

Averaged discrete series の character について

福井大学 教育学部

三上俊介

Introduction

本稿で述べる内容は、R. Herb による結果 [3] の拡張に
なる。 G を連結実半単純 Lie 群 (中心有限) で
acceptable, かつ compact Cartan 部分群 B を含むとする。それ
ぞれの Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ とし, $\mathfrak{b}_c^*$ を複素化した $\mathfrak{b}$ の dual
space とし

$$\mathcal{L}_B^* = \{ \lambda \in \mathfrak{b}_c^*; \xi_\lambda: B \ni \exp X \rightarrow e^{\lambda(X)} \text{ は } B \text{ の } 1\text{-次元表現を} \\ \text{与える} \}$$

とおく。 ($\sqrt{-1}\mathfrak{b}_c^*$ の lattice に $\mathcal{L}_B^*$ が入る。) 1) $\lambda \in \mathcal{L}_B^*$ を
regular とする。すなわち $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c$ を $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ の複素化とし, ($\mathfrak{g}_c,$
 $\mathfrak{b}_c$) のルート系 α の Weyl 群を W と書くとき, W の任意の元
 w に対して $w\lambda \neq \lambda$ とする。この様な λ に対して Harish-
Chandra による B 上 (正確には B の regular T_0 元全体上)

$$\Delta^b \Theta_\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi_+(B)} \text{sgn}(\alpha) \xi_{\alpha, \lambda} \quad \dots\dots ①$$

と表わされる様は tempered invariant eigendistribution Θ_λ が存在して $(-1)^b e(\lambda) \Theta_\lambda$ が discrete series の指標を与えることば知られてゐる。慣用的な記号を少し説明する。一般に $f \in \mathfrak{g}$ の Cartan 部分環, $(\mathfrak{g}_c, f_c)$ のルート系 Φ の 1 つの positive system Φ^+ に対して Δ^f は

$$\Delta^f(h) = \xi_p(h) \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - \xi_\alpha(h))$$

により定まる H^f (f に対応する G の Cartan 部分群) 上の関数, (但し $p = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ であり, $\mu \in f_c^*$ に対し, その微分表現が f_c 上 μ に一致する様は H_c (H の複素化) の一次元表現と G から G_c への自然同型とを合成した H 上の一次元表現を ξ_μ と表わす。) さらに $W_G(B)$ は "little Weyl group", すなわち, $N_G(B)$ が B の G における normalizer を表わすことにすると, $W_G(B) \cong N_G(B)/B$. (これは自然に W の部分群とみなすことができて, 実際, それは $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{b}_c)$ のコンパクト・ルートに関する reflections から生成される。)

以下では Θ_λ を単独で考察する代わりに, 次の様な和を考える。

$$\Theta_\lambda^* = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) \Theta_{w\lambda}$$

但し, この和の意味をより為に, W の任意の元 w に

対して $\omega\lambda$ が再び $\mathcal{L}_B^*$ に属する様な λ に関してだけ、考
えることにする。この Θ_λ^* のことを *character of averaged*
discrete series と呼ぶことにする。少し付け加えるならば
この Θ_λ^* は 同じ infinitesimal character をもつ discrete series
の characters の和に $\times (-1)^{\frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}_-}$ 相当し、かつまたこれらの表現の
Plancherel formula における寄与分をあらわすことになる。

今 K で B を含む G の極大コンパクト部分群とし、 $\mathfrak{g}$
でその Lie 環、 θ で K に付随した Cartan involution、 $\mathfrak{g} =$
 $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_-$ と Cartan 分解、 $\mathfrak{f}$ が θ -stable な Cartan 部分環、 $H^{\mathfrak{f}} \in$
 $\mathfrak{f}$ に対応する G の Cartan 部分群とする。この様な $H^{\mathfrak{f}}$ 上
 Θ_λ^* の形を explicit に表わすことを考える。R. Herb は [3]
に於て、 $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{L}_c)$ のルート系が成分として古典型の単純ル
ート系しか含まない場合に、 $\Delta^{\mathfrak{f}} \Theta_\lambda^*$ の $H^{\mathfrak{f}}$ (以下 H と記す)
上での explicit な表示を与えている。本稿では、例外型
の単純成分を含む場合についても、R. Herb の与えた表示
式と類似の表示式が成立することを示す。(注: G_2 型に
対しては、R. Herb は [2] に於て、同様の考察を行っ
ている。)

