ユニタリ表現論セミナー報告集 I, 1981
pp.35-40

等質ベクトル束における不変微分作用素の環の構造

日本女大　峰村 勝弘

この小文では、reductive な等質空間上の不変微分作用素の環について知られている性質（Helgason [1] 参照）のいくつかを、reductive な等質空間上の等質ベクトル束の場合に拡張する。関連する話題については [2] を参照されたい。

以下、G は連結リー群、K は一つの閉部分群とする。G, K のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とし、G/K は reductive とする。すなわち $\mathfrak{g}$ の subspace $\mathfrak{p}$ で、$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ は $Ad(K)$-不変なものが存在すると仮定する。(τ, V) を、K の表現で、V は有限次元複素ベクトル空間とする。以下では、この G, K, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, (τ, V) は固定しておく。$S(\mathfrak{p}_c)$ で $\mathfrak{p}_c$ 上の symmetric algebra を表わす。$\mathrm{End}(V)$ を単に $E(V)$ と書き、$S(\mathfrak{p}_c)\otimes E(V)$ を K-module とし

での tensor product を表わす。$C^\infty(\mathfrak{g}, V)$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ 上の V-valued C^∞-functions, $E(V)$ に係数をもつ $\mathfrak{g}$ 上の微分作用素の全体とする。$k \in K$, $F \in C^\infty(\mathfrak{g}, V)$, $P \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ に対し

$$F^k(x) = \tau(k) F(\mathrm{Ad}(k^{-1}) x), \quad x \in \mathfrak{g}$$

$$P^k(F) = (P(F^{k^{-1}}))^k, \quad F \in C^\infty(\mathfrak{g}, V)$$

とおくことにより、$C^\infty(\mathfrak{g}, V)$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ は K-module となる。$x \in \mathfrak{g}$ に対し $\partial(x) \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ を

$$F(y; \partial(x)) = \left\{\frac{d}{dt} F(y + tx)\right\}_{t=0}, \quad y \in \mathfrak{g}$$

で定めると、$\partial : x \mapsto \partial(x)$ は

$$F(y; \partial(1 \otimes T)) = T F(y), \quad T \in E(V)$$

となるように unique に、$S(\mathfrak{g}_c) \otimes E(V)$ から $\mathcal{D}(\mathfrak{g}, V)$ の中への algebra-hom. に拡張される。$C^\infty(\mathfrak{g}, V)_x$ $(x \in \mathfrak{g})$ で x における germ の全体を表わす。$p \in S(\mathfrak{g}_c) \otimes E(V)$ と $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\partial_x(p)$ で map

$$C^\infty(\mathfrak{g}, V)_x \ni F \longmapsto F(x; \partial(p)) = \partial_x(p) F \in V$$

を表わすと、

Lemma　$^\forall x \in \mathfrak{g}$ に対し $\partial_x : p \longmapsto \partial_x(p)$ は $S(\mathfrak{g}_c) \otimes E(V)$ から $\mathrm{Hom}(C^\infty(\mathfrak{g}, V)_x, V)$ の中への同型を

与える。更に $\partial : p \mapsto \partial(p)$ は $S(\mathfrak{p}_c) \otimes E(V)$ から $\mathcal{D}(\mathfrak{p}, V)$ の中への同型を与える。$\forall k \in K$ に対して

$$\partial(p)^k = \partial(p^k)$$

を満足する。

E を τ に associate した G/K 上の vector bundle とする。$C^\infty(E)$ で E 上の C^∞-section 全体を表わし、

$$C^\infty(G, \tau) = \{ f : G \to V \mid C^\infty,\ f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g) \quad \forall k \in K,\ \forall g \in G \}$$

とおき、left translation で $C^\infty(G, \tau)$ を G-module とみると、$C^\infty(E)$ と $C^\infty(G, \tau)$ は G-同型となる。$D_\tau(G/K)$ で E 上の G-invariant differential operators 全体のなす環を表わす。$u \in C^\infty(G, \tau)$, $g \in G$ に対して $u_g \in C^\infty(\mathfrak{p}, V)$ を $u_g(x) = u(g \exp x)$ $(x \in \mathfrak{p})$ で定める。$S(\mathfrak{p}_c) \otimes E(V)$ の元で K-invariant なもの全体を $(S(\mathfrak{p}_c) \otimes E(V))^K$ で表わすとき、$p \in (S(\mathfrak{p}_c) \otimes E(V))^K$ と $u \in C^\infty(G, \tau)$ に対して f を

$$f(g) = u_g(0; \partial(p)) \quad (g \in G)$$

で定めると、容易に $f \in C^\infty(G, \tau)$ がわかる。そこで $f = \zeta(p) u$ とおいて $\zeta(p)$ を定めると、$\zeta(p)$ は E 上の微

