

Harish-Chandra の C -函数について

都立大理 関口次郎

§ 0. 序

Harish-Chandra は、一般化された球函数の漸近展開の初項の係数として、表現付き C -函数を定義し、またその積分表示を与えた。 C -函数は Plancherel 測度と関係し、その極、~~零~~点の位置は対応する表現の可約性などに関係している。正しいかどうかは別にして、 C -函数の各行列成分は Beta 函数の積で表わせる、という信念を持つならば、具体的にそのような表示を書き下すことは、上の事実などを考慮すれば、かなり基本的な問題と思われる。

この報告では、特に $G = SU(p, q)$ の場合に、極大コンパクト群の任意の有限次既約表現に対する C -函数

のある行列成分が gamma 函数の積・商で表わせることを報告する。Wallach の本 [1], 大豆生田氏の $\text{Spin}(n, 1)$ の場合の計算などが参考になった。両氏に感謝します。

§ 1. 一般的注意

G を線型半単純 Lie 群, $G = KAN$ をその岩沢分解とする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ をそれぞれ G, K, A, N の Lie 環とする。 $g \in G$ に対して $g = k(g) \exp H(g) \cdot n(g)$ をその岩沢分解とする。 ここで $H(g) \in \mathfrak{a}$ である。 Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のルート系, α_a^* を $\mathfrak{a}$ の双対の複素化とする。 $\rho(H) = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad}(H)|_{\mathfrak{n}})$ ($H \in \mathfrak{a}$) で $\rho \in \alpha_a^*$ を定義する。 また $\mathfrak{n}$ を負のルートのルート空間の直和とする。

$\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{k}$ の 1 つの Cartan 部分環, $\Sigma_{\mathfrak{k}}$ を $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ のルート系とする。 $\Sigma_{\mathfrak{k}}$ の順序をひとつ固定し、その単純ルートの基本系に対する、基本 weights を $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$ ($l = \text{rank } \mathfrak{k}$) とする。 この時、任意の $\Lambda = \sum_{i=1}^l m_i \Lambda_i$ ($m_i \geq 0$, 整数) に対して, Λ を highest weight に持

つ K の既約表現 (π_λ, V_λ) が (同値なものを除いて) 一意に定まる。さて、この λ 及び $\lambda \in \sigma_\Phi^*$ を与えた時

$$C(\lambda, \lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)(H(\bar{n}))} \pi_\lambda(k(\bar{n})) d\bar{n}$$

が Harish-Chandra の C -函数である。ここで $\bar{N}$ は $\bar{n}$ に対応する G の解析的部分群, $d\bar{n}$ は $\bar{N}$ 上の不変測度である。今 V_λ の基底 $v_1, v_2, \dots, v_d$ ($d = \dim V_\lambda$) を各 v_i は weight ベクトルになるように選ぶ^(*)。特に v_1 は highest weight ベクトルにとっておく。定義より

$$C(\lambda, \lambda) v_i = \sum_{j=1}^d c_{ij}(\lambda, \lambda) v_j$$

となる $c_{ij}(\lambda, \lambda)$ が存在する。各 $c_{ij}(\lambda, \lambda)$ が $C(\lambda, \lambda)$ の行列成分である。

以上の準備の下で、問題を提出しておく。大島先生は、 $C(\lambda, \lambda)$ の行列成分 $c_{ii}(\lambda, \lambda)$ は gamma 函数の積・商で表わせ、しかも実際に計算して表示を得ることも容易だろうと示唆された。^(**) さて、 K の自明な表現に対する C -函数は Gindikin-Karpelevic によって、ルート及びその重複度を使った Beta 函数の積として表わ

(*) $M = Z_K(\lambda)$ の表現の weight である。

(**) この表現は不正確、§5で改めて C -函数についての問題を述べる。

されることが知られている。したがって、 $C_{II}(\lambda, \Lambda)$ に対して、これに類する公式があるだろうと期待される。

以下の § 2 は、主に $SU(p, q)$ の場合に $C_{II}(\lambda, \Lambda)$ を求める。この報告の内容は、 $C_{II}(\lambda, \Lambda)$ に対して Gindikin-Karpelevic の公式の類似を求める立場からも、また $C(\lambda, \Lambda)$ のすべての行列成分を決定する立場からも満足するのにはほど遠い。したがって、以下の結果は実験データと理解してもらいたい。

§ 2. $SU(2, 1)$ の場合.

この場合、 $C(\lambda, \Lambda)$ のすべての行列成分を決定する。すべて直接計算による。先日の職訓大のセミナーの折に、大豆生田氏が、すでに計算されていることをうかがった。はじめにそれに注意しておく。

$$G = SU(2, 1) = \left\{ g \in SL(3, \mathbb{C}); {}^t \bar{g} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A = \left\{ a_t = \begin{bmatrix} \cosh t & & \sinh t \\ & 1 & \\ \sinh t & & \cosh t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \in G \right\}$$

$$\bar{N} = \left\{ \bar{n}(z, u) = \begin{bmatrix} \frac{z - \bar{F}}{2} & -\bar{z} & -1 + \bar{F} \\ z & 1 & -z \\ 1 - \bar{F} & -\bar{z} & \frac{1 + \bar{F}}{2} \end{bmatrix} : z \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \{ {}^t(\log \bar{n}) : \bar{n} \in \bar{N} \}$$

ここで $F(z, u) = 1 + |z|^2 + \sqrt{-1}u$ とおいた。 $N, \bar{N}$ の取り方から $A^+ = \{ a_{-t}; t > 0 \}$ であることに注意しておく。

$\bar{n}(z, u) \in \bar{N}$ の岩沢分解を計算する。

$$\bar{n}(z, u) = k(\bar{n}(z, u)) \cdot a_{-t} \cdot n$$

と書くと

$$e^t = |F(z, u)|$$

$$k(\bar{n}(z, u)) = \begin{bmatrix} \frac{z - \bar{F}}{|F|} & -\frac{z\bar{z}}{\bar{F}} & 0 \\ \frac{z\bar{z}}{|F|} & \frac{z - \bar{F}}{\bar{F}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{F}}{|F|} \end{bmatrix}$$

となる。

次に K の既約表現を構成しておく。 K の元 g に対して、はじめの 2×2 小行列を k とすると、 k は $U(2)$ の元であり、 g から k を対応させる K から $U(2)$ への写像は Lie 同型である。さて、二変数 X, Y の n 次斉次多項式全体を V_n とする。 V_n は $(n+1)$ 次元ベクトル

空間である。 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$ に対して V_n の線型変換 $\pi_{n,m}(g)$ を

$$\pi_{n,m}(g)(X^p Y^{n-p}) = (\det g)^m (aX+bY)^p (cX+dY)^{n-p} \\ (p=0, 1, \dots, n)$$

で定義する。 ここで m は任意の整数でよい。 すると $(\pi_{n,m}, V_n)$ は $U(2)$ の既約表現になる。 また、 $U(2)$ の任意の既約表現は適当な n, m に対して $(\pi_{n,m}, V_n)$ に同値になる。

一方, α を正の単純ルートとすれば, $a \in A$ に対して $a^{\lambda\alpha}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を対応させると, これは A 上の指標を与える。 この時, $(a-u)^{-(\lambda+\rho)} = |F(z,u)|^{-\lambda-2}$ とみなせる。 ($\lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$ と $\lambda\alpha$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を混同して使った。)

以上の準備の下で, K の既約表現 $(\pi_{n,m}, V_n)$ に対応する C -函数は

$$C(\lambda, m, n) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |F(z, u)|^{-\lambda-2} \pi_{n,m}(k(\bar{\pi}(z, u))) dz d\bar{z} du$$

で与えられる。 ここで $\bar{N}$ を $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ と同一視し, その上の不変測度を $dz d\bar{z} du$ で与えた。 また λ は任意の複素数, m, n は整数, $n \geq 0$ である。 もちろん, 右

辺の積分は $\operatorname{Re} \lambda \gg 0$ でなければ収束しないが、一般の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対しては、それを解析接続したものと理解する。

さて、 $M = Z_K(A)$ は 1次元トーラスであり、 $\pi_{n,m}|_M$ によって V_n を既約分解すると、各ベクトル $X^p Y^{n-p}$ は別の既約表現に属する。また $c(\lambda, m, n)$ は V_n の線型同型であり、 M の作用と可換であることは、定義よりわかる。以上から Schur の補題により

$$c(\lambda, m, n)(X^p Y^{n-p}) = c_p(\lambda, m, n) X^p Y^{n-p} \\ (p = 0, 1, 2, \dots, n)$$

となるスカラー $c_p(\lambda, m, n)$ が存在する。したがって V_n の基底として $X^p Y^{n-p}$ ($p = n, n-1, \dots, 0$) をとれば

$$c(\lambda, m, n) = \operatorname{diag}(c_n(\lambda, m, n), c_{n-1}(\lambda, m, n), \dots, c_0(\lambda, m, n))$$
がわかる。ゆえに $c_p(\lambda, m, n)$ を決定すれば c -函数は求まることになる。

