

半単純対称空間における Weyl の積分公式

と Harish-Chandra 変換について

職業訓練大 佐野 茂

ゴッパクト群, 半単純 Lie 群上の調和解析学が Weyl, Gelfand, Harish-Chandra 等により発展して来た。ここでは Weyl の積分公式, Weyl の指標公式, Radon 変換, あるいは Plancherel 公式を語る際の基本式として用いられている。最近大島, 関口, 松本及び Jensen 等により, より一般の半単純対称空間の構造論の研究が進められている。そこで本論文で, この空間上に Weyl の積分公式を正確に与えよう。つぎにこの積分公式から Harish-Chandra 変換を自然に定義し, その性質を論じよう。

§1. 半単純対称空間上の Cartan 部分空間

G を連結な半単純 Lie 群, α を G の対合射影と同型とする。 $H = \{g \in G; \alpha(g) = g\}$ とおき, φ を G から G の中への写像で $\varphi(g) = g \circ g^{-1}$ で定義されるものとする。この写像で G/H と $\varphi(G)$ は同型になる。 $M = \varphi(G)$ とおき主に

M 上で考えることにする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{f}$ をそれぞれ G, H の Lie 環とし, α を $\mathfrak{g}$ 上の対合的自己同型に自然におくものとする。 $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} : \alpha(X) = -X\}$ とおくと, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ (直和)。

定義 1. $\mathfrak{g}$ の部分集合が Cartan 部分空間とは次の 2 条件を満足するときをいう。

- i) $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間
- ii) 各 $Y \in \mathfrak{g}$ に対し, $\text{ad}(Y)$ は $\mathfrak{g}$ の半単純自己準同型となる。

各 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分空間に対し, Weyl 群 $W(\mathfrak{g}; H)$ $= NH/H$ で定義する。

各 $X \in \mathfrak{g}$ に対し, $\text{ad } X$ の固有方程式

$$\det(\lambda - \text{ad}(X)) = \sum_{i=1}^n d_i(X) \lambda^i, \quad (n = \dim \mathfrak{g})$$

を考える。 d_i は $d_i \neq 0$ となる最小の i とする。 d_i を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f}, \alpha)$ の階数という。

定義 2. $\mathfrak{g}$ の元 X が正則とは $d_i(X) \neq 0$ のときをいう。
 $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{h}$ に対し, 正則元全体の集合を $\mathfrak{h}$ で表わす。

各 $\alpha \in M$ に対し,

$$\det(\lambda + 1 - \text{Ad}(\alpha)) = \sum_{i=1}^n D_i(\alpha) \lambda^i$$

とおくと, D_i は解析関数で, $D_i \neq 0$ となる。

定義3. M の元 α が正則とは $\text{Der } \alpha \neq 0$ のときをいう。

M の部分集合 B の正則元全体を B' で表わす。

次の命題は大島・松本氏による。

命題1. (G, H, α) を半単純対称空間の pair とする。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \alpha)$ を対応する Lie 環の pair としよう。 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を $\text{Ad}(h) (h \in H)$ で互いに共役とみなし、Cartan 部分空間の粗大系としよう。次の (i), (ii) が成立つ。

$$(i) \quad \mathfrak{g}' = \bigcup_{h \in H} \bigcup_{i \in I} \text{Ad}(h) \alpha_i \quad (\text{直和}).$$

写像 $\gamma_i : H / Z_H(\alpha_i) \times \alpha_i \rightarrow \mathfrak{g}'$, $\gamma_i(h, Y) = \text{Ad}(h)Y$
 $(h \in H, Y \in \alpha_i)$
 は 1 たる所正則で $|W(\alpha_i; H)|$ 重の被覆写像となる。

(ii) $A_{\alpha_i} = Z_M(\alpha_i)$ とおき、Weyl 群を $W(A_{\alpha_i}; H) = N_H(A_{\alpha_i}) / Z_H(A_{\alpha_i})$ とする。 $M'_i = \bigcup_{h \in H} h A_{\alpha_i} h^{-1}$ とおくと、 $M' = \bigcup_{i \in I} M'_i$ (直和) である。写像 $\gamma_i : H / Z_H(A_{\alpha_i}) \times A_{\alpha_i} \rightarrow M'_i$, $\gamma_i(h, a) = h a h^{-1}$ $(h \in H, a \in A_{\alpha_i})$ は 1 たる所正則で $|W(A_{\alpha_i}; H)|$ 重被覆写像である。