最後に 平井の公式は各 Θ_λ の H 上での表示式を与
えているわけで、その公式を適用することにより、同様

の結果が得られるわけであるが、class II のルート系があるわけだと、平井の公式自体が相当複雑な形になり、本稿で述べる方法にしろ方が、 Θ_λ^* だけについていえば、はるかに直接的かつ簡単である。

§1. 記号を中心に基本的諸性質

$\Delta^f \oplus_\lambda^*$ の H 上での形を表わす為に、記号をいくらか準備する。 f 及び H を前の通りとし、 $H_k = H \cap K$, $H_f = \exp(f_g)$ ($f_g = f \cap g$) とおくと、 $H = H_k \cdot H_f$ (直積) となる。もし G' で G の regular 元全体を表わし、 $H' = H \cap G'$ の元 $h = h_k h_p$ に対し、 h_k を含む H_k の連結成分を H_k^+ とする。一般性を失うことなく、 $H_k^+ \subseteq B$ と仮定できる。そこで

$$\mathfrak{z} = \{ X \in \mathfrak{g} ; \text{Ad}(h)X = X \quad \forall h \in H_k^+ \}$$

とおくと、 $\mathfrak{z}$ は reductive $\mathfrak{r}$ 部分環で、 $\mathfrak{z}, f$ を含む。それらはいずれも $\mathfrak{z}$ の Cartan 部分環になる。 $\mathfrak{g}_c$ においては、2つの Cartan 部分環 $\mathfrak{z}_c$ と f_c は conjugate である。すなわち $\text{Ad}(y)\mathfrak{z}_c = f_c$ となる様な元 y が G_c からとれる。以後、それらを fix し、 $\mathfrak{z}_c^*$ の元 λ に対して $f_c \ni X \rightarrow \lambda(\text{Ad}(y^{-1})H)$ により定まる f_c^* の元を λ と書くことにする。また $(\mathfrak{z}_c, \mathfrak{z}_c)$ のルート系を Φ , $\Phi^+ = \{ \alpha \in \Phi ; \forall \alpha(\log h_p) > 0 \}$

とおく。 h は regular 元であることより、 Φ^+ は Φ の 1 つの positive system を定める。(注意すべきは、 Φ^+ は h のとり方に依存して定まることである。)

このとき Harish-Chandra [1] の結果より、

$$\Delta^f(H)_\lambda^* = |W_G(B)| \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) c(w\lambda; \Phi^+) \xi_{w, \lambda} \quad \text{--- ②}$$

とある定数 $c(w\lambda; \Phi^+)$ が存在する。ここで $|W_G(B)|$ は群 $W_G(B)$ の位数を表わし、 $\xi_{w, \lambda}$ は次の式により定まる H の 1 つの指標である。すなわち、 $h = h_k h_p$ に対して

$$\xi_{w, \lambda}(h) = \xi_{w, \lambda}(h_k) \exp(\chi(w\lambda)(\log h_p)).$$

以下の節でこれらの定数 $c(w\lambda; \Phi^+)$ の具体的な形を述べる。その為にも、 $(H)_\lambda^*$ の定義等により知られる $c(\lambda; \Phi^+)$ について成り立つ諸性質を以下に列挙する。

1° symmetry の条件より U -系 Φ についての Weyl 群 $W(\Phi)$ (W -部分群に属する) の任意の元 s に対して

$$c(s\lambda; s\Phi^+) = c(\lambda; \Phi^+).$$

2° $(H)_\lambda$ が必ずしも tempered 分布であることより、 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \in \Phi^+$ の fundamental system とし、 $\lambda_j \in \mathbb{Z}^*$ と $\langle \lambda_j, \alpha_i \rangle = \delta_{ij}$ とする様にとることを、 $\forall j$ に対して、 $\langle \lambda, \lambda_j \rangle > 0$ とする。 $c(\lambda; \Phi^+) = 0$ 。

3°) $\alpha \in \Phi^+$ simple root to L , $\alpha_0 = \frac{1}{2}\alpha$ とおくと, α_0 は (f_c, f_c) の real root となる. $\tau = \tau_{\alpha_0}$ に対応する Cayley 変換

$$V_{\alpha_0} = \exp(-\sqrt{-1}\pi/\alpha \operatorname{ad}(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}))$$

