ユニタリ表現論セミナー報告集 I, 1981
pp.115-121

SU(n,1)の保型形式の次元公式について

立教大．理　　加藤末広

Gを半単純リー群，Γをその離散群で，$vol(G/\Gamma)<\infty$ なものとする。Gの離散系列表現に対応する保型形式の次元については，G/Γ がコンパクトのとき，すでにかなり研究されてきているが，G/Γ が非コンパクトの場合はまだあまりなされていなかったように思われる。最近，荒川氏([1])により，SP(1,1)で $vol(G/\Gamma)<\infty$ の場合の保型形式の次元公式が求められたが，この方法はSP(1,1)以外の群にも拡張できると考えられる。本稿は，特にSU(n,1)に対して荒川氏の方法を適用して次元公式を考察したもので，その中間報告である。

1．準備，elementary τ-spherical function

以下，GをSU(n,1)とする。(但し，$n\geq 2$)。Gの岩沢分解を一つとり，G=KANとする。K，Aは次のよう

に与えることができる：

$$K=\left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{n}}I_n & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix};\ \begin{matrix}\theta\in\mathbb{R} \\ k\in SU(n)\end{matrix}\right\}$$

$$A=\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,t & 0 & \mathrm{sh}\,t \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \mathrm{sh}\,t & 0 & \mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}\quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

（但し，I_k は (k,k) 次恒等行列）。

A に対応するリー環を $\mathfrak{a}$ とし，その複素化を $\mathfrak{a}_c$，$\mathfrak{a}_c$ の dual を $\mathfrak{a}_c^*$ とする。$\hat{K}$ を K の既約ユニタリ表現の同値類全体の集合とする時，$\tau_\ell\in[\tau_\ell]\in\hat{K}$ を次の様に定義する：

$$\tau_\ell\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{n}}I_n & \\ & e^{i\theta} \end{pmatrix}\right)=e^{-i\ell\theta}$$

（1次元表現）　　$\ell\in\mathbb{Z}$，　$\theta\in\mathbb{R}$，

以上の準備の下で，elementary τ-spherical function が，$\nu\in\mathfrak{a}_c^*$，$\ell\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$\omega_{\nu,\ell}(x)=\int_K \tau_\ell(K(xk))\,\tau_\ell(k^{-1})\,e^{(i\nu-\rho)(H(xk))}\,dk$$

$$(x=K(x)H(x)N(x)\in KAN=G),$$

により定義される。但し，ρ は正のルートの和の半分とする。そのとき，$\omega_{\nu,\ell}$ は次の性質をみたす：

1)　$\omega_{\nu,\ell}(k_1 g k_2)=\tau_\ell(k_1)\,\omega_{\nu,\ell}(g)\,\tau_\ell(k_2)$

$g\in G$，$k_1,k_2\in K$，$\nu\in\mathfrak{a}_c^*$，$\ell\in\mathbb{Z}$。

2) $\omega_{\nu,\ell}$ は G の両側不変な微分作用素の同時固有関数になる。特に Casimir 作用素 Ω に対して，

$$\Omega\omega_{\nu,\ell} = \lambda_{\nu,\ell}\,\omega_{\nu,\ell}$$

但し，$\lambda_{\nu,\ell} = \dfrac{\ell^2}{12(n+1)} - \dfrac{1}{4(n+1)}(\nu_1^2+n^2)$

$$\nu_1 = \nu\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C},\quad (\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)。$$

3) $\omega_{\nu,\ell}(I_{n+1}) = 1$.

今，$a_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,t & & \mathrm{sh}\,t \\ & 0 & \\ \mathrm{sh}\,t & & \mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}$ とおくとき，$\omega_{\nu,\ell}$ の上の性質から，

$$f(a_t) = (\mathrm{ch}\,t)^{-n-2i\nu}\,F(a,b,c\,;(\mathrm{th}\,t)^2)$$

$$\begin{cases} a = \frac{n}{2} + i\nu + \frac{\ell}{2} & (\text{超幾何関数}) \\ b = \frac{n}{2} + i\nu - \frac{\ell}{2} & (t \in \mathbb{R}) \\ c = n \\ \nu^2 = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left\{\ell^2(n-1) - 12(n+1)\lambda_{\nu,\ell}\right\} \end{cases}$$

