

主系列表現の *infinitesimal operators*

早大 理工 大豆生田 雅一

§1. 序. 非コンパクト, 実半単純リー群 G の主系列表現の *infinitesimal operators* を G の極大コンパクト部分群 K 上の *differential operators* として表わすことに問題とする。これは, 主系列に属する C -関数の漸近漸化式が, 上の *infinitesimal operators* との *intertwining relation* より得られることによる, C -関数の *explicit formula* の計算への応用を差支えないことである。

C -関数は G 上の調和解析に必要な多くの情報を含んでいるが, 特別な場合を除いてその性質の多くは不明のままである。これは C -関数を定義する積分の計算が困難な点であって, 上の特別の場合と比べてこの困難が除去可能な場合である。こゝでの計算の大部分は E. Threlker によるものである。(IIT)

また G は non compact connected simple real Lie group とその center は finite とする。その岩沢分解を (対応する Lie algebra を $\mathfrak{g}$ で文字で書く)

$$G = KAN \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

元 $g \in G$ の対応する分解を

$x = \kappa(x) \exp H(x) n(x)$. $\kappa(x) \in K$ $H(x) \in \mathfrak{a}$ $n(x) \in \mathfrak{n}$ とする。次に $\langle, \rangle$ は $\mathfrak{g}$ の Killing form. θ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{k}$ に関する Cartan involution $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は Cartan 分解とする。さらに $(\mathfrak{g}, \sigma)$ の root 系 (正の n 個) を Δ (Δ^+) とする。 $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a} \}$$

$$p_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$$

又 $M \in A$ の $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の centralizer $\mathfrak{m} \in \mathfrak{g}$ の Lie algebra とする。 $\mathfrak{g}$ 上の positive definite & symmetric bilinear form $\langle, \rangle_0 \in$

$$\langle X, Y \rangle_0 = -\langle X, \theta Y \rangle \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

とすると 次の分解は $\langle, \rangle_0$ に関して orthogonal

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

ここで $X_{\alpha, \perp}$, X_{α, p_α} ($\alpha \in \Delta^+$) は $\mathfrak{g}_\alpha$ の正規直交基底 又 $H_1, \dots, H_m, U_1, \dots, U_m \in \mathfrak{a}, \mathfrak{m}$

の正規直交基底とすると.

$$\{X_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Delta^+ \ 1 \leq i \leq p_{\alpha}\} \cup \{0X_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Delta^+ \ 1 \leq i \leq p_{\alpha}\}$$

と添えて $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる. さらに

$$Y_{\alpha,i} = 2^{-1/2} (X_{\alpha,i} + 0X_{\alpha,i}) \quad Z_{\alpha,i} = 2^{-1/2} (X_{\alpha,i} - 0X_{\alpha,i})$$

とすると.

$$\{H_1, \dots, H_m, Y_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Delta^+ \ 1 \leq i \leq p_{\alpha}\}$$

$$\cup \{H_1, \dots, H_m, Z_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Delta^+ \ 1 \leq i \leq p_{\alpha}\}$$

はそれぞれ $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ の正規直交基底となる.

最後に $\hat{K}, \hat{M} \subset K, M$ それぞれの unitary dual.

すなわち既約 unitary 表現の同値類全体とする. すると

$\hat{K}, \hat{M}$ はその highest weights によって parametrize 出来る. 又 $\lambda \in \hat{K}$ ($\mu \in \hat{M}$) と對して $(\tau_{\lambda} E_{\lambda})$ ($(\sigma_{\mu} V_{\mu})$) $\in \Lambda$ (μ) と属する表現とする.

§2. 主系列表現

$$\rho = 2^{-1} \sum_{\alpha \in \Delta^+} p_{\alpha} \alpha \quad \lambda \in \sigma_C^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma, \mathbb{C})$$

$$\mu \in \hat{M} \text{ と對して}$$

$$C_{\lambda, \mu}^{\infty}(G) = \{f \in C^{\infty}(G; V_{\mu}) \mid \varphi(am a n) = a^{-\lambda + \rho} \sigma_{\mu}(m^{-1}) f(a n)\}$$

$$\text{但し } a^{-\lambda + \rho} = e^{-\langle \lambda + \rho, H(a) \rangle}$$

$$\text{又 } (f_1, f_2)_{\lambda, \mu} = \int_K (f_1(k), f_2(k))_{V_{\mu}} dk$$

$(\cdot, \cdot)_{\lambda, \mu}$ による $C_{\lambda, \mu}^{\infty}(G)$ の completion $\mathcal{H}_{\lambda, \mu}$ と書く。 $\gamma = \tau$ $x, y \in G$, $f \in \mathcal{H}_{\lambda, \mu}$.