($X_{\alpha_0}, X_{-\alpha_0}$ は適当に normalize された, τ に属する $\alpha_0, -\alpha_0$ に対応する $n-1, n+1, n$) を用いて, $f^0 = V_{\alpha_0}(f_c) \cap \mathfrak{g}$ とおく. この時, f^0 は $\mathfrak{g}$ の (また $\mathfrak{g}$ の) θ -stable 正 Cartan 部分環に属し, f^0 に対応する Cartan 部分群を H^0 と書く. H に対して $H'(R) = \{R \in H; (g_c, f_c) \text{ の 任意の real root } \alpha \text{ に対して, } \xi_\alpha(R) \neq 1\}$

とおき, $H''(R)$ を同様に定義する. $H'(R)$ 及び $H''(R)$ の適当な連結成分の開包の相対する境界上での "境界条件" により, 次の等式が得られる.

$$c(\lambda; \Phi^+) + c(s_\alpha \lambda; \Phi^+) = 2c(\lambda; \Phi_0^+).$$

但し, $\Phi_0^+ = \{\beta \in \Phi; \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$ であり, $\Phi_0^+ = \Phi_0 \cap \Phi^+$ である.

4°) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_0^*$ であり, すべて $\alpha \in \Phi^+$ に対して, $\langle \lambda_1, \alpha \rangle$ と $\langle \lambda_2, \alpha \rangle$ の符号が同じであれば, $c(\lambda_1; \Phi^+) = c(\lambda_2; \Phi^+)$.

5°) Φ が既約である場合, $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_r$ とその単純成分への分解とすると,

$$c(\lambda; \Phi^+) = \prod_{i=1}^r c(\lambda; \Phi_i^+)$$

が成り立つ。但し、 $\Phi^+ = \Phi \cap \Phi^+$ 。

§2. $c(\lambda; \Phi^+)$ の表示式

前§の§1の性質より、 Φ が単純ルート系の場合にのみ $c(\lambda; \Phi^+)$ の形がわかる。そこで Φ が class I のルート系の場合と class II のルート系の場合に分けて、 $c(\lambda; \Phi^+)$ の形を与える。

Case 1: Φ が class I ($A_n, D_{2n}, E_6, E_7, G_2$ 型) の場合。

$$c(\lambda; \Phi^+) = \sum_{\sigma \in S} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^l c_i(\sigma^{-1}\lambda)_i \quad \dots \quad (1)$$

記号の説明をする。 Φ^+ の standard maximal positive orthogonal system $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ とする。すなわち α_1 は Φ^+ の最大ルート、とし、 α_2 以下は次の様に帰納的に構成する： $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ が決まれば、 α_i とし、 $\Phi^{(i)} = \{\alpha \in \Phi; \langle \alpha, \alpha_j \rangle = 0 \quad j=1, \dots, i-1\}$ のどれかの既約成分の最大ルート。明らかに集合 F は Φ^+ にけいし、 τ -一意的に定まる。そこでルート系 Φ の Weyl 群 $W(\Phi)$ の部分集合 $S' = \{s \in W(\Phi); s\alpha_i > 0 \quad i=1, 2, \dots, l\}$ に次の同値関係を導入する。

$$s_1, s_2 \in S' \text{ に対して } s_1 \sim s_2 \iff s_1 F = s_2 F$$

一般に $sF = \{s\alpha_1, s\alpha_2, \dots, s\alpha_l\}$ とする。この同値関係の下で、 S は S' の 1 つの完全代表系とする。更に $c_i(X)$ は $X > 0$ のとき 0、 $X < 0$ のとき 2 をとる関数で、 $(\sigma^{-1}\lambda)_i =$

$(\sigma^{-1}\lambda)(\alpha_i)$ のことである。

Case 2: Φ の class II (B_n, C_n, F_4 型) の場合

Φ^+ の standard maximal positive orthogonal ordered system Σ (B_n, F_4 型の場合には strongly orthogonal Σ と α (換言すれば、長 n のルート α の最も多 n の α), C_n 型の場合は、短 n のルート α の最も多 n の α) $E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とおく。"standard" の定義 ([4] を参照のこと) をここで述べる代わりに、各ルート系をユークリッド空間の正交直交系 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を使、 Σ の様に実現するとする。それぞれ α の型の場合に E の形をかくておくことにする。(order は $e_1, e_2, \dots, e_n$ の順の辞書式順序に与える。)

$$B_n \text{ 型: } \Phi = \{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n); \pm e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

$$\Phi^+ = \{ e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n); e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

