Morita theory in Poisson Geometry

廣田祐士
慶應義塾大学大学院理工学研究科
Yuji HIROTA
Keio Uhiversity

Abstract. Morita equivalent which arose in pure algebra was introduced to C^*-algebras by Rieffel , and was applied to Poisson Geometry by Xu. It is the idea which indicates equivalent categories. In my talk, I want to give some results obtained from applying it to twisted Poisson manifolds glancing through the Xu's studies.

1 導入

1.1 Poisson 多様体

C^∞-級多様体 P 上の関数環 $C^\infty(P)$ に Leibnitz 則

$$\{f,\, gh\} = \{f,\, g\}h + g\{f,\, h\}$$

を満たすLie 括弧積 $\{\bullet, \bullet\}$ が定義されているとき, 括弧積 $\{\bullet, \bullet\}$ を**Poisson 括弧**, $(C^\infty, \{\bullet, \bullet\})$ を P 上の**Poisson 構造**といい, P を **Poisson 多様体**と呼ぶ.
上記の関係式から Poisson 多様体 P には $\{f, g\} = \pi(df, dg)$ であるような二重ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ が存在することがわかる. また, Poisson 括弧 $\{\bullet, \bullet\}$ に関する Jacobi 恒等式は $[\pi, \pi]_{SN} = 0$ と同値である. したがって, Poisson 多様体を定義するのに関数環の言葉で始める代わりに $[\pi, \pi]_{SN} = 0$ を満たす二重ベクトル場 π を用いる方法もある. ここで $[\bullet, \bullet]_{SN}$ は Schouten-Nijenhuis 括弧と呼ばれるもので, $\Gamma(\wedge^2 TM)$ で定義される演算である.

1.2 閉３形式で twist された Poisson 構造

滑らかな多様体 M 上で定義された 2 ベクトル $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ と閉 3 形式 $\phi \in \Omega^3(M)$ が関係式

$$\frac{1}{2}[\pi, \pi]_{SN} = \wedge^3 \pi^{\#}(\phi)$$

を満たすとき, (M, π, ϕ) を **ϕ-twisted Poisson 多様体**とよぶ. もともとこの概念は位相的シグマ模型の研究に端を発し, WZW-Poisson 構造ともよばれている. また, M 上に $d\omega + \phi = 0$ を満たす 3 形式 ϕ と非退化な 2 形式 ω があるとき, (M, ω, ϕ) を ϕ-twisted symplectic 多様体という. 通常の Poisson 多様体は, twisted-Poisson 多様体の特殊なケース $(\phi = 0)$ と見做せる.

Twisted-Poisson 多様体は, Dirac 幾何学の枠組みで捉え直すことも可能である. いま, M に閉 3 形式 ϕ が与えられているとした上でベクトルバンドル $E_\phi = TM \bigoplus T^*M$ 上の切断全体につぎのような operation を定める.

1. $\langle (X, \xi), (Y, \eta) \rangle := \xi(Y) + \eta(X) \ \in C^\infty(M)$
2. $[\![(X, \xi), (Y, \eta)]\!] := ([X, Y],\ \mathcal{L}_X \eta + i_Y d\xi + i_{X \wedge Y} \phi) \ \in \Gamma(E_\phi)$

もし, 2 ベクトル π の誘導する部分バンドル $L_\pi \subset TM \bigoplus T^*M$ が $[\![\bullet, \bullet]\!]$ に関して閉じており, なおかつ rank L_π が M の次元と等しく, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ を L_π に制限したところで 0 であるならば (M, π, ϕ) は Twisted-Poisson 多様体となる.

さて, 通常の Poisson 多様体の余接バンドルには Poisson 構造から誘導される Lie algebroid の構造が入り, Poisson 多様体によってはそれはある特殊な亜群と対応することが知られている. これと同様に, Twisted-Poisson 多様体 (すべてではない) にも亜群の対応物がある. それが Twisted symplectic 亜群と呼ばれるものである.

2 Lie 亜群が成す圏

Twisted symplectic 亜群の森田同値について述べる前に, いささかの準備を要する. C^∞ 級多様体 X から Lie 亜群 $G_1 \rightrightarrows G_0$ の対象空間 G_0 へ

の写像 $J : X \to G_0$ に対して,

1. $J(g \cdot x) = t(g)$ (t は target map)
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$
3. $\varepsilon(J(x)) = x$ (ε は identity section)

をみたす写像 $G * X = \{ (g, x) \mid s(g) = J(x) \} \to X$ が与えられたとき, $G_1 \rightrightarrows G_0$ の X への左作用といい, $J : X \to G_0$ を運動量写像とよぶ. ここで s は source map を表わす. Lie 亜群の左作用のうちで最も簡単な例は, target map を運動量写像とする亜群の積である. X への右作用も同様に定義される. また, X に Lie 亜群 $G_1 \to G_0, H_1 \rightrightarrows H_0$ がそれぞれ左右から可換に作用しているとき X を**G-H bibundle**といい, 記号で $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$ と書く. そして G-H bibundle X において, 右 (左) 作用に関する運動量写像 $J : X \to H_0\,(G_0)$ の各ファイバー $J^{-1}(p)\,(\forall p \in H_0\,(G_0))$ に $G\,(H)$ が推移的かつ自由に作用しているとき, X を**left (right) principal bibundle**とよぶ.

