ユニタリ表現論セミナー報告集 II,1982
pp.1-19

Real rank 1 の半単純リー群のcompact商空間におけるSelberg zeta関数

広大 理　若山 正人

A. Selberg が[8]で定義したcompactリーマン面に付随したある種のDirichlet級数(Selberg zeta)の理論は，その後R. Gangolliによって一般のrank 1の対称空間に拡張されている。本稿の目的は，rank 1の対称空間のcompact商空間上のvector bundleに付随したSelberg型のzeta関数を構成しその性質を調べることにある。(特別な場合は既に[7]等がある。)

§1. 準備

G をreal rank 1の連結，non-compact半単純リー群で中心有限なものとし，K をその極大compact部分群の1つとする。$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を G, K のリー環とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{k}$ によって定まるinvolution θ によるCartan分解とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ を含む θ-stableな $\mathfrak{g}$ のCartan部分環 ($\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_\mathfrak{k}+\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{k}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}$) とする。$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c$ を $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ の夫々の複素化とし $\Phi(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ をそのルートの集合とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+i\mathfrak{a}_\mathfrak{k}$ のdualに両立する順序を入れ，そ

の順序に関する正のルートの全体を Φ^+ とする。$P_+=\{\alpha\in\Phi^+ \mid \alpha|\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\neq 0\}$, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P_+}\alpha$ とおく。$\alpha\in\Phi^+$ に対し，X_α をそのルートvectorとし $\mathfrak{n}_\mathbb{C}=\sum_{\alpha\in P_+}\mathbb{C}X_\alpha$ とおく。$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{g}$ とおくと，岩沢分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+\mathfrak{n}$, $G=KA_\mathfrak{p}N$ $(g=k\exp H(g)n)$ を得る。更に $M=Z_K(A_\mathfrak{p})$ とおく。W を $(G, A_\mathfrak{p})$ の Weyl 群とする。Σ^+ を P_+ の元の $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ への制限の全体とすると $\Sigma^+=\{\lambda, 2\lambda\}$ となる（2λ がない場合もある）。p, q を夫々 $\lambda, 2\lambda$ の重複度とする。$H_0\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ を $\lambda(H_0)=1$ なるものとすると $\rho(H_0)=\frac{1}{2}(p+2q)$ である。以後 $\rho_0=\rho(H_0)$ とおく。$t\in\mathbb{R}$ に対し $a_t=\exp tH_0\in A_\mathfrak{p}$ とおき $A_\mathfrak{p}$ と $\mathbb{R}$ を同一視し $A_\mathfrak{p}$ の Haar 測度を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度 dt で定める。また $\nu\in\Lambda$ ($\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ の dual) に対し $r=\nu(H_0)\in\mathbb{R}$ で Λ を $\mathbb{R}$ と同一視し Λ 上の測度を dt の dual 測度 $dr/2\pi$ で定める。dk, dm を K, M の正規化された Haar 測度とし，N の Haar 測度 dn は $\int_N \exp(-2\rho(H(\bar{n})))\,dn=1$ $(\bar{n}=\theta(n^{-1}))$ を満たすものとして定める。G 上の Haar 測度 dg は $dg=\exp 2\rho(\log h)\,dk\,dh\,dn$ で定める。一般に G の部分群 L に対し $\hat{L}$ で L の既約ユニタリ表現の同値類の全体を表すことにする。また，任意の有限次元表現 σ に対し $\chi_\sigma=\mathrm{tr}\,\sigma$ とおく。

さて，$f\in C_c(G)$ に対し，その Abel 変換 F_f を次で定義する。

$$F_f(ma_t)=e^{t\rho_0}\int_{K\times N} f(kma_tnk^{-1})\,dn\,dk .$$

$\pi_{\xi,\nu}$ $(\xi\in\hat{M})$ を G の主系列表現，$\Theta_{\xi,\nu}$ をその指標とするとき

$$\Theta_{\xi,\nu}(f)=\int_{M\times R} F_f(ma_t)\,\chi_\xi(m)\,e^{it\nu}\,dt\,dm$$

が成立し,更に反転公式とPeter-Weylの定理により,次が分る。

$$(1,1)\qquad F_f(ma_t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\xi\in\hat{M}}\int_{\mathbb{R}}\theta_{\xi,\nu}(f)\,\overline{\chi_\xi(m)}\,e^{-i\nu t}\,d\nu$$

Eを$\tau\in\hat{K}$に付随したG/K上のvector bundleとし,$C^\infty(E)$でE上のC^∞-sectionの全体を表す。$C^\infty(E)$はG-moduleであるが,そのG-作用から自然に$U(\mathfrak{g})$(展開環)の$C^\infty(E)$への作用が引き起こされる。そこで,$\Omega\in U(\mathfrak{g})$を$G$のCasimir作用素とし,これを$E$上の$G$-不変楕円型微分作用素とみたものを$\Omega_E$と書くことにする。いま$\nabla^2$を$E$上の$G$-不変接続から定まるconnection Laplacianとすると次が成り立つ。