以下、 $c_p(\lambda, m, n)$ を直接計算により求める。断らない限り、表われる定積分は収束しているように λ を選んでおく。

$q = n - p$ とし、 $p \geq q$ と仮定して議論を進める。

この時、 $(aX+bY)^p (cX+dY)^q$ の $X^p Y^q$ の係数を求めると

$$\sum_{j=0}^q \binom{p}{p-j} \binom{q}{j} a^{p-j} b^j c^j d^{q-j}$$

であるから、 $\pi_{n,m}(k(\bar{n}(z,u)))(X^p Y^q)$ の $X^p Y^q$ の係数は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^q \binom{p}{p-j} \binom{q}{j} \left(\frac{2-\bar{F}}{|F|}\right)^{p-j} \left(\frac{2-F}{\bar{F}}\right)^{q-j} \left(-4 \frac{|z|^2}{|F|\bar{F}}\right)^j \\ &= \left(\frac{F}{|F|}\right)^m |F|^{-p} (\bar{F})^{-q} \sum_{k=0}^q \binom{p}{p-q+k} \binom{q}{k} (-4)^{q-k} |z|^{2q-2k} (2-F)^k (2-\bar{F})^{p-q+k} \end{aligned}$$

となる。したがって定義より

$$\begin{aligned} & C_p(\lambda, m, n) \\ &= \sum_{k=0}^q \binom{p}{p-q+k} \binom{q}{k} (-4)^{q-k} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |z|^{2(q-k)} (2-F)^k (2-\bar{F})^{p-q+k} F^{m+q} |F|^{-\lambda-m-p-2q-2} dz d\bar{z} du \end{aligned}$$

計算の都合上、 $2\mu = -\lambda - m - p - 2q - 2$, $q = n - p$, $r = p - q$,

$l = m + q$ とおき $C_p(\lambda, m, n) = \tilde{C}(\mu, l, q, r)$ とする。

すなわち

$$\begin{aligned} & \tilde{C}(\mu, l, q, r) \\ &= \sum_{k=0}^q \binom{r+q}{r+k} \binom{q}{k} (-4)^{q-k} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |z|^{2(q-k)} (2-F)^k (2-\bar{F})^{r+k} F^l |F|^{2\mu} dz d\bar{z} du \end{aligned}$$

ここで次の公式を使う。(後程証明する。)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |z|^{2k} (2-\bar{F})^n F^l |F|^{2\mu} dz d\bar{z} du \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 2^{2\mu+l+n+3} k! \Gamma(-2\mu-l-n-k-2) \Gamma(-\mu-l-k-1)}{\Gamma(-\mu) \Gamma(-\mu-l) \Gamma(-\mu-l-n-k-1)} \end{aligned}$$

この公式より

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |z|^{2(q-k)} (2-F)^k (2-\bar{F})^{r+k} F^l |F|^{2\mu} dz d\bar{z} du \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot 2^i \cdot (-1)^{k-i} \int |z|^{2(q-k)} (2-\bar{F})^{r+k} F^{l+k-i} |F|^{2\mu} dz d\bar{z} du \\ &\approx \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot 2^i \cdot (-1)^{k-i} \frac{\pi^2 \cdot 2^{2\mu+l+r+2k-i+3} (q-k)! \Gamma(-2\mu-l-r-q-2+i-k) \Gamma(-\mu-l-q-i+i)}{\Gamma(-\mu) \Gamma(-\mu-l-k+i) \Gamma(-\mu-l-q-r-1-k+i)} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\mu, l, q, r) &= \frac{(r+q)! q! (-1)^q \cdot 2^{2\mu+l+2q+r+3} \cdot \pi^2}{\Gamma(-\mu)} \tilde{d}(\mu, l, q, r) \\ \tilde{d}(\mu, l, q, r) &= \sum_{k=0}^q \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \Gamma(-2\mu-l-r-q-2-k+i) \Gamma(-\mu-l-q-1+i)}{(r+k)! (q-k)! i! (k-i)! \Gamma(-\mu-l-k+i) \Gamma(-\mu-l-q-r-1-k+i)} \end{aligned}$$

がわかる。 $\sum_{k=0}^q \sum_{i=0}^k = \sum_{i=0}^q \sum_{k=i}^q$ であるから,

ここで $j = k-i$ として k を消去し, また公式 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$ を使うと

$$\tilde{d}(\mu, l, q, r) = \frac{(-1)^l}{2\pi} \sum_{i=0}^q \frac{(-q, i) \Gamma(-\mu-l-q-1+i) \Gamma(\mu+l+1) \Gamma(\mu+l+q+r+2)}{q! i! (r+i)! \Gamma(2\mu+l+q+r+3)} \times$$

$$\times {}_3F_2(\mu+l+1, \mu+l+q+r+2, -q+i; r+i+1, 2\mu+l+q+r+3; 1)$$

かわかる。 ここで

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n)(\alpha_3, n)}{(\beta_1, n)(\beta_2, n) n!} x^n$$

また $(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である。上の ${}_3F_2$ は一般には無限和だが $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のいずれかが負の整数の時には有限和になる。したがって我々の場合、 $x=1$ の値は有限和であるから発散の心配はない。次の積分表示式を思いおこす。

$$\begin{aligned} & {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x) \\ &= \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)} \int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\beta_1-\alpha_1-1} du \int_0^1 v^{\alpha_2-1}(1-v)^{\beta_2-\alpha_2-1} (1-xuv)^{-\alpha_3} dv \end{aligned}$$

これに $\alpha_1 = \mu+l+1$, $\alpha_2 = \mu+l+q+r+2$, $\alpha_3 = -q+i$, $\beta_1 = 2\mu+l+q+r+3$,

$\beta_2 = r+i+1$ を代入すると

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mu, l, q, r) \\ &= \frac{(-1)^q}{2\pi} \tan \pi \mu \sum_{i=0}^q \frac{(-q, i) \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\beta_2 - \alpha_2)}{q! i! \Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2)} {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; 1) \\ &= \frac{(-1)^q}{2\pi} \tan \pi \mu \sum_{i=0}^q \frac{(-q, i)}{q! i! \Gamma(\beta_1 - \alpha_1)} \int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\beta_1-\alpha_1-1} du \int_0^1 v^{\alpha_2-1}(1-v)^{\beta_2-\alpha_2-1} (1-uv)^{-\alpha_3} dv \\ &= \frac{(-1)^q}{2\pi} \frac{\tan \pi \mu}{q! \Gamma(\beta_1 - \alpha_1)} \int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\beta_1-\alpha_1+q-1} du \int_0^1 v^{\alpha_2+q-1}(1-v)^{-\mu-q-l-2} dv \end{aligned}$$

α_3, β_2 のみが i に依存し, このことから, i についての和をとると, このようになることに注意しておく。以下、計算を続けて

$$\begin{aligned} & \tilde{d}(\mu, l, g, r) \\ &= \frac{(-1)^l \tan \pi \mu}{2\pi \cdot g!} \frac{\Gamma(\mu+l+1) \Gamma(\mu+2g+r+2) \Gamma(\mu+l+2g+r+2) \Gamma(-\mu-l-g-1)}{\Gamma(\mu+g+r+2) \Gamma(2\mu+l+2g+r+3) \Gamma(g+r+1)} \end{aligned}$$

がわかる。したがって

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(\mu, l, g, r) \\ &= (-1)^r \cdot \pi^2 \cdot 2^{2\mu+l+2g+r+3} \frac{\Gamma(-2\mu-l-2g-r-2) \Gamma(-\mu-l-g-1) \Gamma(-\mu-g-r-1)}{\Gamma(-\mu) \Gamma(-\mu-l) \Gamma(-\mu-2g-r-1) \Gamma(-\mu-l-2g-r-1)} \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$C_p(\lambda, m, p+g) = (-1)^{p+g} \pi^2 \cdot 2^{-\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\frac{\lambda-m+p-2g}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+m-p+2g}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+m+p+2g+2}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-m+p+2}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+m-p}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-m-p-2g}{2})}$$

がわかる。以上の計算では $p \geq g \geq 0$ を仮定したが, $g > p \geq 0$ の場合もほぼ同様な計算により, 上の式が得られる。

以上の結果をまとめると次が得られる。

定理2.1. $U(2)$ の既約表現 $(\pi_{n,m}, V_n)$ (n, m : 整数

$n \geq 0$) の基底を $U_i = X^{n-i} Y^i$ ($i=0, 1, \dots, n$) とする。

この時、表現 $\pi_{n,m}$ に対応する C -函数 $C(\lambda, m, n)$ は次のように表わせる。

$$C(\lambda, m, n) U_p = C_{n-p}(\lambda, m, n) U_p \quad (p=0, 1, \dots, n).$$

ここで $C_p(\lambda, m, n)$ は次のように定まるスカラーである。

$$C_p(\lambda, m, p+q) = (-1)^{p+q} \pi^2 \cdot 2^{-\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\frac{\lambda-m+p-2q}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+m-p+2q}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+m+p+2q+2}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-m+p+2}{2}) \Gamma(\frac{\lambda+m-p}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-m-p-2q}{2})}$$

ただし $p, q \geq 0$ 。

最後に、上記の計算中、使った公式の証明を与えておく。

補題 2.2. $\lambda \in \mathbb{C}$, $m, k, n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) に対して

$$f(\lambda, m, k, n) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} |z|^{2k} (2 - \bar{F})^n F^m |F|^{2\lambda} dz d\bar{z} du$$

