ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.20-26

ISU(n)の不変多項式環

徳大　教育　　兼田　均

§0. 主定理

連結実Lie群Gの Lie 環$\mathfrak{g}$の dual における CoAd-不変実多項式環と$\mathfrak{g}$の展開環の中心が同型であることはよく知られている[8]。ここでは一連の非斉次線形群の CoAd-不変多項式環の有限生成性の証明，生成元の構成が初等的に実行される様子を $ISU(n)=\left\{\begin{pmatrix} u & a \\ 0 & 1\end{pmatrix};\ u\in SU(n),\ a\in\mathbb{C}^n\right\}$ $(n\geqq 2)$ に例を取り示す。この論法は $ISL(n,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} u & a \\ 0 & 1\end{pmatrix};\ u\in SL(n,\mathbb{R}),\ a\in\mathbb{R}^n\right\}$, $ISp(n)=\left\{\begin{pmatrix} u & a \\ 0 & 1\end{pmatrix};\ u\in Sp(n,\mathbb{R}),\ a\in\mathbb{R}^{2n}\right\}$ に対しても有効である。$ISO(n)$, $IU(n)$ に対してもここで述べる方法が有効であるか否か確かめてないが，この２つの群に対しては $SO(n+1)$, $U(n+1)$ とのある関係を利用する別の方法がある。

結果を述べるべく記号を準備する．$G_n=SU(n)$, $IG_n=ISU(n)$ $(n\geqq 2)$の Lie 環を$\mathfrak{g}_n$，$I\mathfrak{g}_n$で表わす．例えば，

$$I\mathfrak{g}_n=\left\{\begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0\end{pmatrix};\ X\in\mathfrak{g}_n,\ x\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

$I\mathfrak{g}_n$ 上での IG_n の Ad-表現は

(1) $$Ad(g)\begin{pmatrix} X & x\\ 0 & 0\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} X & x\\ 0 & 0\end{pmatrix} g^{-1} \qquad (g\in IG_n)$$

で与えられる。$I\mathfrak{g}_n \times (\mathfrak{g}_n\times\mathbb{C}^n)$ 上の非退化双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle_n$ を

$$\left\langle \begin{pmatrix} X & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}, (Y,y)\right\rangle_n = \langle X, Y\rangle_{\mathfrak{g}_n} + \langle x, y\rangle_n$$

で定める。但し $\langle X,Y\rangle_{\mathfrak{g}_n} = 2n\,\mathrm{tr}(XY)$, $\langle x,y\rangle_n = \mathrm{Re}\, x^*y$. 即ち $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}_n}$ は $\mathfrak{g}_n$ の Killing form である。こうして、$I\mathfrak{g}_n$ の dual $I\mathfrak{g}_n^*$ を $\mathfrak{g}_n\times\mathbb{C}^n$ と同一視する。$I\mathfrak{g}_n^*$ の $(n-1)$-dim subspace $\mathfrak{h}_n$ を

$$\mathfrak{h}_n = \left\{ \begin{pmatrix} Y_1 & & & 0 & 0\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & Y_{n-1} & & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & y_n\end{pmatrix} ;\ Y_1+\cdots+Y_{n-1}=0,\ Y_i, y_n\in\sqrt{-1}\,\mathbb{R}\right\}$$

で定め，$\mathfrak{h}_n$ 上の多項式 $t_1 = y_n^2$, $t_i = s_i\, y_n^{2i}$ $(1< i\le n-1)$ を考える。ここで，s_i は $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$ の i-th fundamental polynomial. さらに $I\mathfrak{g}_n^*$ 上の CoAd-不変 $\mathbb{C}$-多項式環を $\mathcal{I}_n$，制限写像 $F\to F|\mathfrak{h}_n$ による $\mathcal{I}_n$ の像を $\mathcal{J}_n$ とおく.