$$(\tilde{L}_{\lambda, \mu}(x)f)(y) = f(x^{-1}y)$$

とある。 $\gamma = \tau$ と $(\tilde{L}_{\lambda, \mu}, \mathcal{H}_{\lambda, \mu})$ は G の連続表現とある。 $\gamma = \tau$ は (非 $\tau = \gamma$) 主系列表現と言う。

K は制限する $\gamma = \tau$ である $C_{\lambda, \mu}^{\infty}(G)$, $\mathcal{H}_{\lambda, \mu}$ から K 上の関数空間 $C_{\mu}^{\infty}(K)$, $\mathcal{H}_{\mu}$ が得られる。

$\varphi \in \mathcal{H}_{\mu}$ $x \in G$, $k \in K$

$$(L_{\lambda, \mu}(\omega\varphi))(k) = e^{(-\lambda - \rho, H(x^{-1}k))} \varphi(k(x^{-1}k))$$

とある。 $(L_{\lambda, \mu}, \mathcal{H}_{\mu})$ は $(\tilde{L}_{\lambda, \mu}, \mathcal{H}_{\lambda, \mu})$ と同値な表現とある。 $\gamma = \tau$ $\varphi \in C_{\mu}^{\infty}(K)$ $Z \in \mathfrak{Z}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{Z}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

$$(L_{\lambda, \mu}(Z)\varphi)(k) = \frac{d}{dt} L_{\lambda, \mu}(\exp(tZ))\varphi(k)|_{t=0}$$

の計算を行う。 (φ は infinitesimal operator)

簡単のため Harish-Chandra の記号 $\varphi(x, a)$, $\varphi(a, x)$ を用いる

§3. $L_{\lambda, \mu}(Z)$ の計算

$\varphi \in C_{\lambda, \mu}^{\infty}(G)$ の K への制限 φ とある。 $\gamma = \tau$ と

$$\begin{aligned} L_{\lambda, \mu}(Z)\varphi(k) &= \varphi(-Z \cdot k) \\ &= \varphi(k, -\text{Ad}(k)^{-1}Z) \end{aligned}$$

$$\text{Ad}(k^{-1})Z = \sum_{i=1}^l \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, H_i \rangle H_i + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{p_\alpha} \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, Z_{\alpha,i} \rangle Z_{\alpha,i}$$

$$Z_{\alpha,i} = -Y_{\alpha,i} + \sqrt{2} X_{\alpha,i}$$

$$\exists f \in C^\infty_{\lambda, \mu}(G) \quad H \in \sigma \quad \chi \in \pi = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \varphi_\alpha$$

$\in \mathcal{H} \mid \tau$

$$f(x; H) = -\langle \lambda + \rho, H \rangle f(x) \quad f(x; \chi) = 0$$

故.

$$\begin{aligned} (L\lambda_\mu(Z)\varphi)(k) &= \sum_{i=1}^l \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, H_i \rangle \langle \lambda + \rho, H_i \rangle \varphi(k) \\ &\quad - \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{p_\alpha} \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, Z_{\alpha,i} \rangle \varphi(k; Y_{\alpha,i}) \end{aligned}$$

$$\nu \in \sigma_C^* \in \mathcal{H} \mid \tau \quad H_\nu \in \sigma_C = \sigma \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad \varepsilon$$

$$\langle H_\nu, H \rangle = \nu(H) = \langle \nu, H \rangle \quad \forall H \in \sigma.$$

$$\in \mathcal{F}, \tau \text{ 定義する. } \eta = \tau \quad \phi_Z^\nu(k) = \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, H_\nu \rangle$$

$\in \mathcal{F}$ なる.

$$\begin{aligned} (L\lambda_\mu(Z)\varphi)(k) &= \phi_Z^{\lambda+\rho}(k) \varphi(k) \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{p_\alpha} \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, -Z_{\alpha,i} \rangle \varphi(k; Y_{\alpha,i}) \end{aligned}$$

より

$$\phi_Z^\nu(k; Y_{\alpha,i}) = \alpha(H_\nu) \langle \text{Ad}(k^{-1})Z, -Z_{\alpha,i} \rangle$$

より.

$$\begin{aligned} (L\lambda_\mu(Z)\varphi)(k) &= \phi_Z^{\lambda+\rho}(k) \varphi(k) \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \Delta^+} -\alpha(H_\nu) \sum_{i=1}^{p_\alpha} \phi_Z^\nu(k; Y_{\alpha,i}) \varphi(k; Y_{\alpha,i}) \end{aligned}$$

$$\varphi \quad \alpha(H_\nu) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta^+$$

命題 1. $Z \in \mathfrak{g}_c$ $v \in \sigma_c$ $\alpha(H_v) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta^+$

$\lambda \in \sigma_c^*$ $\mu \in \hat{H}$ $\varphi \in C_c^\infty(K)$ $v \neq 1$ z

$$L_{\lambda, \mu}(Z) \varphi(k) = \phi_Z^{\lambda + \rho}(k) \varphi(k) \\ + \sum_{\alpha \in \Delta^+} -\alpha(H_v)^{-1} \sum_{i=1}^{P_\alpha} \phi_Z^\nu(k; Y_{\alpha, i}) \varphi(k; Y_{\alpha, i})$$

($k \in K$)

但し $\phi_Z^\nu(k) = \langle \text{Ad}(k)^{-1} Z, H_\nu \rangle$

§ 4. $\dim A = 1$ の場合.