<u>Proposition 1.</u> [11] scalar λ_σが存在して$\Omega_E=\nabla^2+\lambda_\sigma I$が成り立つ。

Γを$\Gamma\backslash G$がcompactなGのtorsion freeな離散部分群とする。

$\Gamma\backslash G/K$は多様体でΓはG/Kに等長に作用するから,G/Kのリーマン構造を$\Gamma\backslash G/K$に落とすと$G/K\to\Gamma\backslash G/K$は局所等長である。よって,$\Omega_E$, ∇^2を$\Gamma\backslash E$上の楕円型微分作用素にpush downしたものをΩ_Γ, ∇_Γ^2とすれば,$\Omega_\Gamma=\nabla_\Gamma^2+\lambda_\sigma I$が成り立つ。

T_ΓをΓの有限次元ユニタリ表現とし,UをT_Γから誘導されたGの表現とすると,Γの仮定から $U\simeq\sum_{\pi\in\hat{G}}m_{T_\Gamma}(\pi)\pi$ (離散直和) が成り立つ。Γの元γは$A=A_kA_p$の元と共役故,その共役元を$h(\gamma)=h_k(\gamma)h_p(\gamma)$と記す。$u_\gamma=\lambda(\log h_p(\gamma))$と定義すると$|u_\gamma|$は$\gamma$にのみ依存する数であり,$h_k(\gamma)$は$M$の共役を除いて定まる。また,$C_\Gamma$を$\Gamma$の元の

Γ-共役類の代表元の全体とすると $\{|u_\gamma| \mid \gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}\}$ は最小値(>0)をもつことが知られている。Γの任意の元 $\gamma(\neq e)$ は unique な primitive 元 δ の正の巾表示をもつので整数 $j(\gamma)$ を $\gamma=\delta^{j(\gamma)}$ で定める。更に $\Gamma\backslash G$ の測度は $\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma} f(\gamma g)\,dg = \int_G f(g)\,dg$ で正規化し, $vol(\Gamma\backslash G)$ はこの測度による $\Gamma\backslash G$ の volume とする。以下の議論において主たる道具となる跡公式は, $f\in C_c^\infty(G)$ に対し次のように書ける。

$$(1.2)\quad \sum_{\pi\in\hat G} m_{T_\Gamma}(\pi)\Theta_\pi(f) = \chi_{T_\Gamma}(e)\,vol(\Gamma\backslash G)f(e) + \sum_{\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}} \chi_{T_\Gamma}(\gamma)|u_\gamma|j(\gamma)^{-1}C(h(\gamma))F_f(h_p(\gamma))$$

ここで, Θ_π は π の指標, $C(h)$ は G の構造から決まる正値関数で, $C(h(\gamma))F_f(h(\gamma))$ は γ の G-共役類にのみ依存する数である。詳しくは [1] を見られたい。

$\mathcal{C}'(G)$ を Harish-Chandra の意味に於て integrable な急減少関数の空間とする。跡公式に適用可能な関数 (admissible 関数) の1つの十分条件として次の Miatello [6] の結果がある。

Proposition 2. K-central かつ K-finite な $\mathcal{C}'(G)$ の元は admissible 関数である。

§2. Selberg zeta の対数微分の構成, そしてその性質.

$\hat M_\tau = \{\sigma\in\hat M \mid [\tau|_M:\sigma]\neq 0\}$ $(\tau\in\hat K)$ とおく。 $\lambda_{\sigma,\nu} := \pi_{\sigma,\nu}(\Omega)$

とおくと $\lambda_{\xi,\nu}=-(\nu^2+\rho_0^2+\lambda_\xi)$ である。多項式 P_τ を

$$P_\tau(X)=\prod_{\substack{\xi\in\hat{M}_\tau\\ j=1\sim r}}(X-\lambda_{\xi,iz_j})^{N_j}$$

と定義する。但し，iz_j, N_j $(j=1\sim r)$ は，G，τ によってきまる，ある関数（c_τ-関数等）の上半平面における極とその位数であるが詳細は［6］を見られたい。（下記の Proposition 5.(ii) の成立に必要）

ν に関する偶多項式 P_τ^ξ を $P_\tau^\xi(\nu)=P_\tau(\lambda_{\xi,\nu})$ で定義する。また，D_τ^ξ でその Fourier 変換が P_τ^ξ となる $\mathbb{R}$ 上の微分作用素を表すものとする。