<u>定理</u>　この制限写像は injective で，$\mathcal{J}_n = \mathbb{C}[t_1,\cdots,t_{n-1}]$，しかも $t_1,\cdots,t_{n-1}$ は $\mathbb{C}$ 上代数的に独立である。

§1. 定理の証明

定理の最後の主張はほぼ明らか。残る主張の証明は以下の Lemmas によるのであって，Lemmas 2，3，5 が要点ですが，Lemma 5 の証明は n に関する induction にもち込むため長くなるので省略させて下さい。$\mathrm{CoAd}(g)(Y,y)$ を $g\cdot(Y,y)$ で表わし(

$g\in IG_n$, $(Y,y)\in\mathfrak{g}_n\times\mathbb{C}^n$), しばしば G_n, $\mathbb{C}^n$ を IG_n の部分群とみなす。

<u>Lemma 1</u> $\{e_i\}$ を $\mathfrak{g}_n$ の basis, $\{e^i\}$ を $\mathfrak{g}_n$ の Killing form に関する dual basis とする。このとき $g=\begin{pmatrix}u&a\\0&1\end{pmatrix}\in IG_n$, $(Y,y)\in\mathfrak{g}_n\times\mathbb{C}^n$ に対し $g\cdot(Y,y)=(uYu^{-1}+\sum_i\langle e_i a, uy\rangle_n e^i,\ uy)$。

<u>Proof</u> $X\in\mathfrak{g}_n$ に対し $\langle u^{-1}Xa, y\rangle_n=\langle Xa, uy\rangle_n=\sum_i X_i\langle e_i a, uy\rangle_n=\langle X, \sum_i\langle e_i a, uy\rangle_n e^i\rangle_{\mathfrak{g}_n}$ に注意すればよい。■

$\mathfrak{g}_n$ の basis $\{\lambda_i, \lambda_{jk}, \omega_{jk} ; 1\leq i<n, 1\leq j<k\leq n\}$ を次の様に定める,

$$\lambda_i=\sqrt{-1}\,(E_{ii}-E_{i+1,i+1})\qquad (E_{ij}=(i,j)\text{成分のみ}1,\text{他成分}0)$$

$$\lambda_{jk}=\sqrt{-1}\,(E_{jk}+E_{kj}),\quad \omega_{jk}=E_{jk}-E_{kj}.$$

この dual basis が次の $\{\lambda^i, \lambda^{jk}, \omega^{jk} ; 1\leq i<n, 1\leq j<k\leq n\}$ であることは容易に確かめられる.

$$(2)\qquad \lambda^i=-\frac{\sqrt{-1}}{2n^2}\Big(\sum_{1\leq k\leq i}(n-i)E_{kk}+\sum_{i<k\leq n}(-i)E_{kk}\Big)$$

$$\lambda^{jk}=-\frac{1}{4n}\lambda_{jk},\qquad \omega^{jk}=-\frac{1}{4n}\omega_{jk}.$$

<u>Lemma 2</u> $\{g\cdot\Omega_n ; g\in IG_n\}$ は $I\mathfrak{g}_n^*$ の open set を含む. 特に $\mathfrak{I}_n$ から Ω_n 上の多項式環への写像 $F\to F|\Omega_n$ は injective.

<u>Proof</u> $(Y,y)\in\mathfrak{g}_n\times\mathbb{C}^n$ ($y\neq0$) に対し, $\exists u\in G_n$ s.t. $u\cdot(Y,y)=(Y',y')$ with ${}^t y'=(0,\dots,0,|y|)$. さらに $\exists a\in\mathbb{C}^n$ s.t.,

$a\cdot(Y', y') = (Y'', y')$ with $Y'' = \begin{pmatrix}\tilde{Y} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(\tilde{Y} \in \mathfrak{G}_{n-1})$。$\exists v \in G_{n-1}$ s.t. $v\tilde{Y}v^{-1} =$ diagonal。$\blacksquare$

Ω_nの線形変換群 $A_n = \{ \mathrm{CoAd}(g) ; g \in IG_n, \mathrm{CoAd}(g)\Omega_n \subset \Omega_n \}$ には $(Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ の置換と変換 $y_n \to -y_n$ が含まれることはすぐ分かる。

Lemma 3　$F|\Omega_n = t_i$ なる $F \in \mathcal{I}_n$ が存在する $(1 \le i < n)$。

Proof　$F(Y, y) = -|y|^2 \in \mathcal{I}_n$ ゆえ，$i=1$ のときは正しい。以下，$i, n-1 > 1$ を仮定してよい。

$$\mathcal{Y}_0 = \left\{\left(Y, \begin{pmatrix}0\\ z_n\end{pmatrix}\right) ; Y \in \mathfrak{G}_n, z_n \in \mathbb{C}\right\} \subset I\mathfrak{G}_n^*,$$

$$H_0 = \left\{\begin{pmatrix} u & 0 & a\\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ; u \in G_{n-1}, a \in \mathbb{C}^n\right\} \subset IG_n,$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y' & y\\ -y^* & Y_n\end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_n \text{ に対し}, \quad \check{Y} = Y' + \frac{1}{n-1}Y_n$$

