

16

概内質ベクトル空間の相対不変式と ある種のユニタリ表現の実現

大 理 山田裕史

§0 序

Lie 群の表現論において、最高ウェイトをもつユニタリ化可能な表現の決定というのは中心的問題のひとつである。ここではこの問題に対するひとつのアプローチとして、概内質ベクトル空間の超局所解析を用いる方法を提唱する。

G を実単純線型 Lie 群でそれに対応する対称空間が tube-type の Hermitian symmetric space (type I の Siegel 領域) $D = \mathbb{R}^n + \sqrt{-1}\Omega \subset \mathbb{C}^n$ であるようなものとする。 $g \in G$, $z \in D$ に対して正則写像 $z \mapsto g \cdot z$ の complex Jacobian を $d(g, z)$ と書くことにする。

$$H = \left\{ F: D \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 正則関数; } \int_{\mathbb{R}^n + \sqrt{-1}\Omega} |F(x + \sqrt{-1}y)|^2 dx dy < +\infty \right\}$$

とおく。これは Hilbert 空間である。このとき

$$(T(g)F)(z) = d(g^{-1}, z) F(g^{-1}z) \quad (g \in G, F \in H)$$

は G の H における既約 $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ リ表現である。また H は

Bergman 核と呼ばれる再生核 $P(z, w)$ をもつ。 T が $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ リ ということから、 $g \in G$ に対して

$$P(gz, gw) = d(g, z)^{-1} P(z, w) \overline{d(g, w)^{-1}}$$

という式が出る。両辺を λ 乗 ($\lambda \in \mathbb{R}$) することにより

$$P(gz, gw)^\lambda = d(g, z)^{-\lambda} P(z, w)^\lambda \overline{d(g, w)^{-\lambda}}$$

となる。もし、 $P(z, w)^\lambda$ が再生核にもつ D 上の正則関数から成る Hilbert 空間 H_λ を構成できれば $\tilde{G}$ (G の universal covering group) の表現

$$(T_\lambda(g)F)(z) = d(g^{-1}, z)^\lambda F(g^{-1}z) \quad (g \in \tilde{G}, F \in H_\lambda)$$

は $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ リ となる。そこで、「このようなパラメータ λ をおいて Hilbert 空間 H_λ を具体的に実現せよ」という問題が考えられる。これが冒頭に挙げた $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ リ化可能な表現の決定という問題である。(もちろんこの問題自体はもっと一般的な状況の F で定式化できる。)

さて $g \in G$ の Lie 環とすると D is tube type という条件より $g = g(-1) \oplus g(0) \oplus g(1)$ と graded に分解される。 $g(0)$ に対応する G の部分群を $Q(0)$ とおくと、

$G(0)$ は adjoint で $g(1)$ に作用する。これによって pair $(G(0), g(1))$ は実既約複素ベクトル空間となつて相対不変式 f^* をもつ。また pair $(G(0), g(-1))$ も同様でこれは $(G(0), g(1))$ の dual と考えられる。 $(G(0), g(1))$ の適当な軌道に $G(0)$ -相対不変な測度を入れこの測度による L^2 -関数達を Fourier-Laplace 変換することにより D 上の正則関数のなす Hilbert 空間をくくる。この Hilbert 空間に $\tilde{G}$ の既約 $\mathbb{R}$ - $\mathfrak{g}$ 表現を構成するわけである。以上の過程において本質的な役割をばたすのは $(G(0), g(1))$ の相対不変式 f^* の Fourier 変換であつて、ここに超局所解析の有用性が見られる。

§1 記号と準備

G を実単純線型 Lie 群でそれに付随する対称空間 G/K (K は G の極大コンパクト部分群) が tube type Hermitian symmetric space であるようなものとする。 $\mathfrak{g} \in G$ の Lie 環として $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする。 $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{z}$ と 1 次元で $\text{ad } \mathfrak{z}$ が $\mathfrak{p}$ 上複素構造 J を与える unique element $\mathfrak{z}$ を用いて $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{p}$ と書ける。

$$\mathfrak{p}^{\pm} = \{X \in \mathfrak{p}; JX = \pm \sqrt{-1}X\} \quad (\text{複号同順})$$

