Evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity

阿部　友紀

（上智大・理工）

目的

１のベキ根における A 型アフィン量子代数の表現に、evaluation 表現と呼ばれるものが二種類ある。それらの Drinfel'd 多項式を求めることや、Schnizer 加群を用いて具体的に構成することが今回の目的である。また、この二種類の表現が同型になる条件についても議論したい。

The purpose of this talk is to compute the Drinfel'd polynomials of the two types evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity and construct those representations as the submodule of evaluation Schnizer modules. Moreover, we discuss the necessary and sufficient condition for which the two types evaluation representations are isomorphic.

1　１のベキ根でない量子代数の表現論と evaluation 表現

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の階数 n の有限次元単純リー代数とし、$U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$) をその量子代数 (resp. ループ量子代数) とする。q が１のベキ根でない場合、$U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の表現論は、$\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の表現論と、ほぼ同じであることが知られている。すなわち、(**1** 型) 有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群と呼ばれる加群になり、その同値類全体と $\mathbb{Z}_+^n$ (resp. $\mathbb{C}_0[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在する。(ただし、$\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{C}_0[t] := \{P \in \mathbb{C}[t] \mid P(0) \neq 0$ かつ P の最高次の係数は $1\}$)。ループ量子代数の有限次元加群の話は [4] 等に書かれている。今、$\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ (resp. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_0[t]^n$) に対応する加群を $V_q(\lambda)$ (resp. $\widetilde{V}_q(\mathbf{P})$) と書くことにする。$\widetilde{V}_q(\mathbf{P})$ の多項式 $\mathbf{P}$ は、「Drinfel'd 多項式」と呼ばれている。

$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の場合、任意の零でない複素数 $\mathbf{a}$ に対して、２種類の代数準同型 $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm} : U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ が存在する事が知られている ([8] 及び [3] 参照)。これらの準同型を使うことにより、$V_q(\lambda)$ を $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群とみなすことができる。それらを $V_q(\lambda)$ の「evaluation 表現」と呼び、$V_q(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書く。この時、$U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群の分類定理により、$V_q(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ に対応する Drinfel'd 多項式が存在する。そのような Drinfel'd 多項式は、Chari-Pressley らによって具体的に求められている ([3] 参照)。そこで我々は、１のベキ根における evaluation 表現について議論したい。

2　１のベキ根における量子代数の表現論 (制限型)

l を 3 以上の奇整数とし、ε を１の原始 l 乗根とする。１のベキ根における量子代数には、通常の量子代数とは別に、Lusztig によって定義された「制限型」(もしくは「Lusztig 型」) と呼ばれる量子代数が存在する ([9] 参照)。制限型量子代数 (resp. 制限型ループ量子代数) を、

$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) と書く。また、区別をつけるために、通常の量子代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$, $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$ は「非制限型」（もしくは「De Concini-Kac 型」）と呼ばれている（[7] 参照）。

$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) は、「スモール量子代数」と呼ばれる部分代数 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) を持つことが知られている。さらに、$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群は、スモール量子代数 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群と、普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群とを合わせたような構造をしているということも知られている（[9] (resp. [5]) 参照）。$U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の構造ははよく知られているため、有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の理論は、実質的に有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の理論とみなすことができる。

q が 1 のベキ根でない場合と同様に、(**1** 型) 有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群になることが知られている。さらに、その同値類全体と $\mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbb{C}_l[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在することが [9] (resp. [5]) 等で紹介されている（ただし、$\mathbb{Z}_l := \{0, 1, \cdots l-1\}$, $\mathbb{C}_l[t] := \{P \in \mathbb{C}_0[t] \mid$ 任意の零でない複素数 c に対して、$(1-ct^l)$ で P を割れない$\}$)。$\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_l[t]^n$) に対応する $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群を $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ (resp. $\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathbf{P})$) と書くことにする。

3　1のベキ根における量子代数の表現論（非制限型）

制限型とは異なり、非制限型量子代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群は、最高ウエイト加群とも最低ウエイト加群とも限らず、制限型の時のような分類定理も成立しない（[7], [2] 参照）。有限次元 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ 加群（既約とは限らない）の例として、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ の場合、「極大巡回表現」と呼ばれる複数の複素パラメーターを含むような表現が存在することが知られている（[6] 参照）。特に、この表現は、基底に対する生成元の作用が完全に記述されている。同様に、任意の $\mathfrak{g}$ に対しても、「Schnizer 加群」と呼ばれる極大巡回表現と似たような性質を持つ加群が存在することが知られている（[11], [12] 参照）。この加群もまた、基底に対する生成元の作用が完全に記述されている。

