

Unipotent variety の境界について.

東大. 理. 院生.

佐藤 忍.

・要約 - $s.s$ Lie alg $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ の Int を G とする. G に
は, 自然に $G \times G$ -homogeneous な構造がはいる. この
構造は, G を対称空間 $G \times G / \Delta G$ ($= X$ とする.) とみな
したものである. (ここで, X での ΔG -orbit は, G 中の
Conjugate class に対応する). X を, $\exists$ cpt. hol. manifold $\tilde{X}$
の dense-open な manifold として実現する. (このまう
な $\tilde{X}$ は, $G \times G$ -action を持つ多様体として, "自然に" 構
成できる.). $\tilde{X}$ は "有限個の" $G \times G$ -orbit に分解され,
Open なもの, cpt なものはそれぞれ Unique である.
cpt な orbit は $G/B \times G/B^-$ であり, ΔG -orbit は,
Bruhat-分解 $B^- \backslash G/B$ に対応している.
さて X で unipotent-variety U を考える. すると.

claim. $\overline{U} \cap (G/B \times G/B^-)$

$$= W - \bigcup W_i^{\vee} \text{ の } \Delta G\text{-orbit.}$$

$$(但し, W_i^{\vee} = \langle \rho_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \rho_n \rangle$$

I. $\widehat{X}$ の構成.

$$\eta: \text{Complex no.}, G = \text{Int } \eta, \widehat{G} = G \times G.$$

$$\sigma: \widehat{G} \rightarrow \widehat{G} \text{ とする. } (\widehat{G}^* = \Delta G \text{ である})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$(g, h) \mapsto (h, g)$$

η の C.S.A. α を 1 つ fix して, Borel $U^+ \supset \alpha$ を fix する. α の opposite を U^- とする. $n^{\pm} = [U^{\pm}, U^{\pm}]$ とする.

$$\widehat{X}^+ = \Delta(\alpha, U^+) \text{ とし, } \alpha \text{ の simple-root を } \Psi \text{ とする,}$$

$\oplus \in \Psi$ に対し.

$$\alpha_{\oplus} = \{H \in \alpha, \quad \alpha(H) = 0, \forall \alpha \in \oplus\}$$

$$\alpha(\oplus) = \{H \in \alpha, \quad \langle H, \lambda \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \alpha_{\oplus}\}$$

$$n_{\oplus}^+ = \sum_{\lambda \in \widehat{\Sigma}^+ - \langle \oplus \rangle^+} \eta^{\pm \lambda}$$

$$n^{\pm}(\oplus) = \sum_{\lambda \in \widehat{\Sigma}^{\pm} - \langle \oplus \rangle^{\pm}} \eta^{\pm \lambda}$$

$$\eta(\oplus) = n^+(\oplus) + \alpha(\oplus) + n^-(\oplus) \text{ である.}$$

さて, η の subalg, $\alpha, \alpha_0, \alpha(\theta), \nu^\pm, \kappa^\pm, \kappa_0^\pm, \kappa^\pm(\theta)$
 に対応する G の subgrp を,

$A, A_0, A(\theta), B^\pm, N^\pm, N_0^\pm, N^\pm(\theta)$ と表すこと
 にする.

$\prod_{\theta} \overline{\alpha}_\theta (A_0 \times N_0^+) \times (A_0 \times N_0^-) \times \Delta G(\theta)$
 により $\widehat{G}$ の subgrp を def する.

$$\widehat{X} = \widehat{G} \times \widehat{N} \times \mathbb{C}^l (= G \times G \times N^- \times N^+ \times \mathbb{C}^l)$$

(但し, $l = \text{rank } G$). とする.

$\mathbb{C}^l \ni \vec{x}$ に対し, $\alpha(\vec{x}) \in A$ を,

$$\alpha^c(\alpha(\vec{x})) = \overline{\alpha}_\theta (\text{proj } \vec{x})^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{if } \text{proj } \vec{x} \neq 0)$$

とする,

$$\widehat{\alpha}(\vec{x}) = \overline{\alpha}_\theta (\alpha(\vec{x}), \alpha(\vec{x})^{-1}) \quad \text{とする.}$$

$$\textcircled{H} \vec{x} = \overline{\alpha}_\theta \{ \vec{x} : \text{proj } \vec{x} \neq 0 \}.$$

Def. $\widehat{X}$ に同値関係 $\sim$ を, 次によりに入れる.

$$(\vec{g}, \vec{n}, \vec{x}) \sim (\vec{g}', \vec{n}', \vec{x}')$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} \quad \textcircled{H} \vec{x}' = \textcircled{H} \vec{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{g} \cdot \vec{n} \alpha(\vec{x}) P_{\textcircled{H} \vec{x}} = \vec{g}' \cdot \vec{n}' \alpha(\vec{x}') P_{\textcircled{H} \vec{x}'}$$

$\hat{X} \cong \tilde{X}/\sim$ とする. $\pi: \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ とおく.