とおくと、

$$f(\lambda, m, k, n) = \frac{2^{2\lambda+m+n} \cdot k! \cdot \Gamma(-\lambda-m-k-2) \Gamma(-\lambda-m-k-1)}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\lambda-m) \Gamma(-\lambda-m-k-n-1)}$$

証明. 容易に次の漸化式が得られる。

$$f(\lambda, m, k, n) = 2f(\lambda, m, k, n) - f(\lambda+1, m-1, k, n-1).$$

したがって $f(\lambda, m, k, 0)$ が求まればよい。ところで

$$\begin{aligned} f(\lambda, m, k, 0) &= 2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (x^2 + y^2)^k dx dy \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2 + y^2 + \sqrt{1+u})^m [(1 + x^2 + y^2)^2 + u^2]^\lambda du \\ &= 2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (x^2 + y^2)^k (1 + x^2 + y^2)^{2\lambda+m+1} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \sqrt{1+u})^m (1 + u^2)^\lambda du \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 2^{2\lambda+m+3} \cdot k! \cdot \Gamma(-2\lambda-m-k-2) \Gamma(-\lambda-m-k-1)}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\lambda-m) \Gamma(-\lambda-m-k-1)} \end{aligned}$$

は比較的容易にわかる。以上から補題 1.2 は証明できる。

§ 3. $SU(n, 1)$ の場合

計算の都合上、はじめに $\mathfrak{su}(n, 1)$ と同型な Lie 環を定義する。

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}); {}^t \bar{X} J + J X = 0\}$$

ただし

$$J = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & I_{n-1} & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

このとき、極大コンパクト部分環を

$$k_0 = \{ X \in \mathfrak{g}_0; {}^t\bar{X} + X = 0 \}$$

また極大アール部分空間を

$$\alpha_0 = \{ \text{diag}(t, 0, \dots, 0, -t); t \in \mathbb{R} \}$$

にとれる。正の単純ルート α を

$$\alpha(t, 0, \dots, 0, -t) = t$$

にとる。この時

$$\mathfrak{n}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & z_1 & \dots & z_{n-1} & \sqrt{-1}u \\ & 0 & & & -\bar{z}_1 \\ & & & 0 & -\bar{z}_{n-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}; z_i \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bar{\mathfrak{n}}_0 = \{ X \in \mathfrak{g}_0; {}^t\bar{X} \in \mathfrak{n}_0 \}$$

である。 $\mathfrak{g}_0 = k_0 + \alpha_0 + \mathfrak{n}_0$ が岩沢分解である。

$\mathfrak{g}_0$ に対応する連結 Lie 群を G_0 とし, $K_0, A_0, N_0, \bar{N}_0$ をそれぞれ $k_0, \alpha_0, \mathfrak{n}_0, \bar{\mathfrak{n}}_0$ に対応する G_0 の解析的部分群とする。 $G_0 = K_0 A_0 N_0$ は G_0 の岩沢分解である。

である。 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \sqrt{2} I_{n-1} & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$ とし, $\mathfrak{g} = P\mathfrak{g}_0 P^{-1}$

$G = P G_0 P^{-1}$ とおく。 $G = SU(n, 1)$ である。 $K, A, N, \bar{N}$ をこの対応で $K_0, A_0, N_0, \bar{N}_0$ に対する G の部分群とする。 $G = KAN$ は G の岩沢分解である。
 $\bar{N}$ の元の岩沢分解を計算する。 上の対応関係より

$$\bar{n}(z_1, \dots, z_{n-1}; u) = P \left(\exp \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ z_1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ z_{n-1} & & & 0 & \\ \sqrt{-1}u & -\bar{z}_1 & \dots & -\bar{z}_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \right) P^{-1}$$

とおくと $\bar{n}(z; u) \in \bar{N}$ である。 ここで $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ と $\bar{N}$ とが同型になることに注意しておく。 $\bar{n}(z; u) = k(\bar{n}(z; u)) a(z; u) n(z; u)$ を $\bar{n}(z; u)$ の岩沢分解とする。 この時

$$F(z; u) = 1 + \frac{1}{2}(|z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2) + \sqrt{-1}u$$

とおけば、

$$P^{-1} a(z; u) P = \text{diag}(|F|, 1, \dots, 1, |F|^{-1})$$

$$k(\bar{n}(z; u)) = \begin{bmatrix} \frac{2-\bar{F}}{|F|} & -\frac{\sqrt{2}\bar{z}_1}{\bar{F}} & \dots & -\frac{\sqrt{2}\bar{z}_{n-1}}{\bar{F}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}z_1}{|F|} & 1-\frac{|z_1|^2}{\bar{F}} & \dots & -\frac{z_1\bar{z}_{n-1}}{\bar{F}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}z_{n-1}}{|F|} & -\frac{\bar{z}_1 z_{n-1}}{\bar{F}} & \dots & 1-\frac{|z_{n-1}|^2}{\bar{F}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\bar{F}}{|F|} \end{bmatrix}$$

かわかる。

次に K の既約表現について注意しておく。 $K_1 = U(n)$ の元 g に対して $\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & (\det g)^{-1} \end{bmatrix}$ は K の元でありこの対応は K_1 と K の Lie 同型を与えている。以下 K と K_1 を同一視する。 K_1 の Lie 環 $k_1 = \mathfrak{u}(n)$ の極大トーラスとして $\mathcal{A} = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n); t_i \text{ は純虚数}\}$ を取る。 k_1 及び $\mathcal{A}$ の複素化を $k_1^{\mathbb{C}}, \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ とする。 $k_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ である。 $(k_1^{\mathbb{C}}, \mathcal{A}^{\mathbb{C}})$ のルートは $t_i - t_j$ ($i \neq j$) である。さて、正のルートが $t_i - t_j$ ($i > j$) であるようにルート系に順序を入れる。この時、正のルートのルート空間全体の張る中零 Lie 環 $\mathfrak{n}_{k_1^{\mathbb{C}}}$ は対角成分が零である下三角行列全体である。また $\overline{\mathfrak{n}_{k_1^{\mathbb{C}}}} = \{X; {}^tX \in \mathfrak{n}_{k_1^{\mathbb{C}}}\}$ は負のルートについてのものである。 $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ 上の線型形式を考えよう。 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\chi_{\vec{m}}$ を $\chi_{\vec{m}}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n m_i t_i$ で定義する。この時、 $\chi_{\vec{m}}$ は $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ 上の weight になるが、これが dominant になるための条件は $m_i \geq m_j$ ($i > j$) である。この条件を満たす $\vec{m}$ に対して、 $\chi_{\vec{m}}$ を highest weight にもつ $k_1^{\mathbb{C}}$ の既約表現を $(\pi_{\vec{m}}, V_{\vec{m}})$

で表わすことにする。

以上の準備の下で, $\mathbb{C}$ -函数の表示を求めよう。

α と α_0 を上のように同一視すれば, (η, α) のルート系に順序が入るか, それに関する正の単純ルートを改めて α で表わす。すると $\rho = n\alpha$ であることは直ちにわかる。また $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$a(\bar{n}(z; u))^{\lambda\alpha} = |F(z; u)|^\lambda$$

となることは、定義よりわかる。 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及び K の既約表現 $(\pi_{\vec{m}}, V_{\vec{m}})$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$) を与えたとき

$$c(\lambda, \vec{m}) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda + \rho)(H(\bar{n}))} \pi_{\vec{m}}(k(\bar{n})) d\bar{n}$$

とおく。 $d\bar{n}$ は $\bar{N}$ 上の不変測度である。 $(z; u) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ に対して $\bar{n}(z; u) \in \bar{N}$ を対応させて $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ と $\bar{N}$ とを同一視した時, $d\bar{n} = dz_1 d\bar{z}_1 \cdots dz_{n-1} d\bar{z}_{n-1} du$ とおくことにする。この時

$$c(\lambda, \vec{m}) = \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}} |F(z; u)|^{-\lambda-n} \pi_{\vec{m}}(k(z; u)) d\bar{n}$$

となることがわかる。 $\operatorname{Re} \lambda \gg 0$ の時に, 右辺の積分は収束する。したがって, 一般の λ に対しては,

それを解析接続させたものとして $c(\lambda, \vec{m})$ を定義する。
かくて, c -函数 $c(\lambda, \vec{m})$ が定義された。今、
表現空間 $V_{\vec{m}}$ の基底 $v_1, \dots, v_d$ ($d = \dim V_{\vec{m}}$) を、各
 v_i は weight ベクトルになるように選んでおく。特に
 v_1 は highest weight ベクトルとする。この時、

$$\pi_{\vec{m}}(k(\bar{\pi}(z; u))) v_1 = H_{\vec{m}}(z; u) v_1 + \sum_{j=2}^d f_j(z; u) v_j$$

と表示できる。したがって、 $c(\lambda, \vec{m})$ を $V_{\vec{m}}$ の基底
 $v_1, \dots, v_d$ に関して行列表示した時、その (1, 1) 成分
 $c_{11}(\lambda, \vec{m})$ は

$$c_{11}(\lambda, \vec{m}) = \int_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} |F(z; u)|^{-\lambda-n} H_{\vec{m}}(z; u) dz_1 d\bar{z}_1 \cdots dz_n d\bar{z}_n du$$