しかし、$U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の中でも、「ベキ零加群」と呼ばれるものに関しては、すべて最高ウエイト加群となることが知られている。実は、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) は、$U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) のある両側イデアル I_ε (resp. $\widetilde{I}_\varepsilon$) による商代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})/I_\varepsilon$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})/\widetilde{I}_\varepsilon$) と、代数として同型になることが知られている。ベキ零加群とは、I_ε (resp. $\widetilde{I}_\varepsilon$) が零で作用するような $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群のことである。よって、制限型の理論より、(**1** 型) 有限次元既約ベキ零 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群になり、それらの同値類全体と $\mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbb{C}_l[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在することが分かる。

4　1のベキ根における量子代数の evaluation 表現

§1 で挙げた evaluation 準同型は $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ にも存在し、それにより $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現を定義することができる。それらを $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書くことにする。この時 [3] と同様の方法で、これらの Drinfel'd 多項式を求めることができる。

定理 1. $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^\times$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ に対応する *Drinfel'd* 多項式 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a}}^{\pm} = (P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm})_{i=1}^n \in \mathbb{C}_l[t]^n$ は以下で与えられる。$P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm} \neq 1$ である i に対し、

$$P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm} = \prod_{k=1}^{\lambda_i} (t - \boldsymbol{a}^{-1} \varepsilon^{\lambda_i - 2k + 1 \pm \lambda[i]}) \quad (\text{ただし、}\lambda[i] := \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k - \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k + i).$$

また、次のような命題も得ることができた。

命題 1. $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_+}^{+}$ と $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_-}^{-}$ とが同型になる必要十分条件は、任意の $i \in supp(\lambda)$ に対し、$\boldsymbol{a}_+ = \boldsymbol{a}_- \varepsilon^{2\lambda[i]}$ が成立することである（ただし、$supp(\lambda) := \{1 \leq i \leq n \,|\, \lambda_i \neq 0\}$）。

この命題は、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^+_{\mathbf{a}_+}$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^-_{\mathbf{a}_-}$ との Drinfel'd 多項式を見比べることによって得られる。

q が 1 のベキ根でない場合、$\#(\mathrm{supp}(\lambda)) > 1$ なら $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^+_{\mathbf{a}_+}$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^-_{\mathbf{a}_-}$ とが同型になるような $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ と $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ は存在しない。しかし、q が 1 のベキ根の場合、$\#(\mathrm{supp}(\lambda)) > 1$ であっても、そのような $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$, $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ が存在することが、次の命題から分かる。

命題 2. *$\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$ $(\lambda \neq 0)$, $\boldsymbol{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とし、$supp(\lambda) = \{i_1, \cdots, i_m\}$ （ただし、$(i_1 < \cdots < i_m)$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)^+_{\boldsymbol{a}_+}$ と $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)^-_{\boldsymbol{a}_-}$ とが同型になる必要十分条件は、以下の (a) と (b) を満たすことである。*

(a) 任意の $2 \leq r \leq m$ に対して

$$\lambda_{i_r} \equiv (-1)^{r-1}\lambda_{i_1} + (-1)^r i_1 - i_r + 2\sum_{k=2}^{r-1}(-1)^{r-1+k} i_k \not\equiv 0 \quad (mod\ l).$$

(b)

$$\boldsymbol{a}_+ = \begin{cases} \boldsymbol{a}_- \varepsilon^{2\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} i_k} & if\ m\ is\ odd, \\ \boldsymbol{a}_- \varepsilon^{2(\lambda_{i_1} + \sum_{k=2}^m (-1)^k i_k)} & if\ m\ is\ even. \end{cases}$$

5 Schnizer 加群と evaluation 表現

§4 の命題 1 は、Drinfel'd 多項式の理論を使わずとも証明することができる。それは、§3 で紹介した Schnizer 加群を利用する方法である。$U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ に対しても、evaluation 準同型は存在し、それを利用することにより、Shnizer 加群の evaluation 表現を考えることが出来る。一方、我々は以前、Schnizer 加群のパラメーターを特殊化することにより、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 加群 $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ を Schnizer 加群の部分加群として具体的に実現できるということを発見した（[1] 及び [10] 参照）。この結果を利用することにより、我々は $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現 $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^\pm_{\mathbf{a}}$ を、Schnizer 加群の evaluation の部分加群として具体的に構成することができた。それを用い、Drinfel'd 多項式の理論を使わず、直接的な方法で命題 1 を得られるということが分かった。

以下、その方法を示す。そのために、まず記号を定め、（パラメーターが特殊化された）Schnizer 加群の evaluation 表現を紹介する。

$I := \{1, 2, \cdots, n\}$, $\quad \widetilde{I} := I \sqcup \{0\}$, $\quad [r]_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon^r - \varepsilon^{-r}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}$ $(r \in \mathbb{Z})$: 量子整数、