§2. Weyl の積分公式

$X \in \mathfrak{g}$ を G の単位元 e での接ベクトルと次の対応

$$Xf = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp tX)$$

で得られる。

$X \in \mathfrak{g}$ に対し (2), $M \mapsto e^{\frac{1}{2}X}$ で接ベクトルに対応

$$\hat{X}f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp \frac{tX}{2} \alpha(\exp \frac{tX}{2}))$$

により得られる。

群 G の G への左からの作用を l_g とする。 G の M への作用を $B_g(x) = g \alpha(g)^{-1} (x \in M)$ とする。

$\mathfrak{o}(\mathfrak{g})$ を Cartan 部分空間とする。 $\mu = \sum \mu_i(\mathfrak{o}_i)$ とおく。
 $\lambda \in (\mathfrak{o}_1)^*$ に対し (2),

$$\mathfrak{g}_c(\mathfrak{o}; \lambda) = \{ X \in \mathfrak{g}_c : \text{ad}(Y)X = \lambda(Y)X \quad \forall Y \in \mathfrak{o} \},$$

$$\Sigma(\mathfrak{o}) = \{ \lambda(\mathfrak{o}_i)^* - (0) : \mathfrak{g}_c(\mathfrak{o}; \lambda) \neq (0) \}$$

と定義する。直和分解

$$\mathfrak{g}_c = \mu_c + \mathfrak{o}_c + \sum_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{o})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{o}; \lambda)$$

が成立する。この分解を用い、2 $\mathfrak{g}_c$ から $\mathfrak{g}_c$ への線形写像 γ を

$$\begin{aligned} \gamma: \mathfrak{g}_c &\longrightarrow \mathfrak{g}_c \\ X_\lambda + \alpha(X_\lambda) &\longmapsto X_\lambda - \alpha(X_\lambda) \end{aligned}$$

で定義する。ここに $\{X_\lambda \mid i \in I_\lambda\}$ は $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{o}; \lambda)$ の基底と
 $(\lambda \in \Sigma(\mathfrak{o}))$ する。

M 上の $B_g (g \in G)$ 不変測度 da を固定する。対応する B_g 不変線形形式を ω とする。 $A_\mathfrak{o} = Z_H(\mathfrak{o})$ とおく。 $d\bar{h} \in H^1_{\text{Zar}}(A_\mathfrak{o})$ 上の H -不変測度とし、対応する線形形式を ω とする。
 さらに da を $A_\mathfrak{o}$ 上の $B_{\exp X} (X \in \mathfrak{o})$ 不変測度、 μ を対

応する線形形式とする。

ω. μ. ν の条件を満足するものとする。 $\{X_1, \dots, X_r\}$ は $f \pmod{m_c}$ の基底, $Y_1, \dots, Y_m$ を ω の基底としたとき

$$\begin{aligned} & \omega_e(\widetilde{rX_1}, \dots, \widetilde{rX_r}), \widetilde{Y_1}, \dots, \widetilde{Y_m}) \\ &= \nu_e(\widetilde{X_1}, \dots, \widetilde{X_r}) \mu_e(\widetilde{Y_1}, \dots, \widetilde{Y_m}) \end{aligned}$$

が成立つ。

命題2. f を $M_n = \bigcup_{h \in H} h A_n h^{-1}$ 上の可測関数とする。

このとき

$$|W(A_n; H)| \int_{M_n} f(x) dx = \int_{H/Z_H(A_n)} \left(\int_{A_n} f(hah^{-1}) |D_p(a)| da d\bar{h} \right)$$