と表示される。 $c_{11}(\lambda, \vec{m})$ は §1 で定義した $c_{11}(\lambda, \Lambda)$
にあたるものであることに注意しておく。さて、

$k(\bar{\pi}(z; u))$ の $K_1^{\mathbb{C}} = GL(n, \mathbb{C})$ における Bruhat 分解
を計算することにより

$$H_{\vec{m}}(z; u) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^i |z_{n-j}|^2}{F} \right)^{m_{n-i+1} - m_{n-i}} \cdot \left(\frac{F}{|F|} \right)^{m_1}$$

であることがわかる。これより

$$C_{11}(\lambda, m_1, \dots, m_n) \\ = \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}} |F|^{-\lambda+n+m_1} \bar{F}^{-m_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\bar{F} - \sum_{j=1}^i |z_{nj}|^2 \right)^{m_{n-i+1}-m_{n-i}} dz d\bar{z} du$$

となる。

以下、 $C_{11}(\lambda, m_1, \dots, m_n)$ を計算する。その為に技術的に少々パラメータを変更した次の積分を考える。

$$I_n(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-1}) \\ = \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}} F^{\frac{\lambda+l}{2}} \bar{F}^{\frac{\lambda-l}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\bar{F} - \sum_{j=1}^i |z_{nj}|^2 \right)^{p_i} dz d\bar{z} du。$$

ただし、 $\lambda \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \geq 0$ ($i=1, \dots, n-1$) とする。 I_n に対して、次の二つの漸化式が成立つ。

$$(I) \quad I_n(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-1}) \\ = 2 I_n(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}-1) - I_n(\lambda+1, l+1; p_1, \dots, p_{n-2}, p_{n-1}-1).$$

$$(II) \quad I_n(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-2}, 0) = -\frac{4\pi}{\lambda+p_1+\dots+p_{n-2}+n} I_{n-1}(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-2}).$$

(I) は積分表示から直ちにわかる。一方 (II) は、 $p_{n-1}=0$ の時の I_n の被積分函数の各因子が、実は $1+\frac{1}{2}|z_i|^2$ を含んでいることに注目し、それを括りだし、更にその

部分だけ積分してしまうことによつて得られる。更に次もわかる。

$$(III) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+\sqrt{-1}u)^{\frac{\lambda+l}{2}} (1-\sqrt{-1}u)^{\frac{\lambda-l}{2}} d\bar{u} = \frac{2^{\lambda+2} \pi \Gamma(-\lambda-1)}{\Gamma(-\frac{\lambda+l}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda-l}{2})}$$

$$(\lambda \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z})$$

これは、 $1+\sqrt{-1}u = 2-(1-\sqrt{-1}u)$ を使って漸化式を求めて $l=0$ の場合に帰着させる。勿論 $l=0$ の時に周知である。(III) を使って $I_2(\lambda, \bar{\lambda}, p)$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} & I_2(\lambda, l; 0) \\ &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}} \left(1 + \frac{1}{2}|z|^2 + \sqrt{-1}u\right)^{\frac{\lambda+l}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}|z|^2 - \sqrt{-1}u\right)^{\frac{\lambda-l}{2}} dz d\bar{z} du \\ &= \int_{\mathbb{C}} \left(1 + \frac{1}{2}|z|^2\right)^{\lambda+1} dz d\bar{z} \int_{-\infty}^{\infty} (1+\sqrt{-1}u)^{\frac{\lambda+l}{2}} (1-\sqrt{-1}u)^{\frac{\lambda-l}{2}} d\bar{u} \end{aligned}$$

ところで

$$\int_{\mathbb{C}} \left(1 + \frac{1}{2}|z|^2\right)^{\lambda+1} dz d\bar{z} = \frac{-4\pi}{\lambda+2}$$

であるから、(III) より

$$I_2(\lambda, l; 0) = \frac{(2\pi)^2 \cdot 2^{\lambda+2} \Gamma(-\lambda-2)}{\Gamma(-\frac{\lambda+l}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda-l}{2})}$$

したがって、(I) を使えば帰納的に

$$I_2(\lambda, l; p) = \frac{(2\pi)^2 \cdot 2^{\lambda+p+2} \Gamma(-\lambda-p-2)}{\Gamma(-\frac{\lambda+l}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda-l+2p+2}{2}) (-\frac{\lambda-l+2}{2})}$$

がわかる。これは §2 で求めた $C_p(\lambda, m, p)$ と、パラ
メータをとり変えれば定数倍を除いて一致する。一般
には次が成立つ。

補題 3.1. $\lambda \in \mathbb{C}$, $l, p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $p_i \geq 0$
($i=1, \dots, n-1$) に対して

$$\begin{aligned} & I_n(\lambda, l; p_1, \dots, p_{n-1}) \\ &= \frac{(2\pi)^n \cdot 2^{\lambda+p_1+\dots+p_{n-1}+n} \Gamma(-\lambda-p_1-\dots-p_{n-1}-n)}{\Gamma(-\frac{\lambda+l}{2}) \Gamma(-\frac{\lambda-l}{2}-p_1-\dots-p_{n-1}-n+1) \prod_{i=1}^{n-1} (-\frac{\lambda-l}{2}-p_1-\dots-p_{i-1}-i)} \end{aligned}$$

証明. $I_2(\lambda, l; p)$ はすでに求まっている。し
たが、て、漸化式 (I), (II) より帰納法を使って証明で
きる。

さて

$$\begin{aligned} & C_{11}(\lambda, m_1, \dots, m_n) \\ &= I_n(-\lambda-n+m_1-m_n, m_n; m_n-m_{n-1}, m_{n-1}-m_{n-2}, \dots, m_2-m_1) \end{aligned}$$

であることを使えば、補題 3.1 より $C_{11}(\lambda, \vec{m})$ は求ま
る。

定理 3.2 $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ を $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ のようにとる。そして $\lambda_{\vec{m}}$ を highest weight に持つ K の既約表現 $(\pi_{\vec{m}}, V_{\vec{m}})$ に対する c -函数を $c(\lambda, \vec{m})$ とする。このとき、 $c(\lambda, \vec{m})$ の行列成分 $c_{ii}(\lambda, \vec{m})$ は次のように表示される。

$$c_{ii}(\lambda, \vec{m}) = \frac{(2\pi)^n \cdot 2^{-\lambda} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{\lambda+n-m_1}{2}) \Gamma(\frac{\lambda-n+m_1+2}{2}) \prod_{i=1}^{n-1} (\frac{\lambda+n-m_i}{2} + m_{n-i+1} - i)}$$

注意. $c_{ii}(\lambda, \vec{m})$ を計算するにあたって、漸化式 (I), (II) が基本的であった。 $c_{ii}(\lambda, \vec{m})$ の積分表示から (I), (II) が成立つことを示唆されたのは大島先生です。Wallach の本 [1] を見ればわかるように、 K の表現が自明な場合の c -函数の計算は、Schiffman 及び Helgason によって、 $SU(2, 1)$ (あるいは $SO(2, 1)$) の場合へ帰着させる方法が確立している。 $c_{ii}(\lambda, \vec{m})$ を求めるに当たっても、そのような方法があるかどうか、現在の段階では、不明である。あるいは、漸化式 (I), (III) がそれにあたるものかもしれない。

§4. $SL(3, \mathbb{R})$ の場合.

高い階数の Lie 群の C -函数を扱うのは、かなり大変である。この § では、 $G = SL(3, \mathbb{R})$ の場合を例にとり、その複雑さを見てみる。

この場合 $K = SO(3)$, $A = \{ \text{diag}(a_1, a_2, a_3) ; a_i > 0, a_1 a_2 a_3 = 1 \}$

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{bmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad \bar{N} = \left\{ \bar{n}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ x & 1 & \\ y & z & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$M = Z_K(A) = \{ \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) ; \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1 \} \\ \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

である。

はじめに、 $\bar{n}(x, y, z)$ の岩沢分解を計算する。それを

$$\bar{n}(x, y, z) = k(\bar{n}(x, y, z)) \cdot a(x, y, z) \cdot n$$

とした時、

$$a(x, y, z) = \text{diag}(P, Q/P, 1/Q),$$

$$k(\bar{n}(x, y, z)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{P} & -\frac{x+y-z}{PQ} & \frac{xz-y}{Q} \\ \frac{x}{P} & \frac{1+y^2-xyz}{PQ} & -\frac{z}{Q} \\ \frac{y}{P} & \frac{z+x(xz-y)}{PQ} & \frac{1}{Q} \end{bmatrix}$$

$$n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x+yz}{P^2} & \frac{y}{P^2} \\ & 1 & \frac{z+x(xz-y)}{Q^2} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

となる。ここで

$$P(x, y, z) = (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad Q(x, y, z) = \{1+z^2+(xz-y)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

である。今

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad z' = \frac{(1+x^2)z - xy}{P}$$

として、 $P, Q, k(\pi(x, y, z))$ を x', y', z' で表わしてみる。便宜上

$$X' = (1+x'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad Y' = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad Z' = (1+z'^2)^{\frac{1}{2}}$$