正数 ε_0 を $\{|\lambda_{\xi}| \mid \tau\in G\setminus\{e\}\}$ の最小値よりも小さくとる。$g\in C^\infty(\mathbb{R})$ を以下の性質を持つ実数値関数とする：(1) 偶関数，(2) 0のある近傍で $g\equiv 0$，(3) $g(x)=c$（定数）on $x\geqq\varepsilon_0$，(4) $0\leqq g\leqq c$。このような関数は実際に存在する。定数 $c=c_\xi$ は後に都合の良いように定めることにする。

いま，$H(r)=\int_0^\infty g'(x)e^{irx}dx$ $(r\in\mathbb{C})$ とおくと，$g'\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であるから古典的な Paley-Wiener 定理より次が従う。

<u>Proposition 3.</u>［1］ H は整関数である。更に，$\forall n\geqq 1$, $\forall m\geqq 0$ に対し定数 $C_{m,n}>0$ が存在して

$$|d^mH(r)/dr^m|\leqq\begin{cases}C_{m,n}(1+|r|)^{-n} & :\mathrm{Im}\,r\geqq 0\\ C_{m,n}(1+|r|)^{-n}\exp(\varepsilon_0|\mathrm{Im}\,r|) & :\mathrm{Im}\,r<0\end{cases}$$

が成り立つ。

$\forall s\in\mathbb{C}$ に対し $MA_{\mathfrak{z}}$ 上の関数 ${}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\mathcal{G}_s$ を次で定義する。

$$(2,1)\quad {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\mathcal{G}_s(ma) := [\mathfrak{z}:\tau_M]\,\overline{\chi_{\mathfrak{z}}(m)}\,D^{\mathfrak{z}}_{\tau}(g(\log a)\exp(-(s-\rho_0)|\log$$

但し $\tau_M=\tau|_M$ である。この ${}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\mathcal{G}_s$ の $MA_{\mathfrak{z}}$ の指標 $(\chi_{\sigma,\nu})$

Fourier 変換

$$ {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\widehat{\mathcal{G}}_s(\sigma,\nu) = \int_{\mathbb{R}\times M} {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\mathcal{G}_s(ma_t)\,\chi_\sigma(m)\,e^{i\nu t}\,dm\,dt$$

を計算すると，

<u>Proposition 4.</u>　$\mathrm{Re}\, s>\rho_0$ ならば

$$ {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\widehat{\mathcal{G}}(\sigma,\nu) = [\mathfrak{z}:\sigma][\mathfrak{z}:\tau_M]\,P^{\mathfrak{z}}_{\tau}(\nu)\left\{\frac{H(i(s-\rho_0)-\nu)}{s-\rho_0+i\nu}+\frac{H(i(s-\rho_0)+}{s-\rho_0-i\nu}\right.$$

となる。

$\tau\in\hat{K}$，$\mathfrak{z}\in\hat{M}_\tau$ に対し

$$ {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s(x) = d_\tau^{-1}\frac{1}{4\pi}\sum_{\sigma\in\hat{M}_\tau}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}\,(E_\tau\,\pi_{\sigma,\nu}(x)\,E_\tau)\;{}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\widehat{\mathcal{G}}_s(\sigma,\nu)\,\mu_\sigma(\nu$$

$$(\mathrm{Re}\, s>2$$

$$ {}^{\mathfrak{z}}_{\tau}h_s(x) = d_\tau^{-1}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}\,(E_\tau\,\pi_{\mathfrak{z},\nu}(x)\,E_\tau)\,P^{\mathfrak{z}}_{\tau}(\nu)\,e^{-(\nu^2+\rho_0^2)s}\,\mu$$

$$(s>0$$

とおく。但し，$\mu_\sigma(\nu)$ は Plancherel 測度，E_τ は $\pi_{\sigma,\nu}$ を

に分解したときの type τ への直交射影，また $d_\tau=\dim$

る。このとき次が成り立つ。

Proposition 5.-A. (i) $d_\tau \chi_\tau * {}^{\zeta}_{\tau}g_s = d_\tau {}^{\zeta}_{\tau}g_s * \chi_\tau = {}^{\zeta}_{\tau}g_s$

(ii) ${}^{\zeta}_{\tau}g_s \in \mathcal{E}'(G)$

(iii) $\Theta_{\sigma,\nu}({}^{\zeta}_{\tau}g_s) = {}^{\zeta}_{\tau}\widehat{\mathcal{G}}_s(\sigma,\nu)$

5-B. (i) $d_\tau \chi_\tau * {}^{\zeta}_{\tau}\ \ {}_s = d_\tau \cdot {}^{\zeta}_{\tau}h_s * \chi_\tau = {}^{\zeta}_{\tau}h_s$

(ii) ${}^{\zeta}_{\tau}h_s \in \mathcal{E}'(G)$

(iii) $\Theta_{\sigma,\nu}({}^{\zeta}_{\tau}h_s) = [\sigma:\zeta][\zeta:\tau_M]e^{-(\nu^2+\rho_0^2)s}P^{\zeta}_{\tau}(\nu)$.