とす。 $E = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, \dots, e_{2m-1} + e_{2m}, e_{2m-1} - e_{2m}, [e_n])$ 。
(但し $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$ で、最後の項は n が奇数のときだけあり得る。 C_n 型の場合と同様である。)

$$C_n \text{ 型: } \Phi = \{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n); \pm 2e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

$$\Phi^+ = \{ e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n); 2e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

とす。 $E = (e_1 + e_2, e_1 - e_2, \dots, e_{2m-1} + e_{2m}, e_{2m-1} - e_{2m}, [2e_n])$

$$F_4 \text{ 型: } \Phi = \left\{ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq 4), \pm e_i \ (1 \leq i \leq 4), \right. \\ \left. (\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)/2 \right\}$$

$$\Phi^+ = \{ e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq 4), \ e_i \ (1 \leq i \leq 4), \ (e_i \pm e_j \pm e_k \pm e_l)/2 \}$$

$$a \in E, \ E = \{ e_1 + e_2, \ e_1 - e_2, \ e_3 + e_4, \ e_3 - e_4 \}.$$

$$\tau = \tau, \ S = \left\{ \sigma \in W(\Phi); \begin{array}{l} \sigma(\alpha_i) > 0 \text{ or } \sigma(\alpha_{2i-1}) > \sigma(\alpha_i) \\ (1 \leq i \leq m), \ \sigma(\alpha_1) > \sigma(\alpha_2) > \dots > \sigma(\alpha_{2m-1}) \end{array} \right\}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} c(\lambda; \Phi^+) &= \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^m c_2((\sigma^{-1}\lambda)_i') \quad (n=2m) \\ &= \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^m c_2((\sigma^{-1}\lambda)_i') \cdot c_1((\sigma^{-1}\lambda)_m) \\ &\quad (n=2m+1) \quad \text{--- (4)} \end{aligned}$$

と表わされる。但し $c_2(X, Y)$ は $0 > X > Y$ または $0 > -Y > X$ のとき、値の4, その他 X, Y に対しては値が0となる様后関数であり、 $(\sigma^{-1}\lambda)_i' = ((\sigma^{-1}\lambda)(\alpha_{2i-1}), (\sigma^{-1}\lambda)(\alpha_{2i})) \in \mathbb{R}^2$ を表わす。

R. Herb は [37] に於て、Case 1, 2 にも古典型 $\mathfrak{g}$ のルート系だけをとり扱って、その中で S のあたえられた $c(\lambda; \Phi^+)$ の表示式が n 次対称群の適当な部分集合を用いて与えられているが、一般の単純ルート系を包含するために、上の様后形に修正したわけである。

§ 3. 例

Case 2 の場合、この様后関数 $c_2(X, Y)$ があらわれることは、一番 rank の低い $\mathfrak{g} = \operatorname{Sp}(2, \mathbb{R})$ の場合を考察すれば

いて十分である。 $\mathfrak{g}$ の split Cartan 部分環 $\mathfrak{h} = \{ X = \text{diag}(t_1, t_2, -t_1 - t_2); t_i \in \mathbb{R} \}$, $\mathfrak{h}$ に対応する Cartan 部分群 H の 1 を含む連結成分 $H_0 = \{ h = \text{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, e^{-t_1}, e^{-t_2}); t_i \in \mathbb{R} \}$ と $\Delta^{\pm} \oplus_{\lambda}^{\pm} \subset H_0$ 上に考えよう。この場合、 G の compact Cartan 部分群 B は

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & & -\sin \theta_1 & \\ & \cos \theta_2 & & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 & & \cos \theta_1 & \\ & \sin \theta_2 & & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \right\}$$

と取り、 $\mathcal{L}_B^*$ の元 λ は、 2 つの整数 l_1, l_2 を用いて、

$$\xi_{\lambda}(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^2 \sqrt{-1} l_i \theta_i\right)$$