が成立つ

註(1). 証明は文献[17]を参照。

系. $\{\mathfrak{o}_i\}_{i \in I}$ を $\text{Ad}(h) (h \in H)$ で互いに共位にならない, Cartan subspace の極大系とする. $A_{\mathfrak{o}_i} = Z_H(\mathfrak{o}_i)$ ($i \in I$) とおく. da を $B_{\text{exp } X}$ ($X \in \mathfrak{o}_i$) 不変な $A_{\mathfrak{o}_i}$ 上の測度, dih を $H/Z_H(\mathfrak{o}_i)$ 上の H -不変測度としよう. このとき正定数 α_i ($i \in I$) が存在して, 任意の M 上の可測関数 f に対し

$$\int_M f(x) dx = \sum_{i \in I} \alpha_i \int_{H/Z_H(A_{\mathfrak{o}_i})} \left(\int_{A_{\mathfrak{o}_i}} f(hah^{-1}) |D_p(a)| da d\bar{h} \right)$$

が成立する。

§3. Harish-Chandra 変換の性質

§2 で与えた Weyl の積分公式から, Harish-Chandra 変換を定義した。そのとき, Harish-Chandra 群の場合に定義した変換と同じように境界条件を満足するようにした。そこで具体例にうつしてまず考えよう。

reductive 群 $G = GL(3, \mathbb{C})$ 上の対合的自己同型 $\alpha(g) = \alpha_j g$ を与え。 $H = \{g \in G : \alpha(g) = g\}$ とおく。 $M = \{g \circ (g_1)^{-1} : g \in G\}$ とおく。写像 $\varphi: G/H \ni gH \mapsto g \circ (g_1)^{-1} \in M$ は同型対応となる。Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ のこの自己同型の固有空間分解は $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ 。 $\mathfrak{f} = \{X \in \mathfrak{g} : \alpha(X) = X\} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} : \alpha(X) = -X\} = \sqrt{-1} \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ となる。Cartan 部分空間 $\mathfrak{o}_p$ ($p=0,1$) $\subset \mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{o}_0 = \left\{ D(i\varphi_3, i\varphi_2, i\varphi_1) \right\} \quad (\varphi = \sqrt{-1}),$$

$$\mathfrak{o}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & i\tau & 0 \\ -i\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & i\varphi_1 \end{pmatrix} \right\}$$

で定義すると, $\{\mathfrak{o}_p, p=0,1\}$ は $\text{Ad } h$ ($h \in H$) で互いに共役とならない極大系となる。 $A_p = Z_H(\mathfrak{o}_p)$ とおく。具体的に

$$A_0 = \{a = D(e^{i\varphi_3}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_1})\},$$

$$A_1 = \left\{ a = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \tau & i \operatorname{sh} \tau & 0 \\ -i \operatorname{sh} \tau & \operatorname{ch} \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \right\}$$

となる。 A_0 の元 a の固有値は $e^{i\varphi_3}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_1}$ であり、 A_1 の元 a の固有値は $e^{i\theta+\tau}, e^{i\theta-\tau}, e^{i\varphi_1}$ となる。これら 3 の固有値をこの順に μ_1, μ_2, μ_3 とおく。 A_k の関数 Δ_k を

$$\Delta_k(a_k) = \prod_{1 \leq p < q \leq 3} (\mu_p - \mu_q) \quad a_k \in A_k \quad (k=0,1)$$

で定義する。また $A_0 \subset$ 局所定数関数 $\varepsilon_F(\cdot)$ を

$$\varepsilon_F(a_0) = \prod_{1 \leq p < q \leq 3} \operatorname{sgn} \sin(\varphi_q - \varphi_p)$$

で与える。これらを用いて、 $f \in C_0^\infty(M)$ に対する Harish-Chandra 変換を次の様に定義する。

$$F_f^0(a) = \varepsilon_F(a) \Delta_0(a) \int_{H/\mathbb{Z}_H(A_0)} f(ha h^{-1}) d_0 h, \quad a \in A_0$$

$$F_f^1(a) = \Delta_1(a) \int_{H/\mathbb{Z}_H(A_1)} f(ha h^{-1}) d_1 h, \quad a \in A_1$$

A_1 の toro part $A_1^+ = \{ D(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}) \}$ をとり

$$E = Z_H(A_1^+)$$

$$X(E) = \{ \chi : E \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ 準同型写像} \}$$

$$M = \bigcap_{\substack{M=1 \\ \chi \in X(E)}} \ker \chi$$

とおく。 $M = \{ \begin{pmatrix} \vartheta & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in H : \det \vartheta = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \}$ 。 E は split 成分は $B_1 = \{ D(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}) \}$ とする。 K - トポの順序とを関係するが nilpotent 成分 $N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ をもつ