とおき，$f_0^{(i)}(Y)$ を

$$\det(t + \check{Y}) = t^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} f_0^{(i)} t^{n-1-i}$$

で定め，$\mathcal{Y}_0$ 上の多項式 $F_0^{(i)}$ を次で定義する.

$$F_0^{(i)}\left(Y, \begin{pmatrix}0\\ z_n\end{pmatrix}\right) = f_0^{(i)}(Y)\left(\sqrt{-1}|z_n|\right)^{2i}.$$

明らかに $F_0^{(i)}$ は t^i の拡張で，$G_{n-1}(\subset H_0)$ で不変。$\mathbb{C}^n(\subset H_0)$ で不変であることも(2)とLemma 1より容易に分かる。$z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ に対し $v_z \in G_n$ は ${}^t(v_z z) = (0, \cdots, 0, \sqrt{-1}|z|)$ をみたすとせよ。

$$(3) \quad F^{(i)}(Y, z) = F_0^{(i)}(v_z \cdot (Y, z))$$

で $(Y, z) \in \mathfrak{G}_n \times \mathbb{C}^n$ $(z \neq 0)$ の関数を定めると，$F_0^{(i)}$ の H_0-不変性によ

って，$F^{(i)}$ は v_z のとり方によらぬ。$g=\begin{pmatrix}u&a\\0&1\end{pmatrix}\in IG_n$ に対し $g\cdot z=uz$ とおくと

(4) $\quad v_{g\cdot z}\, g\, v_z^{-1}\in H_0$

に注意する。実際 $u=I$ のときは，$\mathbb{C}^n$ が IG_n の正規部分群ゆえ明らかで，$a=0$ のときは，$v_{uz}\,u\,v_z^{-1}\,{}^t(0,\cdots,0,c)={}^t(0,\cdots,0,c)$ であるから(4)の左辺は H_0 の元。かくて，$g\cdot(Y,z)=v_{g\cdot z}\,g\,v_z^{-1}\cdot(v_z\cdot(Y,z))$ 及び(4)により $F^{(i)}$ は IG_n-不変である。次に，$F^{(i)}$ が $3i$-次斉次多項式であることを示そう。$z={}^t(z_1,\cdots,z_n)$ $(z_2,\cdots,z_{n-1}\neq 0)$ に対し，$w_k=\left(\sum_{i=1}^{k}|z_i|^2\right)^{1/2}$ $(2\leq k\leq n)$ とおき，$v_z^{(k)}\in G_n$ を

$$v_z^{(2)}=\frac{\sqrt{-1}}{w_2}\begin{pmatrix}-z_2&z_1\\ \bar{z}_1&\bar{z}_2\end{pmatrix},\qquad v_z^{(k)}=\frac{\sqrt{-1}}{w_k}\begin{pmatrix}-z_k&\sqrt{-1}\,w_k\\ -\sqrt{-1}\,w_k&\bar{z}_k\end{pmatrix}\ (2<k\leq n)$$

で定め，$v_z=v_z^{(n)}\cdots v_z^{(2)}$ とすれば $v_z z={}^t(0,\cdots,0,\sqrt{-1}\,w_n)$.

(3)においてこの v_z を用いれば

(5) $\quad F^{(i)}(\rho Y,\rho z)=\rho^{3i}F^{(i)}(Y,z)\qquad(\rho>0)$

と，$F^{(i)}$ が $\mathrm{Im}\,z_n$，$\mathrm{Re}\,z_n$ に関して多項式であることが分かる；

(6) $$F^{(i)}(Y,z)=\sum_{k\geq 0}^{\text{finite}} f_k(Y,z_1,\cdots,z_{n-1},\mathrm{Im}\,z_n)(x-1+1)^k$$
$$=\sum_{k\geq 0}^{\text{finite}} g_k(Y,z_1,\cdots,z_{n-1},\mathrm{Re}\,z_n)(y-1+1)^k.$$