Bの方は、Miatello [6] の結果より即座に導ける。(証明は以下に述べるAの証明とほぼ同じ要領。) Aの (i) (ii) は、その定義と Plancherel の定理より明らか。(ii) は、次の Lemma 6 を用いて直接に確められる。

Lemma 6. f を $\overline{H} = \{z \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ における、次の2性質を満たす有理型関数とする。

(i). 有理関数 $g(z)$ が存在して $|f(z)| \leq |g(z)|$ $(z \in \overline{H})$ が成り立つ。

(ii). f の極 $z_1, \cdots, z_k$ は、すべて半平面 $H_{\rho_0} = \{z \mid \mathrm{Im}\, z > \rho_0\}$ 内にある。極 z_j の位数を M_j $(j = 1 \sim k)$ とする。

$\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対し、関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{H(i(s-\rho_0)-x)}{s-\rho_0+ix} + \frac{H(i(s-\rho_0)+x)}{s-\rho_0-ix}$$

と定義する。更に、

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{itx} f(x)\, dx$$

とおくと，$\alpha > \mathrm{Re}(s-\rho_0)$ を満たす任意の正数 α に対して次が成立する。

Case I. $s-\rho_0-iz_j \neq 0$ $(j=1\sim k)$ ならば，degree が M_j-1 の多項式 $P_j(t)$ と定数 c が存在して，次が成立する。

$$e^{\alpha t^2}\left[I(t) - \sum_{j=1}^{k} P_j(t) e^{iz_j t} - c\, e^{-t(s-\rho_0)} \right] = O(\exp \varepsilon_0 |s-\rho_0-\alpha t|) \quad (t \to \infty).$$

Case II. ある ℓ $(1 \leq \ell \leq k)$ が存在して $s-\rho_0-iz_\ell = 0$ ならば，degree が M_ℓ の多項式 $\tilde{P}_\ell(t)$ と，degree が M_j-1 の多項式 $P_j(t)$ $(j \neq \ell)$ が存在して

$$e^{\alpha t^2}\left[I(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{k} P_j(t) e^{iz_j t} - \tilde{P}_\ell(t) e^{-t(s-\rho_0)} \right] = O(\exp \varepsilon_0 |s-\rho_0-\alpha t|) \quad (t \to \infty)$$

が成り立つ。

証明は，Proposition 3 で述べた H の性質を用いて出来る。

先の Proposition 5-A.B により $\mathfrak{g}_s$，$\mathfrak{h}_s$ は何れも admissible 関数である。夫々跡公式に当て嵌めてみることにする。

まず，$\mathfrak{g}_s$ については，ε_0 の定め方により

$$D_\tau^{\frac{3}{2}}(g(|u_\gamma|) \exp(-(s-\rho_0)|u_\gamma|)) = c\, P_\tau^{\frac{3}{2}}(i(\rho_0-s)) \exp(-(s-\rho_0)|u_\gamma|)$$

であるから (1,1) (1.2) により，$\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ のとき

$$(2,2)\quad \sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi)\,\theta_\pi({}^3_\tau g_s) = \chi_{\tau_\Gamma}(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,{}^3_\tau g_s(e)$$

$$+\, c\,P^3_\tau(i(s-\rho_0)) \sum_{\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}} \chi_{\tau_\Gamma}(\gamma)\,|u_\gamma|\,j(\gamma)^{-1} C(h(\gamma))\,\overline{\chi_3(m_\gamma)}\,[3:\tau_M]\,\exp(\rho_0-s)|u_\gamma|$$

となる。同じくして．${}^3_\tau h_s$ については $s>0$ のとき

$$(2,3)\quad \sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi)\,\theta_\pi({}^3_\tau h_s) = \chi_{\tau_\Gamma}(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,{}^3_\tau g_s(e)$$

$$+ \sum_{\gamma\in C_\Gamma\setminus\{e\}} \chi_{\tau_\Gamma}(\gamma)\,|u_\gamma|\,j(\gamma)^{-1} C(h(\gamma))\,\overline{\chi_3(m_\gamma)}\,[3:\tau_M]\,D^3_\tau\left[(4\pi s)^{-1/2} e^{-(\rho_0^2 s + u_\gamma^2/4s)}\right]$$