とあくと

$$P = X'Y', \quad Q = Y'Z'$$

また

$$k(\pi(x, y, z)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{X'} & \frac{-x'}{X'} & 0 \\ \frac{x'}{X'} & \frac{1}{X'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Y'} & 0 & \frac{-y'}{Y'} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{y'}{Y'} & 0 & \frac{1}{Y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z'} & \frac{-z'}{Z'} \\ 0 & \frac{z'}{Z'} & \frac{1}{Z'} \end{bmatrix}$$

かわかる。更に

$$dx dy dz = Y' dx' dy' dz'$$

である。

さて $K=SO(3)$ の有限次元既約表現を復習する。
 $SU(2)$ は $SO(3)$ の二枚の被覆空間である。 $SU(2)$ の表現は §2 で構成した $U(2)$ の既約表現 $(\pi_{n,m}, V_n)$ を、 $SU(2)$ に制限することによって、すべて得られる。 $\pi_{n,m}|_{SU(2)}$ は明らかに m に依存しないから、それを (π_n, V_n) で表わすことにする。 (π_n, V_n) が $SO(3)$ の既約表現になるための必要十分条件は、 n が偶の正数であることである。

以上の準備の下で、 $SL(3, \mathbb{R})$ の C -函数を定義する。 $\bar{n}(x, y, z)$ の岩沢分解より

$$C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n) = \int_{\mathbb{R}^3} P^{-\lambda_1 + \lambda_2 - 1} Q^{-\lambda_2 + \lambda_3 - 1} \pi_{2n}(k(\bar{n}(x, y, z))) dx dy dz$$

が C -函数である。ただし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, n は非負整数。 $\bar{n}(x, y, z) \longleftrightarrow (x, y, z)$ で $\bar{N}$ と $\mathbb{R}^3$ を同一視した時、 $\bar{N}$ 上の不変測度を $dx dy dz$ とした。

便宜上、 $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ において、次の積分を導入する。

$$C_1(s; 2n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{-s-1} \pi_{2n} \left(\frac{1}{f(x)} \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f(x) \end{bmatrix} \right) dx$$

$$C_2(s; 2n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{-s-1} \pi_{2n} \left(\frac{1}{f(x)} \begin{bmatrix} f(x) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \right) dx$$

$$C_3(s; 2n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{-s-1} \pi_{2n} \left(\frac{1}{f(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & f(x) & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) dx$$

すると次の補題が成立つ。

補題 4.1.

$$C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n) = C_1(\lambda_1 - \lambda_2; 2n) C_3(\lambda_1 - \lambda_3; 2n) C_2(\lambda_2 - \lambda_3; 2n)$$

証明. これは, $C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n)$ の積分において, 変数変換 $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ を行なえば, π_{2n} が表現であることより, ただちに得られる。

この積公式は, 後述するように, 実は一般的な命題を $SL(3, \mathbb{R})$ の場合に翻訳しただけである。

補題 4.1 より, $C(\lambda; 2n)$ を求める問題は $C_i(s; 2n)$ を計算することに帰着された。これを実行するために $\mathfrak{su}(2)$ の構造を見直す。

$$X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とあくと, X_1, X_2, X_3 は $\mathfrak{su}(2)$ の基底になり, また次の交換関係が成立つ。

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

したがって

$$\text{ad } X_1: (X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad } X_2: (X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad } X_3: (X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\text{ad } X_1, \text{ad } X_2, \text{ad } X_3$ は $\mathfrak{so}(3)$ の基底とみなせる。以上の対応により, $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{so}(3)$ は同一視できる。さて, $SU(2)$ の $(2n+1)$ 次元既約表現 (π_{2n}, V_{2n}) を考える。§2で述べたように, $v_i = X^{2n-1} \gamma^i$ ($i=0, 1, \dots, 2n$) とあくと, $v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ は V_{2n} の基底になる。これは $SO(3)$ の表現でもある。また $u_t = \exp t X_3$ ($t \in \mathbb{R}$) とおけば, 上の対応により

$$Ad(u_t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

がわかる。一方 $\pi_{2n}(u_t)v_i = e^{(n-i)\sqrt{-1}t} v_i$ ($i=0,1,\dots,2n$) は定義より直ちに出る。したがって

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin t$$

とおけば

$$\pi_{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \begin{bmatrix} 1 & -x & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix} \right) v_i = \left(\frac{1+\sqrt{-1}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{n-i} v_i$$

($i=0,1,\dots,2n$) となる。このことから

$$C_1(s; 2n) v_i = \alpha_i(s, n) v_i$$

ただし

$$\alpha_i(s, n) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{s+1}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{-1}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{n-i} dx$$

($i=0,1,\dots,2n$) がわかる。ところで、この式の右辺の定積分は、§3の公式(Ⅲ)より計算できて

$$\alpha_i(s, n) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1-n+i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1+n-i}{2}\right)}$$

となる。ゆえに、 V_{2n} の基底を $v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ にと

たとき, $C_1(s; 2n)$ は対角行列になり, その対角成分は上の議論で求まった。勿論 $C_2(s; 2n)$, $C_3(s; 2n)$ に対しても同様な結果がえられる。以上から次がわかる。

定理 4.2.

(1) 各 i ($i=1, 2, 3$) に対して V_{2n} の基底を適当に取れば, その基底に対して, $C_i(s; 2n)$ は対角行列になり, その対角成分は

$$(\alpha_0(s; n), \alpha_1(s; n), \dots, \alpha_{2n}(s; n))$$

である。

$$(2) \quad A(s, n) = \prod_{i=0}^{2n} \alpha_i(s; n) \text{ とおけば}$$

$$\det C_i(s; 2n) = A(s, n) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$(3) \quad \det C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n) = A(\lambda_1 - \lambda_2; n) A(\lambda_1 - \lambda_3; n) A(\lambda_2 - \lambda_3; n)$$

証明. (1) はその前の議論による。(2) は (1) よりである。(3) は補題 4.1 と (2) よりわかる。

定理 4.2 より $C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n)$ がいつ退化するか, またその行列成分がいつ極をもつか, などはほぼわか,

たことになる。

さて、ここまでは平和であったが、 $c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2n)$ の行列成分をすべて決定しようと欲すると、不幸が始まるようである。以下 $n=0, 1, 2$ の場合を記述しておく。

(1) $n=0$ の時. これは Gindikin-Karpelevic によって求められている。結果は

$$c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 0) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2}\right)$$

(2) $n=1$ の時. $SO(3)$ の普通表現で与えられる。 $\int_{-\infty}^{\infty} x(1+x^2)^s dx = 0$ ($\forall s \in \mathbb{C}$) であることに注意すれば $c_i(s; 2)$ は対角行列であることがわかり

$$c_1(s; 2) = \text{diag}\left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s}{2}\right)\right)$$

$$c_2(s; 2) = \text{diag}\left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{s}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)\right)$$

$$c_3(s; 2) = \text{diag}\left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)\right)$$

となる。ゆえに

$$c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 2) = (c^{(1)}(\lambda; 2), c^{(2)}(\lambda; 2), c^{(3)}(\lambda; 2))$$

とおくと

$$c^{(1)}(\lambda; 2) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 + 1}{2}\right)$$

$$c^{(2)}(\lambda; 2) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + 1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + 1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2}\right)$$

$$c^{(3)}(\lambda; 2) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + 1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda_2 - \lambda_3 + 1}{2}\right)$$

(3) $n=2$ の時. $SO(3)$ の 5 次元既約表現である。
 V_4 の基底として

$$e_1 = X^4 + Y^4, \quad e_2 = 2X^2Y^2, \quad e_3 = X^4 - Y^4,$$

$$e_4 = XY(X^2 + Y^2), \quad e_5 = XY(X^2 - Y^2)$$

を取る。簡単の爲, $\gamma(s) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{s}{2}\right)$ とおき, 5 次対角行列 $d(s)$ を

$$d(s) = \text{diag} \left(\gamma(s) \frac{s-1}{s+1}, \gamma(s), \gamma(s) \frac{s-1}{s+1}, \gamma(s+1), \gamma(s+1) \right)$$

で定義する。この時, 容易な計算により

$$c_1(s; 4)(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) d(s)$$

$$c_3(s; 4)(e_1 - 3e_2, e_1 + e_2, e_5, e_3, e_4) = (e_1 - 3e_2, e_1 + e_2, e_5, e_3, e_4) d(s)$$

$$c_2(s; 4)(e_1 + 3e_2, e_1 - e_2, e_4, e_3, e_5) = (e_1 + 3e_2, e_1 - e_2, e_4, e_3, e_5) d(s)$$

がわかる。これから $p = \lambda_1 - \lambda_2$, $q = \lambda_2 - \lambda_3$ とおくと,

$c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; 4)$ により

$$e_3 \longmapsto \frac{p-1}{p+1} \gamma(p) \gamma(p+q+1) \gamma(q+1) e_3$$

$$e_4 \longmapsto \frac{q-1}{q+1} \gamma(p+1) \gamma(p+q+1) \gamma(q) e_4$$

$$e_5 \longmapsto \frac{p+q-1}{p+q+1} \gamma(p+1) \gamma(p+q) \gamma(q+1) e_5$$

$$(e_1, e_2) \mapsto (e_1, e_2) \frac{\delta(p)\delta(p+q)\delta(q)}{(p+1)(p+q+1)(q+1)} \begin{bmatrix} p-1 & 0 \\ 0 & p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+q+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & p+q-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & q-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