Parabolic 部分群 $P = MB_1N_1$ をとる。 $K = O(B)$ は H の極大コンパクト群。 G の分解 $G = KP$ を用いる。 K 上に正規化された Haar 測度 dk , M 上に Harish-Chandra の意味で standard な測度 dm , N_1 上に $\mathbb{R}$ standard な測度 dn_1 をとる。 $H/Z_H(A_1)$ 上の H -不変測度 $d\bar{h}$ を

$$\begin{aligned} F_f(a) &= \Delta_1(a) \int_{H/Z_H(A_1)} f(hah^{-1}) d\bar{h} \\ &= \Delta_1(a) \int_{K \times M \times N_1} f(kmn, an_1^{-1}m^{-1}k^{-1}) dk dm dn_1 \end{aligned}$$

を満足するようにとる。 但し、 M_0 は M の単位元 e を含む連結成分。

$$F_f'(a) = \Delta_1(a) \int_{K \times M_0 \times N_1} f(k n_1 m a m^{-1} n_1^{-1} k) dk dm dn_1$$

M_0 の分解 $M_0 = N_{M_0} A_{M_0} K_{M_0}$, $N_{M_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,
 $A_{M_0} = \{ D(e^{\tau}, e^{\tau}, 1) \}$, $K_{M_0} = \begin{pmatrix} SO(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong N_{M_0}$.
 A_{M_0} 上それぞれ standard 5-測度 dn_0 , $d\alpha_0 \in \mathbb{R}$. K_{M_0}
 上には正規化された測度 $\left(\int_{K_{M_0}} dk_0 = 1 \right)$ $dk_0 \in \mathbb{R}$.

$$F_f'(a) = \int_{K \times N_{M_0} \times A_{M_0} \times K_{M_0} \times N_1} f(k n_1 n_0 \alpha_0 k_0 a k_0^{-1} \alpha_0^{-1} n_0^{-1} n_1^{-1} k^{-1}) e^{2t} dk dn_0 d\alpha_0 dk_0 dn_1$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 a \alpha_0^{-1} &= \begin{pmatrix} e^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau & 0 \\ -\sinh \tau & \cosh \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \\ &= \exp \begin{pmatrix} 0 & i\tau e^{i\theta} & 0 \\ -i\tau e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(a) &= (e^{\tau+i\theta} - e^{-\tau+i\theta}) (e^{\tau+i\theta} - e^{i\varphi_1}) (e^{-\tau+i\theta} - e^{i\varphi_1}) \\ &= 2 e^{i\theta} \sinh \tau (e^{\tau+i\theta} - e^{i\varphi_1}) (e^{-\tau+i\theta} - e^{i\varphi_1}) \end{aligned}$$

又

$$\bar{f}(k) = \int_K f(k \alpha k^{-1}) dk \quad \text{と定} \quad \circ$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \sinh \tau \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f} \left(n_1 n_0 \exp \begin{pmatrix} 0 & i\tau e^{i\theta} \\ -i\tau e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} n_0^{-1} n_1^{-1} \right) e^{2t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \bar{f}(n, n_0 \exp \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} n_0^{-1} n_1^{-1} dx$$

le δ

$$\lim_{\tau \rightarrow -0} \sinh \tau \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(n, n_0 \exp \begin{pmatrix} 0 & i\tau e^{\frac{1}{2}} \\ -i\tau e^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} n_0^{-1} n_1^{-1} e^{\frac{1}{2}} d\tau$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \bar{f}(n, n_0 \exp \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} n_0^{-1} n_1^{-1} d\alpha.$$

at

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 1 & -z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\alpha & y(e^{i(\theta-\theta)}-1)-i\alpha z \\ 1 & 1 & z(e^{i(\theta-\theta)}-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\delta > 2$