が成立する。

(2.2)の右辺第2項を $\eta^3_\tau(s)$ とおくと，$\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ でこの級数は広義一様絶対収束し．そこで正則関数を与える。同じく (2.3) の右辺第二項を $L^3_\tau(s)$ とおく。この級数は $s>0$ で広義一様絶対収束している。$L^3_\tau(s)$ は．大旨．heat operator $-\nabla_\Gamma^2$ の kernel の trace を変形したものである。次の Proposition 7 は．Selberg zeta の対数微分（と言える）$\eta^3_\tau(s)$ が．$L^3_\tau(s)$ の Fourier-Laplace 変換で与えられていることを主張している。

<u>Proposition 7</u>　$\mathrm{Re}\, t > 2\rho_0$ ならば

$$\eta^3_\tau(t) = 2c\,(t-\rho_0)\int_0^\infty e^{-t(t-2\rho_0)s}\,L^3_\tau(s)\,ds$$

次に$\eta^{\xi}_{\tau}(s)$の全平面への有理型関数としての解析接続について述べることにする。はじめに，(2.2)の左辺の和に現れる$\hat{G}$に parameter を入れる為に Langlands [5] の結果を記す。

<u>Proposition 8.</u> $\hat{G}$は次の(i)〜(v)から成る

(i) $\pi \in \hat{G}_d$ (離散系列)

(ii) $\pi \in \hat{G}_c$ (既約な unitary 主系列)

(iii) $\pi \in \{\pi^{+}_{\xi,0}, \pi^{-}_{\xi,0}\}$ (離散系列の極限)

(iv) $\pi \in \hat{G}_{comp.}$ (補系列，$\pi \cong \pi_{\xi,\nu} \Rightarrow 0 > -i\nu \geqq -\rho_0$)

(v) πは infinitesimal に Langlands quotient $L_{\sigma,\nu} = \pi_{\sigma,\nu}/\mathrm{Ker}\, A(\nu)$ $(0 > -i\nu \geqq -\rho_0)$と同値．但し．$A(\nu): H^{\sigma,\nu} \longrightarrow H^{\sigma^s,-\nu}$ $(s \in W \setminus \{1\})$は canonical な intertwining operator.

$\xi \in \hat{M}_\tau$に対し

$$Q^{\xi}_{\tau} = \{\pi \in \hat{G} \mid \pi \in U,\ \Theta_\pi({}^{\xi}_{\tau}g_s) \neq 0\},$$

$${}^{1}Q^{\xi}_{\tau} = \{\nu \in \mathbb{R}^+ \mid \pi_{\xi,\nu} \in \hat{G},\ \pi_{\xi,\nu} \in U\},$$

$${}^{2}Q^{\xi}_{\tau} = \{\nu \in i\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \mid \pi_{\xi,\nu} \in \hat{G},\ \pi_{\xi,\nu} \in U\}$$

とおく。${}^{\xi}_{\tau}g_s$の定義より明らかに$\hat{G}_d \cap Q^{\xi}_{\tau} = \phi$である。

さて．便宜的に以下の規約を設けることにする。

1。$\pi_{\xi,0} \cong \pi^{+}_{\xi,0} \oplus \pi^{-}_{\xi,0}$となる場合。

$m_{\Gamma}(\pi^{+}_{\xi,0})\Theta_{\pi^{+}_{\xi,0}}({}^{\xi}_{\tau}g_s)$と$m_{\Gamma}(\pi^{-}_{\xi,0})\Theta_{\pi^{-}_{\xi,0}}({}^{\xi}_{\tau}g_s)$の少なくとも一方は0である。そこで新しく$\pi_{\xi,0}$を次のように定義する。

$$m_{T_r}(\pi_{\mathfrak{z}.0})\cdot\pi_{\mathfrak{z}.0} := \begin{cases} m_{T_r}(\pi^+_{\mathfrak{z}.0})\,\pi^+_{\mathfrak{z}.0} & : \ \Theta_{\pi^+_{\mathfrak{z}.0}}({}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s) \neq 0 \\ m_{T_r}(\pi^-_{\mathfrak{z}.0})\,\pi^-_{\mathfrak{z}.0} & : \ \Theta_{\pi^-_{\mathfrak{z}.0}}({}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s) \neq 0 \end{cases}$$

2。 $\pi \cong L_{\sigma.\nu} = \pi_{\sigma.\nu}/\mathrm{Ker}\,A(\nu)$ (infinitesimal) の場合。

$\mathrm{Ker}\,A(\nu) \cap (H^{\sigma.\nu})_\tau = 0$ ならば $\Theta_{L_{\sigma.\nu}}({}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s) = \Theta_{\pi_{\mathfrak{z}.\nu}}({}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s)$ である。また. $\mathrm{Ker}\,A(\nu) \cap (H^{\sigma.\nu})_\tau \neq 0$ ならば. $P^{\sigma}_{\tau}(\nu) = P_\tau(\lambda_{\sigma.\nu}) = 0$ となるので $\pi_{\sigma.\nu}({}^{\mathfrak{z}}_{\tau}g_s) = 0$ である。 そこで. $\pi = \pi_{\sigma.\nu}$ と定義する。