とおくと $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}^+ \cap \mathcal{F}^-$ である。(c は複素化をあらわす。) 次に $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$ をコンパクト Cartan 部分環として $(\mathcal{G}_c, \mathcal{F}_c)$ に関するルート系 $\Delta = \Delta_R \cup \Delta_F$ とする。ここで Δ_R はコンパクトルート全体, Δ_F は非コンパクトルート全体をあらわす。

$$\mathcal{F}^+ = \sum_{\gamma \in \Delta_F^+} (\mathcal{G}_c)^\gamma \quad ((\mathcal{G}_c)^\gamma \text{ は } \gamma \text{ のルート空間})$$

となるように Δ に order を入れる。 $\gamma \in \Delta$ に対して $H_\gamma \in \sqrt{-1}\mathcal{F} \cap [(\mathcal{G}_c)^\gamma, (\mathcal{G}_c)^\gamma]$ で $\gamma(H_\gamma) = 2$ となるものが unique に存在する。また $\gamma \in \Delta_F^+$ に対して $E_\gamma \in (\mathcal{G}_c)^\gamma$ で $[E_\gamma, \bar{E}_\gamma] = H_\gamma$ となるものが存在する。ここで、 $-$ は $\mathcal{G}_c$ の元の $\mathcal{G}$ に関する複素共役である。 $E_{-\gamma} = \bar{E}_\gamma$, $X_\gamma = E_\gamma + E_{-\gamma}$, $Y_\gamma = E_\gamma - E_{-\gamma}$ とおく。 $\gamma \in \mathcal{G}$ の real rank とし、strongly orthogonal な非コンパクト正ルートの集合 $\Psi = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ を次のように定める。まず最高ルート $\gamma_r \in \Psi$ とし、以下、 $\gamma_{j+1}, \dots, \gamma_r$ は strongly orthogonal で最高の非コンパクト正ルート $\gamma_j \in \Psi$ とする。 $\mathcal{O} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R} X_{\gamma_j}$ とおくとこれは $\mathcal{F}$ の極大可換部分環である。次に $\mathcal{F}_c$ の実部分空間 $\mathcal{F}_R$ を、

$$\mathcal{F}_R = \sum_{j=1}^r \mathbb{R} H_{\gamma_j} \quad \text{で定める。}$$

$$c = \prod_{j=1}^r \exp(-\frac{1}{2} Y_{r_j}) \in Q_c$$

で Cayley 変換を定義すると.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ad } c : \mathfrak{f}_R & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{r_j} & \longmapsto & X_{r_j} \end{array}$$

なる同型対応が得られる。

Δ の元の $\mathfrak{f}_R$ への制限に関しては次の基本的な結果がある。

命題 1 (Moore [8]) 上の状況のもとで Δ の元の $\mathfrak{f}_R$ への 0 でない制限は次の形である。

$$\begin{array}{ll} \text{コンパクト正ルート} & \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j) ; 1 \leq i < j \leq r \right\} \\ \text{非コンパクト正ルート} & \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) ; 1 \leq i \leq j \leq r \right\}. // \end{array}$$

$\alpha_j \in \mathcal{O}^* \ (1 \leq j \leq r)$ を $\alpha_j(A) = \gamma_j(\text{Ad } c^{-1}(A))$, $(A \in \mathcal{O})$ により定義する。これは可逆なルート γ_j の Cayley 変換である。これに対して命題 1 を言いかえると次のようになる。

命題 1' $\mathcal{O}$ の $\mathcal{O}$ に関する制限ルート系 Σ は.

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left\{ \pm \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j) ; 1 \leq i < j \leq r \right\} \\ & \cup \left\{ \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j) ; 1 \leq i \leq j \leq r \right\} \end{aligned}$$

である。 //

$\alpha \in \Sigma$ に対してそのルート空間を $\mathcal{H}^\alpha$ とおく。す

なから $\pi^A = \{ X \in \mathfrak{g}; [A, X] = \alpha(A)X \quad A \in \mathfrak{a} \}$.