分作用素となる。

Proposition　$\xi : p \mapsto \xi(p)$ は $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes E(V))^K$ から $D_\tau(G/K)$ の上への同型を与える。

$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c$ の展開環. $\mathfrak{g}^K$ を $\mathfrak{g}$ の K-invariants 全体とする。^{T} で $\mathfrak{g}$ 上の $x^T = -x$ $(x \in \mathfrak{g})$ となる anti-automorphism とする。$d\tau$ を τ の微分表現とし、以下 $d\tau$ が既約と仮定する。$\mathfrak{j} = \ker(d\tau)$, $\mathfrak{j}^T = \{z^T ; z \in \mathfrak{j}\}$ とおく. $Ad(k)$ $(k \in K)$ と ^{T} は可換だから

$$\xi(q \otimes z) = q \otimes (z + \mathfrak{j}^T) \quad (q \in S(\mathfrak{p}_c), z \in \mathfrak{k})$$

により定まる linear map $\xi : S(\mathfrak{p}_c)\otimes\mathfrak{k} \to S(\mathfrak{p}_c)\otimes\mathfrak{k}/\mathfrak{j}^T$ は K-homomorphism である。そこで ξ の $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes\mathfrak{k})^K$ への制限を ξ_K とおく.

次に, $q \in S(\mathfrak{p}_c)$, $z + \mathfrak{j} \in \mathfrak{k}/\mathfrak{j}^T$ に対して

$$\eta(q \otimes (z + \mathfrak{j}^T)) = q \otimes d\tau(z^T)$$

とおくと, η は $S(\mathfrak{p}_c)\otimes\mathfrak{k}/\mathfrak{j}^T$ から $S(\mathfrak{p}_c)\otimes E(V)$ の上への K-isomorphism を与える. $d\tau$ は既約としているので, η の $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes\mathfrak{k}/\mathfrak{j}^T)^K$ への制限 η_K は

$(S(\mathfrak{p}_c)\otimes k/\mathcal{J}^T)^K$ から $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes E(V))^K$ の上への isom. を与える.

Proposition　　$d\tau$ が既約とすると

(i) μ は $\mathcal{G}^K$ から $D_\tau(G/K)$ の中への algebra-homo で

$$\begin{tikzcd}
(S(\mathfrak{p}_c)\otimes k)^K \arrow[r, shift left, "\xi_K"] \arrow[d, "\psi_K"] & (S(\mathfrak{p}_c)\otimes k/\mathcal{J}^T)^K \arrow[l, dashed, shift left, "\alpha"] \arrow[r, "\eta_K"] & (S(\mathfrak{p}_c)\otimes E(V))^K \arrow[d, "\cong", "\mathfrak{I}"'] \\
\mathcal{G}^K \arrow[rr, "\mu"] & & D_\tau(G/K)
\end{tikzcd}$$

は可換となる.

(ii) $\mathrm{Ker}\,\mu = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^T$

(iii) α を $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes k/\mathcal{J}^T)^K$ から $(S(\mathfrak{p}_c)\otimes k)^K$ の中への linear map で

$$\xi_K \circ \alpha = \mathrm{Id}$$

となるものとする。このとき μ は surjective で

$$\mathcal{G}^K = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}^T \oplus (\psi\circ\alpha)(S(\mathfrak{p}_c)\otimes k/\mathcal{J}^T)^K$$
$$\left(= \mathrm{Ker}(\mu) \oplus \mathrm{Im}(\psi\circ\alpha)\right)$$

Theorem.　　G を連結リー群, K を G の閉部分群. G/K は reductive とし, τ を K の有限次元表現で $d\tau$

が既約とする。このとき、次の条件の一つが成立すれば μ は全射で、従って $\mathfrak{g}^K/\mathfrak{g}^K \cap \mathfrak{g}\mathfrak{J}^T \cong D_t(G/K)$ となる。

(i) $\mathfrak{J}$ 又は $\mathfrak{J}^T$ は、$\mathfrak{k}$ に K-invariant な補空間をもつ。

(ii) K の $\mathfrak{k}_c$ 上の Adjoint representation は semisimple

(iii) $Ad(K)$ は compact.

[1] Helgason, S. ; Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962.

[2] Minemura, K. ; 等質ベクトル束上の不変微分作用素, 数理解析研究所講究録, 1981.