この時 $\Delta^+ = \{\alpha\}$ 又は $\Delta^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$

$P_j = P_{j\alpha}$ $j = 1, 2$ $H \in \sigma_c$ $\alpha(H) = 1$

とす. $\eta = z$ $\sigma_c^* \cong \mathbb{C}$ ε $\lambda \mapsto \lambda(H) \in \mathbb{R}$,

z identify とす.

1. $\phi_Z(k) = \langle \text{Ad}(k)^{-1} Z, H \rangle / \langle H, H \rangle$

とす. $c^{-1} = 1 / \langle H, H \rangle$

$$L_{\lambda, \mu}(Z) \varphi(k) = (\lambda + \rho) \phi_Z(k) \varphi(k) \\ + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{P_j} -c \phi_Z(k; Y_{j\alpha, i}) \varphi(k; Y_{j\alpha, i}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{P_2} c \phi_Z(k; Y_{2\alpha, i}) \varphi(k; Y_{2\alpha, i})$$

$\eta = z$

$$\omega_K = - \sum_{i=1}^n \omega_i^2 - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{P_j} (Y_{j\alpha, i})^2$$

ただし $\text{Ad}(k) \omega_K = \omega_K$ $k \in K$.

2.7. 简单计算与

$$\begin{aligned} L_{\lambda\mu}(\omega_k) (\phi_Z \varphi)(k) &= \phi_Z(k) \varphi(k; \omega_k) \\ &\quad + \phi_Z(k; \omega_k) \varphi(k) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \phi_Z(k; \omega_i) \varphi(k; \omega_i) \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{p_j} \phi_Z(k; \gamma_{j\alpha, i}) \varphi(k; \gamma_{j\alpha, i}) \end{aligned}$$

$$\phi_Z(k; \omega) = 0 \quad \forall \omega \in \pi\mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \phi_Z(k; \gamma_{j\alpha, i}^2) &= \langle \text{Ad}(k') Z \quad \text{ad}(\gamma_{j\alpha, i})^2 H \rangle / \langle H, H \rangle \\ &= -j \langle \text{Ad}(k') Z \quad \text{ad}(\gamma_{j\alpha, i}) Z_{j\alpha, i} \rangle / \langle H, H \rangle \end{aligned}$$

2.7.2

$$\begin{aligned} \text{ad}(\gamma_{j\alpha, i}) Z_{j\alpha, i} &= \frac{1}{2} [X_{j\alpha, i} + \theta X_{j\alpha, i}, X_{j\alpha, i} - \theta X_{j\alpha, i}] \\ &= [\theta X_{j\alpha, i}, X_{j\alpha, i}] \\ &= - [X_{j\alpha, i}, \theta X_{j\alpha, i}] \\ &= - \langle X_{j\alpha, i}, \theta X_{j\alpha, i} \rangle H \frac{j}{\langle H, H \rangle} \\ &= \frac{j}{\langle H, H \rangle} H \end{aligned}$$

$$\phi_Z(k, \omega_k) = \frac{1}{\langle H, H \rangle} (p_1 + \tau p_2) \phi_Z(k)$$

2.7.3

$$\begin{aligned} &-C \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{p_j} \phi_Z(k, \gamma_{j\alpha, i}) \varphi(k; \gamma_{j\alpha, i}) \\ &= (-p_1 + p_2) \phi_Z(k) + \frac{d}{2} (L_{\lambda\mu}(\omega_k) M_\mu(Z) - M_\mu(Z) L_{\lambda\mu}(\omega_k)) \end{aligned}$$

12.6 $M_\mu(Z)$ $\mathcal{H}_\mu \in$ bounded operator τ

$$M_\mu(Z) \varphi(k) = \phi_Z(k) \varphi(k)$$

$\tau \in \mathbb{R} \tau \in \mathbb{Z} \in \mathbb{C} \mathbb{R} \mathbb{C}$.

12.7 τ

Problem 2. $\dim A = 1$ $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$L_{\lambda\mu}(Z) \varphi(k) = (\alpha - \beta) M_\mu(Z) \varphi(k)$$

$$+ \sum [L_{\lambda\mu}(Z_k) M_\mu(Z)] \varphi(k)$$

$$+ \sum_{i=1}^p \phi_Z(k, Y_{2i}) \varphi(k, Y_{2i})$$

12.8 E. Thieleke On quasi-simple reducible representations of the Lorentz group

Trans. of A.M.S. vol 179 p. 465 - p. 505