$\{E_i, F_i, K_j \mid i \in \widetilde{I}, j \in I\}$: $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の生成元、

$N := \dfrac{1}{2}n(n+1)$: $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の正ルートの個数、

V_N: l^N 次元複素ベクトル空間、 $\quad \{v(m) \in V_N \mid m = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{Z}_l^N\}$: V_N の基底、

（任意の $m \in \mathbb{Z}_l^N, m' \in \mathbb{Z}^N$ に対し、$v(m + lm') := v(m)$ とする。）

$\epsilon_{i,j}$: (i,j) 成分のみ 1 で他は 0 である $\mathbb{Z}_l^N$ の元、

$\alpha_{i,j} := \displaystyle\sum_{k=j+1}^{i} \epsilon_{k-1,n-i+k} - \sum_{k=j}^{i} \epsilon_{k,n-i+k} \quad (1 \leq j \leq i \leq n)$,

$R_s := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in I^n \mid r_1^s \geq \cdots \geq r_{s-1}^s \geq r_s^s < r_{s+1}^s < \cdots < r_n^s\}$,

$R_s^F := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \mid$ 任意の $k \in I$ に対し、$k \leq r_k^s \leq n\}$,

$R_s^E := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \mid$ 任意の $k \in I$ に対し、$1 \leq r_k^s \leq k\}$,

$R^F := \displaystyle\bigsqcup_{s=1}^n R_s^F, \quad R^E := \bigsqcup_{s=1}^n R_s^E.$

定理 2. 任意の $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}_l^n$ と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^\times$ に対して、次のような代数準同型 $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}:=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(\lambda):U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})\longrightarrow End(V_N)$ が存在する*:*

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(E_i)(v(m))=\sum_{j=1}^{i}[m_{j-1,n-i+j}-m_{j,n-i+j}]_\varepsilon v(m+\alpha_{i,j}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(F_i)(v(m))=\sum_{j=i}^{n}[\sum_{k=i-1}^{j-1}(m_{i,k}-m_{i-1,k})+\sum_{k=i}^{j}(m_{i,k}-m_{i+1,k})-\lambda_i]_\varepsilon v(m+\epsilon_{i,j}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(K_i)(v(m))=\varepsilon^{\sum_{k=i-1}^{n}m_{i-1,k}-2\sum_{k=i}^{n}m_{i,k}+\sum_{k=i+1}^{n}m_{i+1,k}+\lambda_i}v(m),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(E_0)(v(m))=\boldsymbol{a}\sum_{r^s\in R^F}(-1)^{s+n}\varepsilon^{\pm(C(m,r^s)-\lambda[s])+n}$$

$$[-m_{s-1,s-1}+m_{s,s}-\lambda_s]_\varepsilon v(m+\sum_{k=1}^{n}\epsilon_{k,r_k^s}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(F_0)(v(m))=\boldsymbol{a}^{-1}\sum_{r^s\in R^E}(-1)^s\varepsilon^{\pm(D(m,r^s)-s+n+1)-n}[m_{1,n-s+1}]_\varepsilon v(m+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,r_k^s}),$$

($i\in I,\ m=(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{Z}_l^N$*)*。ただし、

$$C(m,r^s):=m_{s-1,s-1}+\sum_{k=1}^{s}\sum_{p=r_k^s+1}^{r_{k-1}^s}(m_{k-1,p-1}-m_{k,p}),$$

$$D(m,r^s):=-m_{n,n}+\sum_{k=1}^{n-s+1}m_{1,k}-\sum_{k=s+1}^{n}(m_{r_k^s-1,n-k+r_k^s}-m_{r_k^s,n-k+r_k^s}).$$

今、$U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 表現 $(\widetilde{\mathrm{ev}}_{\mathbf{a}}^{\pm}(\lambda),V_N)$ に対応する $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群を $V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書き、$v(0)$ によって生成される $V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ の $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 部分加群を $L_\varepsilon^{\mathrm{nil}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書く。この時、$v(0)$ は $L_\varepsilon^{\mathrm{nil}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ の最高ウエイトベクトルになる。また、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ を §4 で紹介した $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現とすると、以下の定理が得られる。

定理 3. *(a)* $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ はベキ零 $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群になる。

(b) ベキ零 $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群 $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ を $U_\varepsilon^{fin}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群とみなしたとき（*§3* 参照)、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ は $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ と、$U_\varepsilon^{fin}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群として同型になる。