$$\lim_{z \rightarrow +0} F_f'(a)$$

$$= e^{i\theta} (e^{i\theta} - e^{i\theta})^2$$

$$\times \int_{x=0}^{\infty} \int_{y, z \in \mathbb{R}} \bar{f} \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i\alpha & y(e^{i(\theta-\theta)}-1)-i\alpha z \\ 1 & 1 & z(e^{i(\theta-\theta)}-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) dx dy dz$$

$$a \in A'$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F'_\epsilon(a)$$

$$= -e^{i\theta} (e^{i\theta} - e^{i\varphi_1})^2$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y,z \in \mathbb{R}} \bar{f} \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & & \\ & e^{i\theta} & \\ & & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ix & y(e^{i(\varphi_1 - \theta)} - 1) - iz \\ & 1 & z(e^{i(\varphi_1 - \theta)} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) dx dy dz$$

A_0 に関する Harish-Chandra 変換により、 H の Iwasawa 分解 $H = KB_0N$, $K = O(3)$, $B_0 = \{D(e^{t_1}, e^{t_2}, e^{t_3})\}$,

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ を用いる}$$

$$F'_\epsilon(a) = \epsilon_F(a) \Delta_\epsilon(a) \int_{K \times N} f(kna n^{-1} k^{-1}) dk dn$$

$$nan^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_3} & & \\ & e^{i\varphi_2} & \\ & & e^{i\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - 1) & y(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1) \\ & 1 & z(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

変数変換 $2\alpha \sin(\varphi_2 - \varphi_3)/2 \rightarrow \alpha$ をおこなう.

$$\int_{x,y,z \in \mathbb{R}} \bar{f}(nan^{-1}) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2|\sin(\varphi_2 - \varphi_1)/2|} \times$$

$$\times \int_{x, y, z \in \mathbb{R}^2} \bar{f} \left(a \begin{pmatrix} 1 & ie^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} x & y(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - 1) - ie^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} xz \\ & 1 & z(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) dx dy dz$$

よって

$F_f^0(a)$

$a \in A_0'$

$$= -ie^{i(\varphi_2 + \varphi_1)/2} (e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}) (e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}) \operatorname{sgn}\{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\} \times$$

$$\times \int_{x, y, z} \bar{f} \left(a \begin{pmatrix} 1 & ie^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} x & y(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - 1) - ie^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} xz \\ & 1 & z(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) dx dy dz$$

$\xrightarrow{\varphi_2 \rightarrow \varphi_1 = \theta}$

$$-ie^{i\theta} (e^{i\theta} - e^{i\varphi_1})^2 \int_{x, y, z \in \mathbb{R}^2} \bar{f} \left(a \begin{pmatrix} 1 & ix & y(e^{i(\varphi_1 - \theta)} - 1) - ixz \\ & 1 & z(e^{i(\varphi_1 - \theta)} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix} \right) dx dy dz$$

以上より、次の命題を得る。

命題 3. $a \in A_0 \cap A_1$ semi-regular $\delta \cdot \pi$. $\alpha \neq \pm$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} F_f^1(a) - \lim_{\tau \rightarrow -0} F_f^1(a) = i \lim_{\varphi_2 \rightarrow \varphi_1 = \theta} F_f^0(a)$$

References

- [1] Harish-Chandra : Harmonic analysis on real reductive groups III, Annals of Math 104(1976)
- [2] Hirai, T. : Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II, Japan J. Math. Vol.2, No.1, 1976
- [3] Oshima, T. and Matsuki, T. : Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, preprint
- [4] Oshima, T. and Sekiguchi, J. : Eigenspaces of Invariant Differential operators on an Affine symmetric Space, Inventiones math. 57(1980)
- [5] Sano, S. : The Plancherel formula for $Sp(n, \mathbb{R})$, Springer Lecture Note
- [6] Sano, S. and Sekiguchi, J. : The Plancherel formula for $SL(2, \mathbb{C})/SL(2, \mathbb{R})$, Scientific Papers, University of Tokyo Vol.30, 1980
- [7] Sano, S. : Weyl integral formula for semi-simple symmetric spaces, preprint
- [8] 佐野 : $GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{R})$ 上の不変帯域超関数と Plancherel 公式
数理解析研究所講義録「 $\mathbb{A}_\infty$ 対称空間上の調和解析」