，$^\forall t > 0$ に対して，$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_t^n$ は収束し，しかも，$^\forall\sigma \in I_e(\Gamma)$ に対して，$\sigma \prec \mu_t$ である．

$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_t^n$ の収束は，H が定数のみでないことからわかり，$\sigma \prec \mu_t$ は系2より得られる．

(e) $^\forall\sigma_1$，$^\forall\sigma_2 \in I_e(\Gamma)$ に対して，$\prec$ に関して，$\sigma = \sup(\sigma_1, \sigma_2)$ を考える．この時，$\mathrm{supp}(\sigma) \subset \Gamma$ であり，$\sigma \prec \mu_t$ $(t > 0)$ となる．$H_{\sigma_j} \subset H_\sigma$，$H_\sigma \subset H|_\Gamma$ が得られ，$\sigma \in I_e(\Gamma)$ がわかる．

(f) (b), (e) より，$H_{\sigma_1} = H_{\sigma_2}$ がわかり，更に (a) より我々の定理Bの証明を終る．

参考文献

[1] R. Azencott, Espace de Poisson des groupes localement compacts, Lecture note in Math. 148, 1970, Springer-Verlag.

[2] H. Furstenberg, Poisson formula for semi-simple Lie groups, Ann. of Math. 77 (1963), 335-386.

[3] ———————, Noncommuting random products, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 377-428.

[4] ———————, Translation-invariant cônes of functions on semi-simple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 271-326.

[5] ———————, Random walks and discrete subgroups of Lie groups.

このノートの中で述べているポテンシャル論的方法に関しては、Gが可換群の時、その方法を述べた論文は数多い。しかし、どれ一つ非可換については述べたものがない。非可換でも、我々が使う範囲では同じ結果が得られたが、方法が大変異なるため、参考文献としてあげることを避けた。