$\pi^{\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j)}$ は i, j によらず一定に定まる。これを p とおく。

おく。 $U_j = \frac{1}{2}(H_{\alpha_j} - Y_{\alpha_j}) \quad (1 \leq j \leq r)$ とおく。

$JU_j = \frac{1}{2}X_{\alpha_j}$ となる。 Ψ が strongly orthogonal である

ことより、 $\Delta = \sum_{j=1}^r U_j$ に対しては $J\Delta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r X_{\alpha_j}$

となる。命題1より $J\Delta$ は $\mathfrak{g}$ 上半単純で固有値 $0, \pm 1$ を

もつ。それぞれに対応する固有空間を $\mathfrak{g}(0), \mathfrak{g}(\pm 1)$ とする。

明らかに $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-1) \oplus \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1)$ という graded な分

解が成立する。すなわち、 $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subset \mathfrak{g}(i+j)$,

$\mathfrak{g}(i) = 0 \quad (|i| \geq 2)$ である。 $n = \dim \mathfrak{g}(1)$ とおくと

つくり方より明らかに $n = \dim \mathfrak{g}(-1) = r + \frac{1}{2}r(r-1)p$

である。

$\mathfrak{g}(0)$ に対応する G の部分群 $G(0)$ を

$$G(0) = \{ g \in G; g \cdot J\Delta = J\Delta \}$$

で定める。 $G(0)$ は reductive である。また

$$P = G(0) \cdot \exp(\mathfrak{g}(1))$$

と定めると P は G の極大双曲部分群である。

命題2 (Korányi - Wolf [5]) 対称空間 $D = G/K$

は $\mathfrak{g}(1) + \sqrt{1} \Omega \subset \mathfrak{g}(1)_{\mathbb{C}}$ と正則同相であり $\mathfrak{g}(1)$ はその

Silov 境界に open dense に含まれる。 $\therefore \Omega = G(0) \cdot \Delta //$

命題 3 $(\mathcal{G}(0), \mathcal{O}(1))$ は 実既約極均質ベクトル空間で既約相対不変式 $f(\alpha)$ をもつ。 //

証明は軌数の関係で省略するが $V_j = -\frac{E}{2}(H_{\alpha_j} + Y_{\alpha_j})$ ($1 \leq j \leq r$), $t = \sum_{j=1}^r V_j \in \mathcal{O}(-1)$ とおくと

$(\lambda, t, 2J\lambda)$ が TDS-triple になること、すなわち $[2J\lambda, \lambda] = 2\lambda$, $[2J\lambda, t] = -2t$, $[t, \lambda] = 2J\lambda$ を満たすことが key point である。このことだけ注意しておく。

Killing 形式により $\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)^*$ と同一視ができる。このとき $(\mathcal{G}(0), \mathcal{O}(-1))$ は $(\mathcal{G}(0), \mathcal{O}(1))$ と dual な実既約極均質ベクトル空間 $(\mathcal{G}(0)^*, \mathcal{O}(1)^*)$ と同一視される。今後、 $(\mathcal{G}(0), \mathcal{O}(-1))$ の既約相対不変式を $f^*(\xi)$ とかく。

注意 $f(\alpha) > 0$ ($\alpha \in \Omega$), $f^*(\xi) > 0$ ($\xi \in \Omega^*$, ただし $\Omega^* = \mathcal{G}(0) \cdot t$) と仮定してかまわない。 //

今度は $(\mathcal{G}(0), \mathcal{O}(1))$ を複素化して $(\mathcal{G}(0)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}})$ と考える。こうすると $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} - \{f(\alpha) = 0\}$ は $\mathcal{G}(0)_{\mathbb{C}}$ の単一の軌道になる。 $\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}}$ の余接束 $T^*\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}}$ は

$T^*\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} \cong \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} \times \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}}^* \cong \mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}} \times \mathcal{O}(-1)_{\mathbb{C}}$ と同一視する。

定義 $j = 0, 1, \dots, r$ に対して

$\Lambda_j = \text{Zariski closure of } \{(\alpha, \xi) \in T^*g(1)_{\mathbb{C}} \mid \alpha \in \mathcal{Q}_j,$

$$\langle A\alpha, \xi \rangle = 0, A \in g(0)_{\mathbb{C}} \}$$

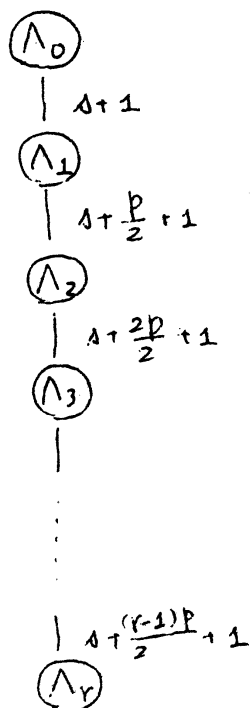
($\exists \xi \in \mathcal{Q}_j$ $\Omega_j = g(0)_{\mathbb{C}} \cdot \sum_{i=0}^j \Pi_i$, $\langle, \rangle$ は Killing 形式)