さて, 右作用がそれぞれ固有な left principal bibundle $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$, $H \rightarrowtail Y \leftarrowtail K$ に対するファイバー積 $X \times_{H_0} Y$ には $(x, y) \mapsto (xh, h^{-1}y)$ により H の右作用が定義される. この作用による商空間 $X \otimes_H Y$ には $\tilde{\rho} : X \otimes_H Y \to G_0$, $[x, y] \mapsto \rho(x)$, $\tilde{\tau} : X \otimes_H Y \to K_0$, $[x, y] \mapsto \tau(y)$ を運動量写像とし, $g \cdot [x, y] = [gx, y]$, $[x, y] \cdot k = [x, yk]$ をそれぞれ左作用, 右作用とする G-K bibundle の構造が入る. ここで ρ, τ はそれぞれ X の 左 G-作用, および Y の 右 K-作用に関する運動量写像である.

Lie 亜群全体は, それら亜群を対象とし, left principal bibundle の同型類を射とする圏 **LG** となる. なお, 二つの G-H bibundle X, Y が同型であるとは, X と Y の間に亜群の作用と運動量写像に関して可換となるような微分同相写像が存在するときをいう. このとき射の合成は先述の $\otimes$ で与えられ, 恒等射は, source map, target map をそれぞれ運動量写像に持ち, 亜群の積を作用とする bibundle $G \rightarrowtail G \leftarrowtail G$ である. もし, Lie 亜群 $G_1 \rightrightarrows G_0, H_1 \rightrightarrows H_0$ の間に left principal かつ right principal であるような bibundle が存在するとき, それらの Lie 亜群は**森田同値**であるという. 言い換えれば Lie 亜群の森田同値とは, 圏 **LG** において同型な対象を指す.

3 Twisted symplectic 亜群の森田同値

Lie 亜群 $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ に対し, $\Gamma_k := \Gamma \times_{(s,t)} \cdots \times_{(s,t)} \Gamma$ (k 回の積) とおき,

$$\partial_i(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k) = \begin{cases} (\gamma_2, \cdots, \gamma_k) & i = 0 \text{ のとき} \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_k) & 0 < i < k \text{ のとき} \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_{k-1}) & i = k \text{ のとき} \end{cases}$$

により $\partial_i : \Gamma_k \to \Gamma_{k-1}$ を定義する. $\partial : \Omega^q(\Gamma_k) \to \Omega^q(\Gamma_{k+1})$ を $(k+1)$-個の $\partial_i\,(0 \leqq i \leqq k)$ を引き戻した交代和とすれば, $(\Omega^q(\Gamma_p), d, \partial)$ は二重複体を成す. ここで d は通常の外微分 $d : \Omega^q(\Gamma_k) \to \Omega^{q+1}(\Gamma_k)$ である. 亜群 $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ で, それが誘導する全複体において $\omega + \phi$ が 3-cocycle となるような非退化な 2 次形式 $\omega \in \Omega^2(\Gamma_1)$ と 3 次形式 $\phi \in \Omega^3(\Gamma_0)$ が存在するとき, $(\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0, \omega, \phi)$ を Twisted symplectic 亜群という.

いま, Twisted symplectic 亜群 $(G_1 \rightrightarrows G_0, \omega_G, \phi_G), (H_1 \rightrightarrows H_0, \omega_H, \phi_H)$ に対して, 以下の条件を満たす C^∞ 級多様体 X と $J_G : X \to G_0$, $J_H : X \to H_0$ および非退化な 2 次形式 $\omega_X \in \Omega^2(X)$ が存在するとき, X を**Hamiltonian *G*-*H* bimodule** という.

1. X は G-H bibundle $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$ である.
2. $d\omega_X = J_G\phi_G - J_H\phi_H$
3. 亜群 $G \times \overline{H}$ の作用により誘導される graph が $\omega_G \oplus (-\omega_H) \oplus \omega_X \oplus (-\omega_X)$ に関して Lagrangian となる.

但し, 上で云うところの $G \times \overline{H}$ の作用は, $s(g) = J_1(x), s(h) = J_2(x)$ を満たす全ての x, g, h に対して $(g, h) \cdot x := gxh^{-1}$ で与えられる. 二つの Twisted symplectic 亜群 $(G_1 \rightrightarrows G_0, \omega_G, \phi_G)$, $(H_1 \rightrightarrows H_0, \omega_H, \phi_H)$ が森田同値であるとは, bibundle として right principal かつ left principal な Hamiltonian G-H bimodule X が存在するときをいう. Twisted symplectic 亜群の森田同値もまた, 圏 **TwSG** の言葉で解釈することができる. ここで **TwSG** は Twisted symplectic 亜群が形成する圏である.

4 Integrable Twisted Poisson 多様体の場合

twisted Poisson 多様体 M に対して適当な亜群が存在し, M の余接バンドルがその亜群から導かれる Lie algebroid と同型となるとき M を**integrable** とよぶ. integrable な twisted Poisson 多様体と twisted symplectic 亜群の間には 1 対 1 の対応がつくことが知られている. 以上のことを踏まえて, integrable な twisted Poisson 多様体の間にも森田同値の概念を導入することができる.

参考文献

[1] Bursztyn,H., Weinstein,A. "*Poisson geometry and Morita equivalence*",math.SG/0402347.

[2] A.Cannas da Silva, Weinstein,A. "*Geometric Models for Noncommutative Algebras*", Berkeley Math.Lect.Notes **10**. Amer.Math.Soc.1999

[3] Landsman, N. P. "*Quantized reduction as a tensor product*", In: *Quantization of Singular Symplectic Quotients*, Birkhäuser, Basel, 2001, 137-180.

[4] P.$\tilde{S}$evera, Weinstein,A. "*Poisson geometry with 3-form background*", In: *Noncommutative Geometry and String Theory. Progr. Theoret.Phys.Suppl.***144**,2001,145-154.

[5] Xu,P. "*Morita equivalence of Poisson manifolds*", Comm. Math. Phys. **142**, 1991,493-509

[6] Xu,P. "*Morita equivalent symplectic groupoids*", In: *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems(Berkeley, CA, 1989)*, Springer,New York,1991,291-311.