と表わせることが分かる。このことから容易に次の補題を得る，

<u>補題 1.</u>

1) $i\nu = -\frac{n}{2} - \frac{\ell}{2}$ のとき，$\ell < -2n-1$，

2) $i\nu = -\frac{n}{2} + \frac{\ell}{2}$ のとき，$\ell > 2n+1$，とする。そ

のとき，

① $\int_G |\omega_{\nu,\ell}(g)|\, dg < \infty$

② $|\omega_{\nu,\ell}(g)| < {}^{\exists}M_{\nu,\ell}$ (定数) $(\forall g \in G)$ 。

2．保型形式の定義と次元公式

Γ を $G = SU(n,1)$ の離散部分群で $vol(G/\Gamma) < \infty$ なものとする。さらに，$\nu \in \mathfrak{a}_c^*$，$\ell \in \mathbb{Z}$ を補題1.の条件をみたすようにとる。そのとき，Γ に対する保型形式を次の3つの条件を満足する G 上の連続関数とする：

① $|f(g)|$ は G 上有界

② $f(\gamma g k) = \tau_\ell(k) f(g) \qquad \forall \gamma \in \Gamma \quad g \in G \quad k \in K$

③ $\int_G \omega_{\nu,\ell}(g^{-1}h) f(g)\, dg = \frac{1}{c_{\nu,\ell}} f(h)$

但し，$c_{\nu,\ell} = \left(\int_G \omega(g^{-1})\, \omega(g)\, dg\right)^{-1}$。

Γ としてさらに算術的部分群という仮定をおくと，Harish-Chandra ([2]) によって知られているように，上で定義した保型形式全体の空間 $\mathcal{M}_{\nu,\ell}(\Gamma)$ は有限次元であることが分かる。以後，Γ は算術的であるとする。

次に，$K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h)$ $(g, h \in G)$ を，

$$K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h) = c_\nu \sum_{\gamma\in\Gamma} \omega(g^{-1}\gamma h)$$

によって定義すると，これはwell-definedでかつ次の命題がいえる：

<u>命題2.</u>

$\nu \in \mathfrak{a}_c^*$，$\ell \in \mathbb{Z}$ を補題1.の仮定をみたすようにとる時，

1) $K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h)$ は $G\times G$ の任意のコンパクト集合に対して絶対かつ一様収束する。さらに，$g\in G$ をとめたとき，$h\in G$ 上有界。

2) $\overline{K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h)} = K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(h,g)$

3) $K_{\nu,\ell}(g,h) \in \mathcal{M}_{\nu,\ell}(\Gamma)$
（h の関数とみる）

注意．$K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h)$ は実は $G\times G$ 上有界であることが分かる。（次の定理3.の証明の系としてでる。）

命題2.1)の証明は $\omega_{\nu,\ell}(g)$ の regular growth の性質による．すなわち，G 上非負値可積関数 $\phi_{\nu,\ell}$ と，G の単位元のコンパクト近傍 V が存在して，

$$|\omega_{\nu,\ell}(g)| \leq \int_V \phi_{\nu,\ell}(hg)\, d_G h \ .$$

$\mathcal{M}_{\nu,\ell}$ は $K^{\Gamma}_{\nu,\ell}(g,h)$ を使って，次の条件をみたす G 上の連続関数全体として特徴づけられる（$\mathcal{M}_{\nu,\ell}$ の次元が有限であることに注意する）。

① $\int_{\Gamma\backslash G} |f(g)|^2 dg < \infty$

② $f(\gamma g k) = \rho(k) f(g) \qquad \forall \gamma \in \Gamma \quad g \in G \quad k \in K$

③ $\int_{\Gamma\backslash G} K_{\nu,\ell}^{\Gamma}(g, h) f(g)\, dg = f(h)$.

このように$\mathcal{M}_{\nu,\ell}$をL²-空間と考えることにより次の定理を証明することができる.

<u>定理3.</u>

$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\ell \in \mathbb{Z}$を補題1の条件をみたすようにとる。その時,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{\nu,\ell}(\Gamma) = \int_{\Gamma\backslash G} \mathrm{Tr}\, K_{\nu,\ell}^{\Gamma}(g, g)\, dg \text{ 。}$$

定理3からさらに右辺を,Γの各共役元で分けて調べたいが,それは現在検討しているところである。

参考文献

[1] T. Arakawa, On Automorphic form of a quaternion unitary group of degree two ; Preprint

[2] Harish-Chandra, Automorphic forms on semisimple Lie groups ; Springer Lecture Notes in Math. Vol. 62

[3] A.B. Venkov : Expansions in automorphic eigenfunctions of

of the Laplace-Beltrami operator in classical symmetric spaces of rank 1 and the Selberg trace formula; Proc. Steklov Inst. Math. vol 125 (1973) 6-55

(4) N. Wallach, On The Selberg trace formula in the case of compact quotient, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) 171-195

(5) G. Warner, Selberg's trace formula for nonuniform Lattice: The R-rank one case; Advances in Math studies, vol. 6 (1979), 1-142。