と変換されることがわかる。最後の 2×2 行列は対角化できないようである。また $n \geq 3$ の場合には事態は更に複雑になりそうであり、行列成分を具体的に求めることはあまり賢明ではなさそうである。

§ 5. C -函数の積公式

実 rank が一般の場合の C -函数を扱う為に それの積公式を与える。

記号の準備をする。 Σ を $(\mathfrak{g}, \sigma)$ のルート系とする。岩沢分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \sigma + \mathfrak{n}$ と整合する順序を Σ に入れる。そして Σ^+ をその正ルート全体とする。また $\Sigma_0^+ = \{\alpha \in \Sigma^+; \frac{1}{2}\alpha \notin \Sigma\}$ とおく。各 $\alpha \in \Sigma$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \sigma\}$$

とし、 $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ とする。更に各正ルート $\alpha \in \Sigma_0^+$ に対して、 $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{2\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環を $\mathfrak{g}(\alpha)$ とおくと、 $\mathfrak{g}(\alpha)$ は実 rank が 1 の単純 Lie 環になる。また $\mathfrak{n}(\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$, $\bar{\mathfrak{n}}(\alpha) =$

$\mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{g}_{-2\alpha}$, $\bar{k}(\alpha) = \bar{k} \cap \mathfrak{g}(\alpha)$ とおく。また $\alpha(\alpha) = \alpha \cap \mathfrak{g}(\alpha)$ とし, $H_\alpha \in \alpha(\alpha)$ を $\alpha(H_\alpha) = 1$ となるように選ぶと H_α は一意に定まり $\alpha(\alpha) = \mathbb{R}H_\alpha$ となる。そして, $\mathfrak{g}(\alpha) = \bar{k}(\alpha) + \alpha(\alpha) + \mathfrak{n}(\alpha)$ は $\mathfrak{g}(\alpha)$ の岩沢分解である。更に $\rho_\alpha = \frac{1}{2}(m_\alpha + 2m_{2\alpha})\alpha$ とおく。次に, $G(\alpha)$ を $\mathfrak{g}(\alpha)$ に対応する G の解析的部分群, $K(\alpha) = K \cap G(\alpha)$, $A(\alpha) = A \cap G(\alpha)$, $N(\alpha) = N \cap G(\alpha)$, $\bar{N}(\alpha) = \bar{N} \cap G(\alpha)$ とおく。 $K(\alpha)$, $A(\alpha)$, $N(\alpha)$, $\bar{N}(\alpha)$ はそれぞれ, $\bar{k}(\alpha)$, $\alpha(\alpha)$, $\mathfrak{n}(\alpha)$, $\bar{\mathfrak{n}}(\alpha)$ に対応する $G(\alpha)$ の解析的部分群になることに注意しておこう。さて $\Sigma_0^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ ($p = \#\Sigma_0^+$) とすれば, $\bar{N} = \bar{N}(\alpha_1) \cdots \bar{N}(\alpha_p)$ が成立つ。これは順序によらない。したがって, $d\bar{\pi}$ を $\bar{N}$ 上の不変測度, 各 $\alpha \in \Sigma_0^+$ に対して $d\bar{\pi}_\alpha$ を $\bar{N}(\alpha)$ 上の不変測度とすれば, $d\bar{\pi} = C d\bar{\pi}_{\alpha_1} \cdots d\bar{\pi}_{\alpha_p}$ となる定数 $C \neq 0$ が存在する。

$\bar{M} = N_K(A)$, $M = Z_K(A)$ とおけば, $W = \bar{M}/M$ は Σ の Weyl 群になる。 $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ($\ell = \dim \alpha$) をルートの基本系, 各 $\alpha_i \in \Delta$ に対して w_i を α_i に関する鏡映とする。任意の $w \in W$ に対して $w = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$ がその最短表示の時, $k = \ell(w)$

と書く。今 $w^* \in W$ を $w^*(\Sigma^+) = -\Sigma^+$ とする元とする。そして $r = l(w^*)$ の時, $w^* = w_{i_r} \cdots w_{i_2} w_{i_1}$ ($1 \leq i_k \leq l, k=1, \dots, r$) をその最短表示とする。この時, $\beta_k = w_{i_1} \cdots w_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$ ($k=1, 2, \dots, r$) とおけば、 $\Sigma_0^+ = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$ となることが知られている。

以上の準備の下で, C -函数の積公式を導く。§1のように Λ を k の dominant weight, (π_Λ, V_Λ) を Λ を highest weight に持つ K の既約表現とする。この時

$$C(\lambda, \Lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)(H(\bar{n}))} \pi_\Lambda(k(\bar{n})) d\bar{n}$$

が C -函数であるが、各 $\alpha \in \Sigma_0^+$ に対して

$$C_\alpha(\lambda, \Lambda) = \int_{\bar{N}(\alpha)} e^{-(\lambda+\rho_\alpha)(H(\bar{n}_\alpha))} \pi_\Lambda(k(\bar{n}_\alpha)) d\bar{n}_\alpha$$

とおく。

定理 5.1. 上の記号の下で

$$C(\lambda, \Lambda) = C_{\beta_1}(\lambda, \Lambda) C_{\beta_2}(\lambda, \Lambda) \cdots C_{\beta_r}(\lambda, \Lambda)$$

ただし, 不変測度 $d\pi, d\pi_{\beta_1}, \dots, d\pi_{\beta_r}$ は適当に正規化して, 定数倍のずれをなくしておく。

Wallach の本 [1], p.271, Lemma 8.11.6 を使えば帰納的に積公式は導かれる。(筆者の計算によれば, Lemma 8.11.6 の中の積の順序は逆のようである。)

話の順序が逆になるが, これから少しばかり Intertwining 作用素の一般論を復習する。概ね, Wallach の本の才 8 章にある内容である。

まず $P = MAN$ とおく。この時, M の有限次元既約表現 (ξ, H_ξ) 及び $\lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$ に対して

$$H_{\xi, \lambda} = \{ f \in C(G) \otimes H_\xi ; f(gman) = a^{-\lambda - \rho} \xi(m^{-1}) f(g) \}$$

とおく。任意の $w \in W$ に対して, w の M^* における代表元を適当にとり, それを $\bar{w}$ と書く。(以降しばしば, ことわりなしにこの記号を使う。) さて, 任意の $f \in H_{\xi, \lambda}$ に対して

$$(A(\xi, \lambda, \bar{w})f)(g) = \int_{\bar{N}_w} f(g\bar{w}\pi_w) d\bar{\pi}_w$$

とおく。ここで $\bar{N}_w = (\bar{w}^{-1}N\bar{w}) \cap \bar{N}$ であり, $d\bar{\pi}_w$

は $\bar{N}_w$ 上の不変測度である。上の積分は $\operatorname{Re} \lambda(H_\xi) > 0$ ($\forall \alpha \in \Sigma^+$) の時、収束する。また適当な意味で λ の有理型函数として解析接続される。 $\xi_{\bar{w}}(m) = \xi(\bar{w}^{-1}m\bar{w})$ ($m \in M$) とおけば、 $(\xi_{\bar{w}}, H_\xi)$ はやはり M の既約表現になるが、 $A(\xi, \lambda, \bar{w})f$ は $H_{\xi, \lambda}$ に属する。 $f \in H_{\xi, \lambda}$ に対して $(\pi_{\xi, \lambda}(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ とおけば、 $(\pi_{\xi, \lambda}, H_{\xi, \lambda})$ は G の無限次元表現になる。この時、任意の $w \in W$ に対して $A(\xi, \lambda, \bar{w}) \circ \pi_{\xi, \lambda}(g) = \pi_{\xi_{\bar{w}}, w\lambda}(g) \circ A(\xi, \lambda, \bar{w})$ であることがわかる。

さて、 (π_Λ, V_Λ) を Λ を highest weight に持つ K の既約表現とし、 $P(\xi) \in \operatorname{Hom}_M(V_\Lambda, H_\xi)$ とする。この時、任意の $v \in V_\Lambda$ に対して

$$f_{P(\xi), v, \lambda}(g) = e^{-(\lambda + \rho)(H(g))} P(\xi)(\pi_\Lambda(k(g)^{-1})v)$$

とおけば、 $f_{P(\xi), v, \lambda}$ は明かに $H_{\xi, \lambda}$ の元になる。更に $H_\Lambda^{\xi_{\bar{w}}} = \{f_{P(\xi)\pi_\Lambda(\bar{w})^{-1}, v, \lambda} ; v \in V_\Lambda\}$ 、 $\pi_\Lambda^{\xi_{\bar{w}}} = \pi_{\xi, \lambda}|_{H_\Lambda^{\xi_{\bar{w}}}}$ ($\forall w \in W$) とおく。すると、 K の表現とみると、

(π_Λ, H_Λ) と $(\pi_\Lambda^{\xi_{\bar{w}}}, H_\Lambda^{\xi_{\bar{w}}})$ は同値である。

今、 $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\Lambda, H_\xi) = 1$ を仮定しよう。