とおく。

Λ_j は good Lagrange の様体である。

定理 4 $(g(0)_{\mathbb{C}}, g(1)_{\mathbb{C}})$ の holonomy 群 π_1 は次下

とおりである。



従って $(g(0), g(1))$ は

$(g(0), g(-1))$ の b 関数は

$$b(s) = \prod_{j=0}^{r-1} \left(s + \frac{j p}{2} + 1 \right)$$

である。

$$\gamma(\alpha) = \prod_{j=0}^{r-1} \Gamma\left(\alpha + \frac{j p}{2} + 1\right)^{-1} \quad (\text{b 関数の } \Gamma -$$

因子) とおく。

命題 5 (相原 - 三輪 [4]) $\alpha > -1$, $y \in \Omega$ に

対して

$$\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, y \rangle} f(\xi)^\alpha d\xi = C_\alpha \gamma(\alpha)^{-1} f(y)^{-\alpha - \frac{n}{r}}$$

は絶対収束する。(一般の α については上の等式は超関数として意味をもつ。) ここで $d\xi$ は $\Omega^* \subset \mathcal{O}(-1)$ 上の Lebesgue 測度, C_α は α に依存する正定数である。//

この積分公式を $y \in \Omega$ から $z \in D$ に解析接続することにより次の公式が得られる。

系 6 $\alpha > -1$, $z \in D$ に対して積分

$$\int_{\Omega^*} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, z \rangle} f(\xi)^\alpha d\xi = C_\alpha \gamma(\alpha)^{-1} f\left(\frac{z}{\sqrt{-1}}\right)^{-\alpha - \frac{n}{r}}$$

は絶対収束して $z \in D$ の正則関数になる。//

§2 $\mathcal{L}$ -表現の構成

$g \in G$, $z \in D$ に対して $z \mapsto g \cdot z$ なる正則写像の点 z における complex Jacobian を $d(g, z)$ とかく。 $\tilde{G}$ を G の universal covering group とし, $\tilde{g} \in \tilde{G}$ は $g \in G$ の像にもつものとする。

定義 $\alpha > -1$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$, $z \in D$ に対して

$$J_\alpha(\tilde{g}, z) = d(g, z)^{-\frac{n}{2\pi}\alpha - \frac{1}{2}}$$

と定義する。また $\alpha > -1$, $z, w \in D$ に対して

$$\begin{aligned}
K_{\alpha}(z, w) &= f\left(\frac{z-\bar{w}}{\sqrt{-1}}\right)^{-\alpha-\frac{n}{2}} \\
&= C_{\alpha} \gamma(\alpha) \int_{\Omega^*} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, z-\bar{w} \rangle} f^*(\xi)^{\alpha} d\xi
\end{aligned}$$

と定義する。//

命題 7 $J_{\alpha}(\tilde{g}, z)$, $K_{\alpha}(z, w)$ について次の諸性質が成り立つ。

(J1) $J_{\alpha}(\tilde{g}, z)$ は任意に $\tilde{g} \in \tilde{G}$ と固定したとき $z \in D$ について正則である。

(J2) $J_{\alpha}(1, z) = 1$.

(J3) $J_{\alpha}(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2, z) = J_{\alpha}(\tilde{g}_1, g_2 \cdot z) J_{\alpha}(\tilde{g}_2, z)$

(K1) $K_{\alpha}(z, w)$ は $z \in D$ について正則, $w \in D$ について反正則である。

(K2) $K_{\alpha}(g \cdot z, g \cdot w) = J_{\alpha}(\tilde{g}, z) K_{\alpha}(z, w) \overline{J_{\alpha}(\tilde{g}, w)}$

(K3) 任意の自然数 N , 複素数 c_i , $z_i \in D$ に対して
 $\sum_{i,j=1}^N c_i \bar{c}_j K_{\alpha}(z_j, z_i) \geq 0$ が成り立つ。//

命題 8 $\alpha > 1$ に対して

$\mathcal{L}_{\alpha} = \{ \phi: \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}, \text{可測関数};$

$$\| \phi \|_{\alpha}^2 = C_{\alpha} \gamma(\alpha) \int_{\Omega^*} |\phi(\xi)|^2 f^*(\xi)^{\alpha} d\xi < +\infty \}$$