により parametrize される。このとき $\lambda = (l_1, l_2)$ と表わすことにする。位数 2 の群 $W_G(B)$ の 1 を除いた元 w_k に対し $w_k \lambda = (l_1, l_2)$ であり、 $\text{sgn}(w_k) \oplus_{w_k \lambda}^{\pm} = \oplus_{\lambda}^{\pm}$ であることより、 $\oplus_{w \lambda} (w \in W)$ の交代和を考えた場合は $\lambda = (l_1, l_2)$ で、特に $l_1 > l_2 > 0$ と仮定しても、一般性を失わない。 $\mathfrak{h}_0 \ni h = \text{diag}(e^{t_1}, e^{t_2}, e^{-t_1}, e^{-t_2})$; $t_1 > t_2 > 0$ に対しては $\beta = \mathfrak{g}$ と取り、従って $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ 。また $\Phi \in \mathfrak{h}_0$ である Φ の positive system とする。 $\nu_i = \pm 1$ に対して $(\nu_1 l_1, \nu_2 l_2)$ と表わされる $\mathcal{L}_B^*$ の元 λ_{ν} と書き、 $w \lambda = \lambda_{\nu}$ である場合は $\text{sgn}(w) = \nu_1 \nu_2$ であることを注意して、

$$\Delta^f \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) \Theta_{w\lambda} = 2 \sum_{\nu_1, \nu_2} \nu_1 \nu_2 \Delta^f \Theta_{\lambda_{\nu_1 \nu_2}}$$

と取らる。 f_c と ℓ_c を結びつけた γ をうまく選ぶ (適当な Cayley 変換の積の形) と、 $w\lambda = (l_1', l_2')$ となる

$$\xi_{w, \lambda}(h) = \exp\left(\sum_{i=1}^2 t_i l_i'\right)$$

と取らる。

他方、平井の [5] に示した結果より、

$$\Delta^f \Theta_{\lambda_{\nu_1 \nu_2}}(h) = \nu_1 \nu_2 \det \begin{pmatrix} -e^{-t_1 l_1'} & -e^{-t_1 l_2'} \\ -e^{-t_2 l_1'} & -\nu_1 \nu_2 (e^{-t_1 l_1' + t_2 l_2'} + e^{t_1 l_2'}) \end{pmatrix}$$

であるから、この式を (5) に代入すると、

$$\frac{1}{2} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) \Delta^f \Theta_{w\lambda}(h) = -4 (e^{-l_2 t_1 - l_1 t_2} + e^{-l_1 t_1 + l_2 t_2})$$

と取らる。 $w_1 \lambda = (-l_2, -l_1)$, $w_2 \lambda = (-l_1, l_2)$ と取らる様 Weyl 群の元 w_1, w_2 を選ぶ (それぞれは唯一つ定まる) と、 $\operatorname{sgn}(w_1) = \operatorname{sgn}(w_2) = -1$ 故に

$$c(w\lambda; \Phi^+) = \begin{cases} 4 & w = w_1 \text{ 又は } w_2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と取らる。 さらに $E = (\alpha_1, \alpha_2)$ ($\alpha_1(X) = t_1 + t_2$, $\alpha_2(X) = t_1 - t_2$) より $w\lambda = (l_1', l_2')$ ならば、 $(w\lambda)_1 = (l_1' + l_2', l_1' - l_2')$ 。 ところで c_2 は前 §2 の様に与えらる。

$$w = w_1 \text{ 又は } w_2 \iff c_2((w\lambda)_1) = 4$$

が示され、 $S=11$ であることとあわせて、 $c(\lambda; \Phi^+)$ の explicit expression の c を用いて §2 の様に表わされることがわかる。

5c 証明の方針

ルート系 Φ の rank が 1 または 2 の場合、すなわち A_1 型、 B_2 型、 G_2 型のいずれの場合も $c(\lambda; \Phi^+)$ の §2 に示した形で与えられることは、すでに知られている。(B_2 型については §3 のベタ様平井 [5] の結果より、また G_2 型の場合は R. Herb [2] により。)

一般の rank のルート系に対しては、rank に関する帰納法により証明する。 $\lambda \in L_{\Phi}^*$ に対して Φ の class I の class II に依りて、③ または ④ の右辺で定義される関数 $P(\lambda; \Phi^+)$ とおくとき、次の 2 つの補題が基本的役割を果たす。