すると

Th 1. $\tilde{X}$ は cpt, 単連結, complex manifold.

2. $\tilde{X}$ の $\tilde{G}$ -orbit は finite で orbit 分解は,

$$\tilde{X} \cong \bigcup_{\Theta \in \mathcal{F}} \tilde{G}/P_{\Theta}.$$

3. open な orbit, cpt な orbit は unique で, それぞれ, $\tilde{G}/\Delta G$, $\tilde{G}/P^{+} \times B^{-}$ と hol-diffeo である.

II. Unipotent - variety の境界.

G を自然に $\tilde{G}/\Delta G$ と同-視する. つまり

$$(g, k) \Delta G \leftrightarrow gk^{-1} \in G \text{ とするのである.}$$

この同-視によって, $\tilde{G}/\Delta G$ の ΔG -orbit は, G の conjugate class になっている. (1対1の対応.)

各 $\tilde{G}$ -orbit の原点 $(ex \ ex \ e \ x | \Theta) = (ex \ e) P_{\Theta}$.

(但し, $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta$ とする) とする.

cpt な $\tilde{G}$ -orbit $\tilde{G}/P^{+} \times B^{-}$ 上 ΔG -orbit は.

"Bruhat-分解"

$$B \backslash G / P^{+} \text{ と同値である.}$$

$$(\because \Delta G(g, k)(P^{+} \times B^{-}) = \Delta G(k^{-1}g, e)(P^{+} \times B^{-}))$$

以下、簡単の為、 X の local-coordinate $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ 上で議論を進める、(他の場合も同様である、)

$\mathbb{A}^1 = \pi(\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1)$ は G の dense-open-net NAN に対応している。この二つを同一視する。つまり、 $(n, n, \hat{x}) \leftrightarrow n^{-1} \hat{x} n$ とみなすわけである。 $(n, n, \hat{x})$ が unipotent-variety U^1 に含まれる為の条件は $N \times \mathbb{A}^1$ 上の多項式でかける。これは G を matrix 表示した時、 $\det(\lambda I - g)$ の各係数 $= \text{diag } C_i$ という式を、 NAN に制限したものである。ところが、各係数は、 G の表現 ρ の trace であって、しかも、 $g: \text{unip}$ ならば、勝手な表現 ρ' に対し $\rho'(g): \text{unip}$ である。よって、 G 上の既約表現の trace について考えれば十分である。

G の既約表現を ρ とし、 ρ の matrix 表示を次のようにとる。 V_ρ の base $e_1 \sim e_{d_\rho}$ を A の weight-vector で、 $i > j$ ならば e_i の weight $- e_j$ の weight $\in \langle \psi \rangle^+$ となるようにとる。(C_1 は highest-weight-vector である。)
この base につき matrix 表示する。

$$\text{tr} \rho(n^{-1} a n) = \text{tr} \rho(n^{-1} n^{-1} a) = d_\rho. \quad \text{とかける。}$$

$d_i \rightarrow \infty$ とすると、 $\rho(n^{-1} n)$ の $(1,1)$ 成分 $= 0$ となる。

これは $n^+ \pi \beta^+$ が G/β^+ 上の line-bundle に実現された既約表現の lowest-weight ~~section~~-vector の零点である。

$\lambda \in \mathfrak{a}^+$ かつ $(\lambda, d_j) = d_j$ に対し, highest weight λ の $\pi(\lambda) \mid \lambda$ を ρ とし $\rho \in \rho_i, \rho_i$ とする。すると, G/β^+ 上で, lowest-weight-section f_λ, f_λ' は $f_\lambda' = c f_\lambda^{\pi(\lambda)}$ と表ける。 ρ_i は G 上の ρ だから, f_λ の零点は, $B \setminus G/\beta^+$ 中に shortest-expression に表われるものに限られることより,

$$\underline{Th.} \quad \overline{U(\mathfrak{a}^+)} \cap (G/\beta \times G/\beta^-) / \Delta G$$

$$= \{ w \in W : w = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_r} : \text{shortest expression} \\ \{ w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_r} = s \} \}$$