とおく。 $z \in D$, $\phi(\xi) \in \mathcal{L}_{\alpha}$ に対して

$$\check{\phi}(z) = C_{\alpha} \gamma(\alpha) \int_{\Omega^*} e^{\sqrt{-1}\langle \xi, z \rangle} \phi(\xi) f^*(\xi)^{\alpha} d\xi$$

とぶくと右辺の積分は絶対収束して D 上の正則関数 $\check{\phi}(z)$ を定める。

$$J\mathcal{H}_\alpha = \{ \check{\phi}(z); \phi(z) \in \mathcal{H}_\alpha \} \quad \text{with } \|\check{\phi}\|_\alpha = \|\phi\|_\alpha$$

とぶくと $J\mathcal{H}_\alpha$ は再生核 $K_\alpha(z, w)$ をもつ Hilbert 空間である。//

Kunze は [6], [7] において次の命題を得た。

命題 9 G を複素領域 D の正則推移変換群とする。

H を D 上の有限次元ベクトル空間 V に値をとる正則関数
のなす Hilbert 空間で再生核 $K(z, w)$ をもつものとする。

$J(g, z)$ を $G \times D$ 上の $GL(V)$ に値をとる連続関数で (J1)(J2)

(J3) をみたすものとする。さらに $z_0 \in D$ に対して z_0 の

等方部分群 G^{z_0} の表現 $G^{z_0} \ni g \mapsto J(g, z_0) \in GL(V)$ が

ユニタリかつ既約であるとする。このとき $(K1), (K2), (K3)$

がみたさされていけば $(T(g)\phi)(z) = J(g, z)^{-1} \phi(g^{-1}z)$ は

G の H における既約ユニタリ表現である。//

以上の準備により次の命題を得る。

命題 10 $\alpha > 1$ に対して

$$(T_\alpha(\check{\gamma})\check{\phi})(z) = J_\alpha(\check{\gamma}^{-1}, z)^{-1} \check{\phi}(\check{\gamma}^{-1}z)$$

は $\check{G}$ の $J\mathcal{H}_\alpha$ における既約ユニタリ表現である。//

$(G(0), g(1))$ 及び $(G(0), g(-1))$ の b 関数は

$$\alpha_j = \frac{(r-j-1)p}{2} + 1 \quad r < r_1 \quad \text{及び} \quad b(\alpha) = \prod_{j=0}^{r-1} (1 + \alpha_j) \quad \text{で}$$

ある。また $\operatorname{Re} \alpha > -1$ に対して $f^*(\xi)^\alpha$ は $\bar{\Omega}^*$ 上の超関数である。すなわち $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\bar{\Omega}^*)$ に対して

$$\langle f^*, \phi \rangle = \int_{\Omega^*} f^*(\xi)^\alpha \phi(\xi) d\xi.$$

この超関数 f^* は $\alpha \in \mathbb{C}$ によって解析接続する。

$$f(D_\xi) f^*(\xi)^{\alpha+1} = b(\alpha) f^*(\xi)^\alpha$$

(ただし $f(D_\xi)$ は $f(D_\xi) e^{\langle \xi, x \rangle} = f(x) e^{\langle \xi, x \rangle}$ で与えられる

$g(1)$ 上の定数係数の微分作用素。 $f^*(D_x)$ も同様に定義される。)

より

$$f^*(\xi)^\alpha = b(\alpha)^{-1} f(D_\xi) f^*(\xi)^{\alpha+1}$$

で右辺は $\operatorname{Re} \alpha > -2$ で α によって有理型に依存する超関数である。

$$f^*(\xi)^\alpha = b(\alpha)^{-1} \cdots b(\alpha+N)^{-1} f(D_\xi)^{N+1} f^*(\xi)^{\alpha+N+1}$$

としてこの操作をくり返すことにより f^* が $\mathbb{C}$ 全体で有理型の超関数となる。そして $f^*(\xi)$ の極は $\{\alpha_j - k; j=0, \dots, r-1, k=1, 2, \dots\}$ に含まれることのみわかる。この集合で同じ位数の零をもつ関数 $\gamma(\alpha)$ をかけると $\gamma(\alpha) f^*(\xi)^\alpha$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則な超関数である。今 $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\Omega^*)$ とすると

積分, $\int_{\Omega^*} f(\xi)^{-1} \phi(\xi) d\xi$ は有限確定, 従って,

$$\lim_{\alpha \downarrow -\alpha_{r-1}} \gamma(\alpha) \int_{\Omega^*} f(\xi)^\alpha \phi(\xi) d\xi = 0 \quad (\alpha_{r-1} = 1)$$