ここで，f_k, g_k は $Y=0$, $z_1=\cdots=z_{n-1}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$, $\mathrm{Im}\,z_n=1$ or $\mathrm{Re}\,z_n=1$ の近傍で解析的。Y の各成分についても同様であることも分かる。$F^{(i)}$ が $u=\omega_{jn}\in G_n$ $(1\leq j<n)$ に関して不変であることから，結局 $F^{(i)}$ が $\mathrm{Re}\,z_j$, $\mathrm{Im}\,z_j$ に関しても，他の (Y,z) の

解析関数を係数とする多項式である。次の Lemma 4 によって $F^{(j)}$ は多項式で，(5)より $3i$ 次斉次式であることも分かる。■

<u>Lemma 4</u>　$f(x_1,\dots,x_p)$ は $(x_1,\dots,x_p)=0$ の近傍で解析的で，正整数 m と，$(x_1,\dots,\check{x}_j,\dots,x_p)=0\in\mathbb{R}^{p-1}$ の近傍で解析的な $f_{jk}(x_1,\dots,\check{x}_j,\dots,x_p)$ があって $(1\le j\le p)$，

$$f(x_1,\dots,x_p)=\sum_{k=0}^{m} f_{jk}(x_1,\dots,\check{x}_j,\dots,x_p)\,x_j^{k}$$

が 0 の近傍で成立てば，f は高々 mp 次の多項式。

<u>Lemma 5</u>　$\mathcal{I}_n$ に属する斉次多項式 F の Ω_n への制限が

$$\sum_{l\ge 0} f_l(Y_1,\dots,Y_{n-1})\,y_n^{2l} \qquad (f_l \text{ は } Y_{n-1} \text{ によらぬ})$$

と表わされるとき，$f_l\neq 0$ なら $\deg f_l\le l$。

<u>Proof</u>　この§の初めにお断りした通り略.

<u>Corollary</u>　$\mathcal{J}_n=\mathbb{C}[t_1,\dots,t_{n-1}]$.

<u>Proof</u>　Lemmas 2, 3 により "$\subset$" を示せばよい。$Y_1,\dots,Y_{n-1}$ の symmetric polynomial $\hat{f}_l$ を

$$\hat{f}_l(Y_1,\dots,Y_{n-1})=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{n-1}} f_l(Y_{\tau(1)},\dots,Y_{\tau(n-1)})$$

$$=\Big(\sum_{\alpha_1=0}+\sum_{\alpha_1>0}\Big)\, a_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}\,\sigma_1^{\alpha_1}\cdots\sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \qquad \Big(\sum_{i=0}^{n-1} i\alpha_i=\deg f_l\Big)$$

で定義し，かつ表示しておく。ただし，σ_i は $Y_1,\dots,Y_{n-1}$ の i-th fundamental symmetric polynomial. $Y_1+\dots+Y_{n-1}=0$ のとき $\hat{f}_l=f_l$ だから，

$$f_\ell(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}) y_n^{2\ell} = \sum a_{0\alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} s_2^{\alpha_2} \cdots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}} y_n^{2\ell}$$
$$= \sum a_{0\alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}} t_1^{\alpha} t_2^{\alpha_2} \cdots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$
$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} i\alpha_i = \deg f_\ell \right),$$

但し，$\alpha = \ell - \deg f_\ell$ ．以上で "C" が示された。∎

References

[1] Abellanas & L. Martinez Alonso, A general setting for Casimir invariants, J. Math. Phys., 16(1975), 1580 - 1584.

[2] M. Chainchian et al., The Casimir operators of inhomogeneous groups, preprint.

[3] R. Gilmore, Rank 1 expansions, J. Math. Phys., 13(1972), 883 - 886.

[4] R. Gilmore, Lie groups, Lie algebras, and some of their applications, John Wiley & Sons 1974.

[5] H. Kaneta, The invariant polynimial algebras for the groups IU(n) and ISO(n), preprint.

[6] J. Rosen & P. Roman, Some observations on enveloping algebras of noncompact groups, J. Math. Phys., 7(1966), 2072-2078.

[7] J. Rosen, Construction of invariants for Lie algebras of inhomogeneous pseudo-orthogonal groups, J. Math. Phys., 9(1968), 1305 - 1307.

[8] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall, Inc., 1974.

[9] M. L. F. Wong & Hsin-Yang Yeh, Invariant operators of IU(n) and IO(n) and their eigenvalues, J. Math. Phys., 20(1979), 247 - 250.

Tokushima University