この規約の下で明らかに $Q^{\mathfrak{z}}_{\tau} \simeq {}^1Q^{\mathfrak{z}}_{\tau} \cup {}^2Q^{\mathfrak{z}}_{\tau}$ である。以後 $Q^{\mathfrak{z}}_{\tau} = {}^1Q^{\mathfrak{z}}_{\tau} \cup {}^2Q^{\mathfrak{z}}_{\tau}$ として $Q^{\mathfrak{z}}_{\tau}$ に parameter を入れる。更に. $\tilde{Q}^{\mathfrak{z}}_{\tau} = \{\nu \in Q^{\mathfrak{z}}_{\tau} \mid P^{\mathfrak{z}}_{\tau}(\nu) \neq 0\}$ とおく。

[1] [12] と同様にして次の Proposition 9. 10. 11 が得られる。

<u>Proposition 9.</u> $A^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) = \sum_{\nu\in\tilde{Q}^{\mathfrak{z}}_{\tau}} m_{T_r}(\pi_{\mathfrak{z}.\nu})\,{}^{\mathfrak{z}}_{\tau}\mathcal{G}_s(\mathfrak{z}.\nu)$

は. $\mathrm{Re}\,s > 2\rho_0$ で正則で. 全平面に有理型関数として解析接続される。その極は.すべて一位であり. 位置とそこにおける留数はつぎのとうり。

極: $\rho_0 \pm i\nu \quad (\nu \in \tilde{Q}^{\tau}_{\mathfrak{z}})$

留数: $c\, m_{T_r}(\pi_{\mathfrak{z}.\nu})\, P^{\mathfrak{z}}_{\tau}(\nu)\, [\mathfrak{z} : \tau_M]$

但し. ρ_0 が極なら $(0 \in \tilde{Q}^{\tau}_{\mathfrak{z}})$, そこでの留数は

$2c\, m_{T_r}(\pi_{3,\nu})\, P^{3}_{\tau}(\nu)\,[3:\tau_M]$ となる。

<u>Proposition 10.</u> $r_k = r^3_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ を Plancherel 測度 μ_3 の上半平面における極とし，$d_k = d^3_k$ をその極における留数とすると

$$ {}^{3}_{\tau}g_s(e) = i\,[3:\tau_M]\sum_{k\geq 0} P^3_\tau(r_k)\,\frac{H(i(s-\rho_0)+r_k)}{s-\rho_0-ir_k}\,d_k $$

であり，右辺の級数は $\{\rho_0+ir_k\}_{k=0,1,\cdots}$ を除いたところで広義一様絶対収束するので全平面での有理型関数を与える。その極はすべて一位でつぎのようになる。

極：　ρ_0+ir_k $(k=0,1,\cdots)$

留数：　$i\,[3:\tau_M]\,P^3_\tau(r_k)\,d_k\cdot c$ 。

<u>Proposition 11.</u> $\eta^3_\tau(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ で正則で (2.2) により関係式

$$ \eta^3_\tau(s) = A^3_\tau(s) - \chi_{T_r}(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,{}^{3}_{\tau}g_s(e) $$

が判るから，全平面に有理型関数として延長出来る。その極は，Proposition 9, 10 を合わせたものとなり，すべて一位である。

$$ \Phi^3_\tau(t) = c\,[3:\tau_M]\,P^3_\tau(it)\,\chi_{T_r}(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,\mu_3(it) $$

とおくと次の関数等式が成立する。

<u>Theorem 12.</u> $\eta^3_\tau(s) + \eta^3_\tau(2\rho_0 - s) + \Phi^3_\tau(s-\rho_0) \equiv 0 \quad (s\in\mathbb{C})$.

証明は従来の方法（［1］［8］等）を用いても出来るが，Proposition 7 の関係があるので，Laplace 変換の逆変換公式を利用することにより少しばかり簡潔な別証明が得られる。

§3. Selberg zeta 関数

$$\tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}(s) = \eta^{\,3}_{\tau}(s)\left(P^{3}_{\tau}(i(s-\rho_0))\right)^{-1},$$

$$\phi^{3}_{\tau}(s) = \Phi^{3}_{\tau}(s)\left(P^{3}_{\tau}(i(s-\rho_0))\right)^{-1}$$

$$= c\,\chi_{T_\tau}(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,\mu_3(i(s-\rho_0))$$

とおくと，明らかに関数等式

$$(3.1)\qquad \tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}(s) + \tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}(2\rho_0 - s) + \phi^{3}_{\tau}(s) = 0$$