$P(\xi) \in \operatorname{Hom}_M(V_\Lambda, H_\xi)$ ならば $P(\xi) \circ \pi_\Lambda(\bar{w}^{-1}) \in \operatorname{Hom}_M(V_\Lambda, H_{\xi_{\bar{w}}})$ であるから、仮定の下で、 $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\Lambda, H_{\xi_{\bar{w}}})$

$= 1$ ($\forall w \in W$) かわかる。したがって $T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}) = A(\xi, \lambda, \bar{w})|H_\lambda^\xi$ とおけば、 $T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w})$ は H_λ^ξ を $H_\lambda^{\xi\bar{w}}$ に写す。ゆえに Schur の補題により、あるスカラー $d_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w})$ が存在して、任意の $v \in V_\lambda$ に対して

$$T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}) f_{P(\xi), v, \lambda} = d_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}) f_{P(\xi) \pi_\lambda(\bar{w})^{-1}, v, w\lambda}$$
 が成立つ。一方、定義から

$$T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}) f_{P(\xi), v, \lambda} = f_{P(\xi) B_\lambda(\lambda, \bar{w}) \pi_\lambda(\bar{w})^{-1}, v, w\lambda}$$
 がわかる。ここで

$$B_\lambda(\lambda, \bar{w}) = \int_{N_w} e^{-(\lambda + \rho)(H(\pi_w))} \pi_\lambda(k(\bar{\pi}_w)^{-1}) d\bar{\pi}_w$$

である。以上から、 $\forall v \in V_\lambda$ に対して

$$P(\xi)(B_\lambda(\lambda, \bar{w})v) = d_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}) P(\xi_{\bar{w}})(\pi_\lambda(\bar{w})v)$$
 がわかる。 $P(\xi_{\bar{w}}) = P(\xi) \circ \pi_\lambda(\bar{w})^{-1}$ に注意しておこう。

さて、 $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$ となる $w, w' \in W$ に対して

$$T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}\bar{w}') = T_\lambda(\xi_{\bar{w}'}, w'\lambda, \bar{w}) T_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}')$$
 が成立つ。このことから

$$B_\lambda(\lambda, \bar{w}\bar{w}') = B_\lambda(\lambda, \bar{w}') \pi_\lambda(\bar{w}'^{-1}) B_\lambda(w'\lambda, \bar{w}) \pi_\lambda(\bar{w})$$

$$d_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}\bar{w}') = d_\lambda(\xi, \lambda, \bar{w}') d_\lambda(\xi_{\bar{w}'}, w'\lambda, \bar{w})$$

などが得られる。

これから次のことがわかる。

定理 5.2. (π_λ, V_λ) を K の既約表現, (ξ, H_ξ) を M の既約表現とする。今 $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) = 1$ を仮定する。そして $P(\xi) \in \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi)$ とする。

この時

$$P(\xi) \circ c(\lambda, \Lambda) = c(\lambda, \Lambda, \xi) P(\xi)$$

となるスカラー $c(\lambda, \Lambda, \xi)$ が存在する。また各ルート $\alpha \in \Sigma^+$ に対しても

$$P(\xi) \circ c_\alpha(\lambda, \Lambda) = c_\alpha(\lambda, \Lambda, \xi) P(\xi)$$

となるスカラー $c_\alpha(\lambda, \Lambda, \xi)$ が存在する。しかも

$$c(\lambda, \Lambda, \xi) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} c_\alpha(\lambda, \Lambda, \xi)$$

が成立つ。

$G = \operatorname{Spin}(n, 1)$ の場合、つねに $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) \leq 1$ が成立つ。これを使って、大豆生田氏は $c(\lambda, \Lambda, \xi)$ を gamma 函数の積・商で表わすことに成功した。一般の単純 Lie 群 G に対しても、 $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) = 1$ の時には $c(\lambda, \Lambda, \xi)$ は gamma 函数の積・商で表わされるだろうというのが、元来大島先生が示唆さ

れたことであつた。(§1の問題の定式化は少し不正確である。) それではいつ $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) = 1$ になるか。(ξ, H_ξ) が先に与えられた時, K の既約表現 (π_λ, V_λ) で $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) = 1$ となるものが存在することが知られている。では逆に、 (π_λ, V_λ) を先に与えた時はどうなるか。実 rank が 1 の場合には、 $\operatorname{Spin}(n, 1)$ のほかにも $SU(n, 1)$ に対してもやはり常に $\dim \operatorname{Hom}_M(V_\lambda, H_\xi) \leq 1$ であることが、三島川先生によって指摘された。しかし現在の段階では、§3で示したようにある特別の行列成分しか求められていない。次に実 rank ≥ 1 の場合はどうか。それについては以下の §で議論する。

§6. $SU(p, q)$ の場合

計算の都合上, はじめに $\mathfrak{su}(p, q)$ と同型な Lie 環を定義する。($p > q$ として議論を進める。)

$$\mathfrak{g}_0 = \{ X \in \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C}) ; {}^t \bar{X} J + J X = 0 \}$$

ただし

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_q \\ 0 & I_{p-q} & 0 \\ K_q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_q = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad q \times q \text{ 行列}$$

この時, $\mathfrak{g}_0$ の極大コンパクト分環を

$$\mathfrak{k}_0 = \{ X \in \mathfrak{g}_0; {}^t\bar{X} + X = 0 \}$$

極大可換部分空間を

$$\mathfrak{a}_0 = \{ H = \text{diag}(t_1, \dots, t_g, 0, \dots, 0, -t_g, \dots, -t_1); t_i \in \mathbb{R} \}$$

にとれる。 $\mathfrak{a}_0$ 上の線型形式 e_i を $e_i(H) = t_i$ で定義。 $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $\beta_{ij} = e_i + e_j$ ($i < j$), $\gamma_i = e_i$ とおく。この時 $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ のルートは $\pm\alpha_{ij}$, $\pm\beta_{ij}$, $\pm\gamma_i$, $\pm 2\gamma_i$ である。また α_{ij} , β_{ij} ($i < j$), γ_i , $2\gamma_i$ 正のルートになるようにルート系に順序を入れる。 §5 の記号を使って, α_{ij} , β_{ij} , γ_i に対応する $\mathfrak{g}_0$ の実 rank が 1 の部分 Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}_0(\alpha_{ij})$, $\mathfrak{g}_0(\beta_{ij})$, $\mathfrak{g}_0(\gamma_i)$ とおく。この時

$$\mathfrak{g}_0(\alpha_{ij}) \cong \mathfrak{g}_0(\beta_{ij}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

$$\mathfrak{g}_0(\gamma_i) \cong \mathfrak{su}(p-q+1, 1)$$

がわかる。さて $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0$ を上の順序に整合する岩沢分解とし, $\bar{\mathfrak{n}}_0 = \{ {}^t\bar{X}; X \in \mathfrak{n}_0 \}$ とする。

G_0 を $\mathfrak{g}_0$ に対応する $SL(p+q; \mathbb{C})$ の解析的部分群, $K_0, A_0, N_0, \bar{N}_0$ をそれぞれ $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{n}_0, \bar{\mathfrak{n}}_0$ に対応する G_0 の解析的部分群とする。

次に $\mathfrak{g} = P\mathfrak{g}_0P^{-1}$, $G = PG_0P^{-1}$ とおく。ここで,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_p & 0 & K_g \\ 0 & \sqrt{2} I_{p+g} & 0 \\ -K_g & 0 & I_g \end{bmatrix}$$

である。 $G = SU(p, g)$ であり, $K = PK_0P^{-1}$ とおけば

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} ; g \in U(p), h \in U(g), \det g \cdot \det h = 1 \right\}$$

がわかる。

K の既約表現について少しふれる。 $\mathfrak{k}$ を K の Lie 環とし, その Cartan 部分環として

$$\mathfrak{h} = \{ \text{diag}(\sqrt{2}\theta_1, \dots, \sqrt{2}\theta_p, \sqrt{2}\varphi_1, \dots, \sqrt{2}\varphi_g) \in \mathfrak{k} ; \theta_i, \varphi_j \in \mathbb{R} \}$$

をとる。 そして $(\vec{m}, \vec{n}) = (m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{Z}^{p+g}$ ($\sum_{i=1}^p m_i + \sum_{j=1}^g n_j = 0$) に対して $\mathfrak{h}$ 上の線型形式 $\Lambda_{(\vec{m}, \vec{n})}$ を

$\Lambda_{(\vec{m}, \vec{n})}(\sqrt{2}\theta_1, \dots, \sqrt{2}\theta_p, \sqrt{2}\varphi_1, \dots, \sqrt{2}\varphi_g) = \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^p m_i \theta_i + \sum_{j=1}^g n_j \varphi_j \right)$ で定義する。 $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}$ の複素化, $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{h}$ の複素化とする。 そして $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(g, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ の Borel 部分環 $\mathfrak{b}$ を

$$\mathfrak{b} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} * & & \\ * & * & \\ 0 & & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 & * \\ 0 & & * \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & & * \end{smallmatrix} \end{array} \right]_r \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \right\}$$

で定義する。 $\mathcal{U}_{\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}}$ をその巾零根基とする。 また