となる。つまり超関数 $\gamma(\alpha) f(\xi)^\alpha \big|_{\alpha=-\alpha_{r-1}}$ の台は $\bar{\Omega}_{r-1}^*$ に含まれている。ただし $\Omega_j^* = G(0) \cdot (\sum_{k=0}^j V_k)$, $V_0 = 0$ とおいた。一般に超関数 $\gamma(\alpha) f(\xi)^\alpha \big|_{\alpha=-\alpha_j}$ の台は $\bar{\Omega}_j^*$ に含まれている。また $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\Gamma(\alpha) \geq 0$ であるから $\gamma(\alpha) f(\xi)^\alpha \big|_{\alpha=-\alpha_j}$ は正の超関数である。以上により次の系が得られる。

系 11 $j = 0, 1, \dots, r-1$ とする。 Ω_j^* 上に $G(0)$ -相対不変の測度 $d\mu_j(\xi)$ が存在して次の積分が絶対収束する。

$$\int_{\Omega_j^*} e^{\sqrt{1-\xi} \cdot z} d\mu_j(\xi) = c_j f\left(\frac{z}{\sqrt{1-\xi}}\right)^{\alpha_j - \frac{n}{2}}$$

ただし $z \in D$, c_j は j に依存する正定数である。 //

ここでは Ω_j^* 上の測度を与える代わりに α_j の値が f の関数の零点であるということが特に重要である。

定義 $j = 0, 1, \dots, r-1$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$, $z, w \in D$ に対して

$$J_{(j)}(\tilde{g}, z) = d(g, z)^{\frac{r}{2n} \alpha_j - \frac{1}{2}}$$

$$K_{(j)}(z, w) = f\left(\frac{z-\bar{w}}{\sqrt{1-\xi}}\right)^{\alpha_j - \frac{n}{2}}$$

と定義する。 //

$J_{(j)}(\tilde{g}, z)$, $K_{(j)}(z, w)$ はそれぞれ命題 7 の (J1),

(J2), (J3), (K1), (K2), (K3) とおける。従って以後は $\alpha > -1$

の場合と全く同様である。

命題 12 $j=0, 1, \dots, r-1$ に対して

$\mathcal{L}_j = \{ \phi: \Omega_j^* \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 可測関数};$

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_j}^2 = c_j \int_{\Omega_j^*} |\phi(\xi)|^2 d\mu_j(\xi) < +\infty \}$$

とおく。 $z \in D$, $\phi(\xi) \in \mathcal{L}_j$ に対して

$$\check{\phi}(z) = c_j \int_{\Omega_j^*} e^{i\sqrt{\alpha} \langle \xi, z \rangle} \phi(\xi) d\mu_j(\xi)$$

とおくと右辺の積分は絶対収束して D 上の正則関数 $\check{\phi}(z)$ を定める。

$$\mathcal{H}_j = \{ \check{\phi}(z); \phi(\xi) \in \mathcal{L}_j \} \quad \text{with} \quad \|\check{\phi}\|_{\mathcal{H}_j} = \|\phi\|_{\mathcal{L}_j}$$

とおくと $\mathcal{H}_j$ は再生核 $K_j(z, w)$ をもつ Hilbert 空間である。 //

命題 13 $j=0, 1, \dots, r-1$ に対して

$$(T_j(\tilde{q}) \check{\phi})(z) = T_j(\tilde{q}^{-1}, z)^{-1} \check{\phi}(\tilde{q}^{-1}, z)$$

は $\tilde{q}$ の $\mathcal{H}_j$ における既約ユニタリ表現である。 //

注意 $\mathcal{H}_0 = \{ D \text{ 上の定数関数} \} \cong \mathbb{C}$ であり、

T_0 は自明な表現である。 //

§3 表現空間の性質

ここでは前節で構成した既約ユニタリ表現 T_j の

表現空間 $H(j)$ について考察する。

$H(j)$ は D 上の正則関数のなす Hilbert 空間であつて、 $D = \mathcal{O}(1) + \sqrt{-1}\Omega$ であるが $\check{\phi}(z) \in H(j)$ に対して $\mathcal{O}(1)$ の境界値 ε と、 ε もの $\check{\phi}(z + \sqrt{-1}\Omega 0)$ とかくことにする。これはもちろん $\mathcal{O}(1) (\cong \mathbb{R}^n)$ 上の超関数 (hyperfunction) である。(distribution にもなつてゐる。)