Lemma 1 $\lambda \in L_{\Phi}^*$ が すべて $\alpha \in \Phi^+$ に対して $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ であれば、 $c(\lambda; \Phi^+) = P(\lambda; \Phi^+) = 0$ ⑤

Lemma 2 rank n の n より小さいルートのルートを Φ に対して、 $c = P$ が成立すると仮定する。 Φ は rank n の単純ルート系、 $\alpha \in \Phi$ の 1 つの単純ルートとすると、

$$P(\lambda; \Phi^+) + P(s_0 \lambda; \Phi^+) = 2c(\lambda; \Phi_0^+) \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。但し $\Phi_0 = \{ \beta \in \Phi, : \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \}$ であり、 $\Phi^+ = \Phi_0 \cap \Phi^+$, s_0 は α に対する reflection を表わす。

この2つの補題を繰り返して用いることにより、 P_B^* の任意の regular 正元 λ に対して、 $P(\lambda; \Phi^+) = c(\lambda; \Phi^+)$ が成立することになる。すなわち、先ず dominant の regular 正元 $\lambda \in P_B^*$ に対して、§1の2), 及び Lemma 1 より、 $P(\lambda; \Phi^+) = c(\lambda; \Phi^+)$ 。

次に Lemma 2 より、 $P(\lambda; \Phi^+) + P(s_0 \lambda; \Phi^+) = 2c(\lambda; \Phi_0^+)$ 他方 §1の3) より $c(\lambda; \Phi^+) + c(s_0 \lambda; \Phi^+) = 2c(\lambda; \Phi_0^+)$ 。従って $P(s_0 \lambda; \Phi^+) = c(s_0 \lambda; \Phi^+)$ 。この操作を繰り返すと、 $W(\Phi)$ の任意の元 w に対し、 $P(w\lambda; \Phi^+) = c(w\lambda; \Phi^+)$ 。さらに §1の4) より W の任意の元 w に対し $P(w\lambda; \Phi^+) = c(w\lambda; \Phi^+)$ が成立することになる。

(Lemma 2 の証明の為に)

R. Herb は [3] に於いて、 Φ が古典型 のとき、

$$P(\lambda; \Phi^+) + P(s_0 \lambda; \Phi^+) = 2P(\lambda; \Phi_0^+) \quad \dots \textcircled{2}$$

を示した。(但し、 Φ_0 が既約でないとき (A₁型が単純成分としてあらわれる)、§1の5) に準じて、 $P(\lambda; \Phi_0^+)$ を定義しておく。) とこの際、 Φ が古典型 となる条件は本質

的である。Lemma 1 については、 Φ^+ の fundamental system に対
 応して定まる fundamental weights $\in \omega_i$ とするとき、 λ が
 dominant ならば、 $\langle \lambda, \omega_i \rangle > 0$ が成立することより証明で
 きる。Lemma 2 については、 Φ が E_7, E_8, F_4 型の場合にても
 ⑦が成立することを示せばよい。class I の場合は、 E_7, E_8 を
 含めて、一般的に⑦が成立することの証明できる。class II
 の場合には、 Φ が F_4 型の場合には Φ は B_3 型もしくは C_3 型に
 なり、各単純ルートの毎に⑦が成立すること示すべ、あこ
 して Φ が古典型であることより、帰納法の仮定が適用でき
 て（あわせて Herb の結果が利用できて）、Lemma 2 も証明
 できる。（これらの証明の細かい点については、
 preprint [6] がありますので参照して下さい。）

文 献

1. Harish-Chandra ; Discrete series for semisimple Lie
groups I, Acta Math. 113 (1965) 241-318
2. R Herb ; Character formulas for discrete series on
semisimple Lie groups, Nagoya Math. J. 64 (1976) 47-61
3. R. Herb ; Characters of averaged discrete series for
semisimple real Lie groups, Pacific J. Math. 80 (1979)

. 169 - 177

4. T. Hirai; The characters of the discrete series for
semisimple Lie groups, preprint.
5. T. Hirai; Explicit form of the characters of discrete
series representations of semisimple Lie groups,
In: Proceeding of Symposia in Pure Mathematics 26
281 - 287 (Amer. Math. Soc. 1974)
6. S. Mikami; On the characters of the averaged discrete
series representations of semisimple Lie groups,
preprint.