が成り立つ。

ところで，$P^{3}_{\tau}(i(s-\rho)) = \prod_{\substack{\sigma\in\hat{M}_\tau \\ j=1\sim r}} \{(s-\rho_0)^2 - z_j^2 - \lambda_3 + \lambda_\sigma\}^{N_j}$ であったから，$\tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}$ は新たに，$s = \rho_0 \pm \sqrt{z_j^2 - \lambda_3 + \lambda_\sigma}$ （$j = 1\sim r$，$\sigma\in\hat{M}_\tau$）を極に持つ可能性がある。いま $\alpha^{\pm}_{j,\sigma} = \rho_0 \pm \sqrt{z_j^2 - \lambda_3 + \lambda_\sigma}$ （複号同順）とおく。更に $\{\alpha^{\pm}_{j,\sigma}\}$ のうち実際に $\tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}(s)$ の極になっているものに番号を付けて $\{\beta^{\pm}_k\}_{k=0\cdots\ell}$ とする。但し，$s=\rho_0$ が極になっているときは，$\beta^{+}_0 = \beta^{-}_0 = \rho_0$ とする。関数等式 (3.1) により，$\alpha^{+}_{j,\sigma}$ が極ならば $\alpha^{-}_{j,\sigma}$ も極になっていることに注意されたい。

$\tilde{\eta}^{\,3}_{\tau}(s)$ の $\beta^{\pm}_k$ におけるローラン展開の主要部を $P^{\pm}_k(s)$ とする。

いま、$f(s) = \tilde{\eta}^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) - (P_k^+(s) + P_k^-(s))$ とおく。但し $k=0$ で $\beta_0^\pm = \rho_0$ のときは自明な修正を施すものとする。$\phi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$ は一位の極しかもたないから関数等式より、$\beta_k^+ + \beta_k^- = 2\rho_0$ に注意すると

$$P_k^\pm(s) = \sum_{\substack{n<0 \\ n:\text{奇数}}} \frac{c_n}{(s-\beta_k^\pm)^n} \qquad (\text{複号同順})$$

の形であることが判る。それ故 $f(s)$ は $s=\beta_k^\pm$ で正則で $\tilde{\eta}^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$ と同じ関数等式を満たす有理型関数である。

$$B^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) = \sum_{k=0}^{\ell} (P_k^+(s) + P_k^-(s)),$$

$$\zeta^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) = \tilde{\eta}^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) - B^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$$

とおく。上記の考察と $\zeta^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$ の作り方により次が得られる。

<u>Proposition 13.</u> $\zeta^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$ は一位の極のみを持つ全平面での有理型関数で、その極及び留数は以下のとおりである：

極	留数
$s=\rho_0 \pm i\nu \quad (\nu \in \tilde{Q}^{\mathfrak{z}}_{\tau})$	$c\cdot[\mathfrak{z}:\tau_M]\, m_{T_\Gamma}(\pi_{\mathfrak{z},\nu})$
$s=\rho_0 + ir_k \quad (k \geq 0)$	$ic\cdot d_k\,[\mathfrak{z}:\tau_M]\,\chi(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)$

また、関数等式

$$\zeta^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) + \zeta^{\mathfrak{z}}_{\tau}(2\rho_0 - s) + \phi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) = 0 \qquad (s \in \mathbb{C})$$

が成り立つ。

ところで，$i d_K$は有理数，$vol(\Gamma\backslash G)$も我々の測度の決め方により有理数であることが知られているので．$C=C_3$（$=H(0)$）を十分大なる正整数にとることによって$\xi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$の留数を全て整数と出来る。そこでこのような性質を満たす正整数のうちで最小の値をもって$C=C_3$の値と定めることにする。そうすると，$(d/ds)(\log Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)) = \xi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$を満たす有理型関数$Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)=Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s, T_\Gamma)$が定数を除き一意に定まる。いま(偶)整数$m_0$を次のように定義する。

$$m_0 = \begin{cases} 0 & : \ 0 \notin \tilde{Q}^{\mathfrak{z}}_{\tau} \\ 2C\, m_{T_\Gamma}(\pi_{\mathfrak{z}}, 0)\,[\mathfrak{z} : \tau_M] & : \ 0 \in \tilde{Q}^{\mathfrak{z}}_{\tau} \end{cases} 。$$

このm_0を用いて$Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$を

$$(s-\rho_0)^{-m_0} Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) \longrightarrow 1 \qquad (s \to \rho_0)$$

と正規化しておく。このようにして定義された$Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$は次の諸性質を持つ。

<u>Theorem 14.</u> (A). $Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s)$は$\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$において正則で．全平面に有理型関数として解析接続可能。

(B) 関数等式をもつ：

$$Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(2\rho_0 - s) = Z^{\mathfrak{z}}_{\tau}(s) \exp \int_0^{s-\rho_0} \phi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(z)\, dz \ .$$