$j = 0, 1, \dots, r-1$ に対して

$\mathcal{D}_j = \{ \check{\phi}(z + \sqrt{-1}\Omega 0), \phi(\xi) \in \mathcal{O}_j \}$ with $\|\check{\phi}\|_j = \|\phi\|_j$ として $\mathcal{O}(1)$ 上の distribution のなす Hilbert 空間を定義する。表現 $\pi(j)$ の境界値 ε とすることによつて $\check{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{D}_j$ 上に既約かつユニタリに作用する。

定理 14 $j = 0, 1, \dots, r-1$ に対して $\mathcal{D}_j$ の元は微分方程式 $f^*(D_x)\mu = 0$ をみたす。さらに $\check{\phi}(z + \sqrt{-1}\Omega 0) \in \mathcal{D}_j$ に対して S.S. $\check{\phi} \subset \{ (z, \xi) ; z \in \mathcal{O}(1), \xi \in \bar{\Omega}_j^* \}$ をみたす。ここで S.S. は超関数の特異サポートルを表わす。//

§4 展望

本稿では $\mathfrak{lie}$ 群とその $\mathfrak{lie}$ 環に付随する概均質ベクトル空間の超局所解析を行うことにより表現のユニタリ化可能性の問題が、至れりに見通しよくなることと主

張した。そのにめ換う対称空間が tube type に限定され表現が K の 2 次元表現から誘導された形になっている場合 (仮に scalar case と呼ぼう) に限らなければならない。

対称空間が tube type である場合、 Lie 環等は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-1) \oplus \mathfrak{g}(-\frac{1}{2}) \oplus \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(\frac{1}{2}) \oplus \mathfrak{g}(1)$ と graded に分解されるが、この場合にも相対不変式をもつような微分ベクトル空間が構成できるかどうかは興味がある。また general case, つまり K の有限次元表現から誘導した形になっている表現のユニタリ化可能性の問題は scalar case とは比べものにならない程、複雑でむずかしい (さよもしろい) 問題であろう。例えば、最も簡単と思われる群 $SU(2,2)$ に対してでさえユニタリ化可能性の必要十分条件が完全に決定されたのはつい最近のことである。(Williams [12]) これは Parthasarathy の判定法という代数的、 Lie 環論的な手段によっている。必要条件は代数的手段によつてのみ、得られるもののなかでも知らなかつた。しかしながら本稿の手法はユニタリ化可能性の十分条件を与えるには極めて有効なものであると確信する。

文 献

- [1] K.I. Gross and W. J. Holman III, Matrix-valued special functions and representation theory of the conformal group I; the generalized gamma function, Trans. AMS. 258 (1980), 319-350.
- [2] T. Inoue, Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 75-140.
- [3] H. P. Jakobsen and M. Vervaeke, Wave and Dirac operators and representations of the conformal group, J. of Functional Analysis 24 (1977), 52-106.
- [4] 柏原-三輪, Micro-local calculus と 相対不変式の Fourier 変換, 数理研講究録 238 (1975).
- [5] A. Korányi and J. A. Wolf, Realizations of hermitian symmetric spaces as generalized half planes, Ann. of Math. 81 (1955), 265-288.
- [6] R.A. Kunze, On the irreducibility of certain multiplier representations, Bull. AMS. 68 (1962),

93-94.

- [7] R. A. Kunze, Positive definite operator-valued kernels and unitary representations, in "Proc. of the Conf. on Funct. Anal", Thompson Book Company, Washington, D.C., 1967.
- [8] C.C. Moore, Compactifications of symmetric spaces II, the Cartan domains, Amer. J. Math. 86, (1964), 358-378.
- [9] H. Rossi and M. Vergne, Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, Acta Math. 136 (1976), 1-59.
- [10] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima Microlocal analysis of prehomogeneous vector spaces, Inventiones math. 62 (1980), 117-179.
- [11] N. R. Wallach, The analytic continuation of the discrete series I, II, Trans. AMS. 251 (1979), 1-17; 19-37.
- [12] F. L. Williams, Unitarizable highest weight modules of the conformal group, preprint, 1978.

[13] H. Yamada, Relative invariants of prehomogeneous vector spaces and a realization of certain unitary representations I, Hiroshima Math. J. 11 (1981).

[14] 小田, 修士論文 広島大学 1981.