この定理 2 と定理 3 を用いることにより、命題 1 を Drinfel'd 多項式の理論を使わずに証明することが出来る。以下、その概要を示す。

命題 1 の別証. $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a}_\pm\in\mathbb{C}^\times$ とする。今、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_+}^{+}\cong L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_-}^{-}$ と仮定し、ϕ をその同型写像とすると、原始ベクトルの一意性（*[10], [1]* 参照）により、ϕ はスカラー写像であることが分かる。よって、任意の $m\in\mathbb{Z}_l^N$ に対して $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(E_0)(v(m))=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(E_0)(v(m))$ となることが分かる。特に、互いの $v(0)$ における作用を見比べることにより、$\boldsymbol{a}_+=\boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\lambda[i]}$ $(i\in supp(\lambda))$ を得る。

逆に、今、$\boldsymbol{a}_+=\boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\lambda[i]}$ $(i\in supp(\lambda))$ と仮定する。$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_\pm}^{\pm}$ の定義より、任意の $i\in I$ に対して（$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ 上)、$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(E_i)=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(E_i)$, $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(F_i)=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(F_i)$, $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(K_i)=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(K_i)$ となるので、$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(E_0)=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(E_0)$ 及び $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(F_0)=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(F_0)$ を示せばよい。このことは、以下のようにして示すことが出来る。

まず、仮定より $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(E_0)(v(0))=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(E_0)(v(0))$ ということが分かる。一方、$v(0)$ が最高ベクトルであることと既約性より、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ は $\{F_{i_1}\cdots F_{i_r}v(0)\,|\,i_1,\cdots i_r\in I, r\in\mathbb{Z}_+\}$ という形のベクトルによって生成されている。$i\neq 0$ であれば $E_0F_i=F_iE_0$ なので、$v(0)$ への作用が等しければ、$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_+}^{+}(E_0)$ と $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}_-}^{-}(E_0)$ とは $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ 上で等しくなる。

同様に、最低ウエイトベクトルを利用することにより、F_0 の場合を示すことが出来る。今、$\mathbb{Z}_l^N$ の元 $m^\lambda = (m^\lambda_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ を次のように定義する：

$$m^\lambda_{i,j} \equiv \sum_{k=1}^{i} \lambda_{j-k+1} \quad (mod\ l).$$

この時、$v(m_\lambda)$ は $L^{nil}_\varepsilon(\lambda)$ の最低ウエイトベクトルとなり、仮定より $\widetilde{ev}^+_{\boldsymbol{a}_+}(F_0)(v(m^\lambda)) = \widetilde{ev}^-_{\boldsymbol{a}_-}(F_0)(v(m^\lambda))$ となることが分かる。よって、E_0 の場合と同様の理由により、$L^{nil}_\varepsilon(\lambda)$ 上で $\widetilde{ev}^+_{\boldsymbol{a}_+}(F_0) = \widetilde{ev}^-_{\boldsymbol{a}_-}(F_0)$ となることが分かる。 □

References

[1] Abe, Y., Nakashima, T. (2004). Nilpotent representations of classical quantum groups at roots of unity. arXiv: math.QA/0411401.

[2] Beck, J., Kac, V.G. (1994). Finite-dimensional representations of quantum algebras. Comm. Math. Phys. 165(1):193-199.

[3] Chari, V., Pressley, A. (1994). Small representations of quantum affine algebras. Lett. Math. Phys. 30:131-145.

[4] Chari, V., Pressley, A. (1995). Quantum affine algebras and their representations. Amer. Math. Soc. vol.16:59-78.

[5] Chari, V., Pressley, A. (1997). Quantum algebras at roots of unity. J. Amer. Math. Soc. vol 1:280-328.

[6] Date, E., Jimbo, M., Miki, K., Miwa, T. (1991). Cyclic Representations of $U_q(sl(n+1,\mathbb{C}))$ at $q^N = 1$. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 27:366-437.

[7] De Concini, C., Kac, V.G. (1990). Actes du Colloque en I'honneur de Jacques Diximier, edited by A.Connes, M Duflo, A. Joseph and R.Rentschler (Prog. Math. Birkhauser.), vol 92:471-506.

[8] Jimbo, M. (1986). A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Heck algebra and Yang-Baxter equation. Lett. Math. Phys. 11: 247-252.

[9] Lusztig, G. (1989). Modular representations and quantum groups. Contemp. Math 82:59-77.

[10] Nakashima, T. (2002). Irreducible modules of finite dimensional quantum algebras of type A at roots of unity. J.Math.Phys. vol.43, No.4:2000-2014.

[11] Schnizer, W.A. (1993). Roots of unity: Representations for symplectic and orthogonal quantum groups. J.Math. Phys. 34:4340-4363.

[12] Schnizer, W.A. (1994) Roots of unity: Representations of Quantum Group. Commun. Math. Phys. 163:293-306.