注意：積分$\exp\int_0^{s-\rho_0} \phi^{\mathfrak{z}}_{\tau}(z)\,dz$は明らかに well-defined である．

(C). $Z^{\xi}_{\tau}(s)$ の自明でない零点は有限個の例外を除きすべて線分 $\{s \mid \mathrm{Re}\, s = \rho_0\}$ 上にある。有限個の例外は（もし存在するとすれば）実数で区間 $[0, 2\rho_0]$ に ρ_0 に関し対称に分布している。零点 $s = \rho_0 \pm i\nu$ $(\nu \in \tilde{Q}^{\xi}_{\tau})$ の位数は $c \cdot [\xi : \tau_M]\, m_{T_\Gamma}(\pi_{\xi,\nu})$ である。

(D). $Z^{\xi}_{\tau}(s)$ は $s = \rho_0 + i r_k$ $(k \geqq 0)$ で位数が $i c\, d_k [\xi : \tau_M]\, \chi(e)\, \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)$ の（自明な）極，或いは零点を有する。極であるか零点であるかの識別は $i d_k$ の符号による。

(E) $\mathrm{Re}\, s > 2\rho_0$ で無限積表示をもつ：

$$Z^{\xi}_{\tau}(s) = f^{\xi}_{\tau}(s) \prod_{\delta \in \mathrm{Prim}\,\Gamma} \prod_{\alpha \in L} \left(\det\left(I - T_\Gamma(\delta)\, \xi(h_K(\delta))^{-1} \xi_\alpha(h(\delta))^{-1} e^{-s u_\delta}\right)\right)^{c_\xi \cdot m_\alpha}.$$

但し，○ $\mathrm{Prim}\,\Gamma$: Γ の primitive な元の全体.

○ $P_+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ とするとき $L = \{\alpha = \sum_{i=1}^{t} m_i \alpha_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geqq 0\}$ であり，m_α は $\alpha \in L$ を $\alpha = \sum_{i=1}^{t} m_i \alpha_i$ と表したときの順序をきめた表し方の数とする。また ξ_α は $\alpha \in L$ に対する A の指標である。

○ K はある定数で

$$f^{\xi}_{\tau}(s) = K \cdot \exp - \int_0^{s-\rho_0} B^{\xi}_{\tau}(z)\, dz$$

とおいた。ここで右辺の複素積分は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, \mu)$ 内の道（μ はある正数）で well-definited である。但し $s=0$ が $B^{\xi}_{\tau}(s)$ の極である場合は $Z^{\xi}_{\tau}(s)$ の正規化の方法を幾分修正することになる。

上記の $Z_\tau^\xi(s)$ を用いて

$$Z_\tau(s.T_\Gamma) = \prod_{\xi\in\hat{M}_\tau} Z_\tau^\xi(s.T_\Gamma)$$

と定義する。明らかに上と同様の定理が成立するが、詳細は省略する。この $Z_\tau(s.T_\Gamma)$ を $\tau\in\hat{K}$ に付随した vector bundle の Selberg 型の zeta 関数と呼ぶことにする。

以上。

文 献

[1]. Gangolli, R. Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. 21, 1～41 (1977).

[2]. Gangolli, R., Warner, G. On Selberg's trace formula. J. Math. Soc. Japan 27, 328～343 (1973).

[3]. Knapp, A.W., Okamoto, K. Limits of holomorphic discrete series. J. Func. Analysis 9, 375～409 (1972).

[4]. Knapp, A.W., Stein, E.M. Intertwining operators for semi-simple groups II. Invent. Math. 60, 9～84 (1980).

[5]. Langlands, R. On the classification of irreducible representations of algebraic groups, Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., (1975) (preprint).

[6]. Miatello, R.J. The Minakshisundaram-Pleijel coefficients for the vector valued heat kernel on compact locally symmetric spaces of negative curvature. Trans. A.M.S. 260 1～33 (1980).

[7]. Scott, D. Selberg type zeta functions for the group of complex two by two matrices of determinant one. Math. Ann. 253, 177～194 (1980).

[8]. Selberg, A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20, 47~87 (1956).

[9]. Trombi, P.C. Harmonic analysis of $C^p(G.F)$ $(1 \leq p < 2)$. J. Func. Analysis. 40, 84~125 (1981).

[10]. Wallach, N.R. On the Selberg trace formula in the case of compact quotient. Bull. Amer. Math. Soc. 82, 171~195 (1976).

[11]. Wallach, N.R. On the asymptotic formula of Gelfand and Gangolli for the spectrum of $\Gamma \backslash G$. J. Diff. Geom. 11, 91~101 (1976).

[12]. Wakayama, M. Zeta functions of Selberg's type for compact quotient of $SU(n.1)$ $(n \geq 2)$. (preprint).