$\bar{\mathfrak{u}}_{K^{\mathbb{C}}} = \{X; {}^tX \in \mathfrak{u}_{K^{\mathbb{C}}}\}$ とおく。 K の複素化 $K^{\mathbb{C}} \cong SL(p, \mathbb{C}) \times SL(q, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ における $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{u}_{K^{\mathbb{C}}}, \bar{\mathfrak{u}}_{K^{\mathbb{C}}}$ に対応する解析的部分群をそれぞれ $T^{\mathbb{C}}, N_{K^{\mathbb{C}}}, \bar{N}_{K^{\mathbb{C}}}$ と記す。 今 $(\bar{m}, \bar{n})$ に対して, $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_p, n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_q$ なる条件を加す。 すると, $\Lambda(\bar{m}, \bar{n})$ を highest weight に持つ $K^{\mathbb{C}}$ の既約表現 $(\pi_{(\bar{m}, \bar{n})}, V_{(\bar{m}, \bar{n})})$ が定まる。 $v_1, \dots, v_d$ を $V_{(\bar{m}, \bar{n})}$ の基底とする。 各 v_i は weight ベクトルにとれるのでそのようにしておく。 特に v_1 は highest weight ベクトルとする。 この時 $k \in K$ に対して

$$\pi_{(\bar{m}, \bar{n})}(k)v_1 = H_{(\bar{m}, \bar{n})}(k)v_1 + \sum_{i=2}^d h_i(k)v_i$$

となるスカラー $H_{(\bar{m}, \bar{n})}(k), h_i(k)$ が存在する。 さて, $k = \bar{n} {}^t n, \bar{n} \in \bar{N}_{K^{\mathbb{C}}}, n \in N_{K^{\mathbb{C}}}, {}^t = \text{diag}(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ の時

$$H_{(\bar{m}, \bar{n})}(k) = a_1^{m_1} \dots a_p^{m_p} b_1^{n_1} \dots b_q^{n_q}$$

であることを注意しておこう。

簡単の為, §5 の記号において $c(\lambda, \bar{m}, \bar{n}) = c(\lambda, \Lambda(\bar{m}, \bar{n}))$, $c_\alpha(\lambda, \bar{m}, \bar{n}) = c_\alpha(\lambda, \Lambda(\bar{m}, \bar{n}))$ とおくことにする。 更に

$$c(\lambda, \bar{m}, \bar{n})v_1 = \sum_{i=1}^d c_i(\lambda, \bar{m}, \bar{n})v_i$$

$$C_\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) v_1 = \sum_{i=1}^d C_i^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) v_i$$

とおく。ここで $C_i(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$, $C_i^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$ などとはスカラーである。 $C_1(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$ を求めることが目標だが、そのために各ルート $\alpha \in \Sigma_+^+$ に対して $C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$ を決定する。定義より

$$C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \int_{N_\alpha} e^{-(\lambda + \rho_\alpha)(H(\bar{n}_\alpha))} H_{(\vec{m}, \vec{n})}(k(\bar{n}_\alpha)) d\bar{n}_\alpha$$

がわかる。この積分を各ルート α に対して個別に計算する。

① $\alpha = \alpha_{ij}$ ($i > j$) の時。

$\mathfrak{g}_0(\alpha_{ij})$ が $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型になることを使えば、容易な計算によって

$$C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \int_{\mathbb{C}} (1+|z|^2)^{-\frac{\lambda_i - \lambda_j + 2}{2}} (1+|z|^2)^{\frac{(m_i - n_i) - (m_j - n_j)}{2}} dz d\bar{z}$$

が得られる。(勿論, $N_{\alpha_{ij}}$ 上の不変測度を適当に取った。) $\operatorname{Re}(\lambda_i - \lambda_j - (m_i - m_j) + (n_i - n_j)) > 0$ の時, この式の右辺の積分は収束して、また容易に

$$C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \frac{4\pi}{\lambda_i - \lambda_j - (m_i - m_j) + (n_i - n_j)}$$

であることがわかる。解析接続によって任意の λ に

対してもこの式は成立つ。

② $\alpha = \beta_{ij}$ ($i > j$) の時.

この場合は ① とほぼ平行した議論によって

$$c_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \frac{4\pi}{\lambda_i + \lambda_j - (m_i - m_j) + (n_i - n_j)}$$

が求まる。

③ $\alpha = \gamma_i$ の時

$\gamma_0(\gamma_i)$ は $\omega(p-q+1, 1)$ に同型である。これより、§3と同様な計算をすると次がわかる。便宜上、 $n = p-q+1$, $F(z_1, \dots, z_{n-1}; u) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|^2 + \sqrt{-1} u$ とおけば

$$\begin{aligned} c_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) &= \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}} |F|^{-\lambda_i - n} \left(\frac{F}{|F|} \right)^{m_i} \left(\frac{\bar{F}}{|F|} \right)^{n_i} \left(\frac{1}{F} \right)^{m_p - m_i} \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\bar{F} - \sum_{j=1}^k |z_{n-j}|^2 \right)^{m_{p-k+1} - m_{p-k}} \cdot (2-F)^{m_{q+1} - m_i} dz d\bar{z} du \\ &= \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}} |F|^{-\lambda_i - n + m_i - n_i} \bar{F}^{n_i - m_p} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\bar{F} - \sum_{j=1}^k |z_{n-j}|^2 \right)^{m_{p-k+1} - m_{p-k}} \times \\ &\quad \times (2-F)^{m_{q+1} - m_i} dz d\bar{z} du \end{aligned}$$

これは §3 の $c_{11}(\lambda; m_1, \dots, m_n)$ において

$\lambda \mapsto \lambda_i, m_1 \mapsto m_i - n_i, m_k \mapsto m_{g+k-1} - n_i (k=2, \dots, n)$
と変換したものに他ならない。ゆえに

$$C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \frac{(2\pi)^{p-q+1} \cdot 2^{-\lambda_i} \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_i - m_i + n_i + p - q + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_i + m_i - n_i - p + q + 1}{2}\right) \prod_{k=1}^{p-q} \left(\frac{\lambda_i - m_i - n_i + p - q + 1}{2} + m_{p-k+1} - k\right)}$$

が結論される。

以上の準備の下で、 $C_1(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$ の表示を与える。
。 $A = PA_0P^{-1}$ とし、 $M = Z_K(A)$ とおく。 $\mathfrak{m}$ を M の Lie 環とする。この場合、 $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ のとり方から、 $\mathfrak{h}_\mathfrak{m} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}$ の Cartan 部分環になることがわかる。 K の既約表現 $(\pi_{(\vec{m}, \vec{n})}, V_{(\vec{m}, \vec{n})})$ highest weight ベクトル v_1 に対して $\pi_{(\vec{m}, \vec{n})}(X)v_1$ ($X \in \mathfrak{m}$) で張られる $V_{(\vec{m}, \vec{n})}$ の部分空間を H とおき、それ $\mathfrak{h}$ の M の表現を (ξ, H) で表す。この場合、 (ξ, H) が M の既約表現になり、また $\dim \text{Hom}_M(V_{(\vec{m}, \vec{n})}, H) = 1$ であることも容易にわかる。したがって、今までの議論及び定理 5.2 より次が得られる。

$$\text{定理 6.1. } C_1(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} C_1^\alpha(\lambda, \vec{m}, \vec{n})$$

今までは $p > q$ を仮定してきた。最後に少しばかり $p = q$ の場合について言及しておく。記号はそのまま使う。本質的な違いはルート系が C 型になることである。 α_{ij}, β_{ij} はとほやほりルートであるが、 γ_i はルートにならない。その代りに

$$\delta_i(H) = 2\epsilon_i \quad (H = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, -\epsilon_p, \dots, -\epsilon_1) \in \alpha_0)$$

とおけば、 $\pm \alpha_{ij}, \pm \beta_{ij}, \pm \delta_i$ がルートになる。したがって問題なのは、 δ_i に対応する C-函数の因子 $c_i^{\delta_i}(\lambda; \vec{m}, \vec{n})$ を決定することである。しかし今の場合、 $\mathfrak{g}_0(\delta_i) \cong \mathfrak{su}(1, 1)$ になることに注意すれば、容易な計算により

$$c_i^{\delta_i}(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{\lambda_i+1}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{1}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{m_i} \left(\frac{1-\sqrt{1}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{n_i} dx$$

がわかる。ゆえに §3 の公式 (III) より

$$c_i^{\delta_i}(\lambda, \vec{m}, \vec{n}) = \frac{(2\pi) \cdot 2^{-\lambda_i} \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma\left(\frac{\lambda_i + m_i - n_i + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_i - m_i + n_i + 1}{2}\right)}$$

が結論される。また定理 6.1 はやはり成立つ。

§7. 終りに

今までかなり悠長に計算結果を書き連ねてきた。

ユニタリ表現論独特の一般的記述形式を使えば、もう少しスマートに言い表わされる部分もあっただろうが、このような書き方をしてきたのはひとえに筆者の浅学非才による。これまでの計算を同じパターンで他の群の場合についても続けていくと、いつ終わるのか気の長い話になる。そろそろ一般的公式を見出しそれを証明する段階に達したと思われる。

References

- [1]. Wallach, N.R., Harmonic analysis on homogeneous spaces,
- [2] 森口、宇田川、一松, 数学公式Ⅲ (岩波全書)
- [3] 西尾, 岩淵, 岩波国語辞典

1981. 8. 20.