THE ARONSON ESTIMATES FOR THE FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE PERTURBED HEAT EQUATIONS

YASUNORI MAEKAWA[1]

ここでは次の輸送項つきの熱方程式について考える。

$$\partial_t \omega - \Delta \omega + (u, \nabla)\omega = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで $\omega = \omega(t,x)$ はスカラー値の未知関数であり、$u = u(t,x) = (u^1(t,x), \cdots, u^n(t,x))$ は与えられたベクトル値関数である。また、$\partial_t\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t},\ \Delta\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2},\ (u,\nabla)\omega = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ である。輸送項の u に対しては次の条件をつける。

(u の仮定)

$u \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ であり、

$$\nabla \cdot u = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} ||u(t,\cdot)||_\infty = M < \infty. \tag{3}$$

ここで、$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x_i},\ ||u(t,\cdot)||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(t,x)|$ である。上の条件について少し解説しておこう。正数 $k > 0$ にたいして、スケール変換 $\omega_k(t,x) := k^n\omega(k^2t, kx),\ u_k(t,x) := ku(k^2t,kx)$ を考える。もし、ω が方程式 (1) を満たすならば、ω_k は (1) で u を u_k におきかえた方程式を満たす。さらに、上の条件はこのスケール変換に対して不変である事に注意する。つまり、u が条件 (2), (3) を満たすならば、u_k も $\nabla \cdot u_k = 0$, $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}||u_k(t,\cdot)||_\infty = M$ を満たす。ここで上の定数 M が k によらないことに注意する。つまり、上の二つの条件は方程式に対して不変なスケール変換に対し、不変な条件と言える。このようなスケール変換不変性は経験的に重要である事が知られていて、例えば非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式や、Navier-Stokes 方程式に rotation を作用させて得られる渦度方程式などにおいて上のような条件や評価がしばしば現れる。とくに方程式 (1) は二次元渦度方程式の線形化方程式として見なせることを付け加えておく。

今回述べる結果は方程式 (1) の基本解に対する Aronson 評価とよばれる各点評価についてである。主結果を正確に述べるためにいくつかの定

[1]Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo, 060-0810, Japan.
E-mail: yasunori@math.sci.hokudai.ac.jp

義を述べる。ここでは方程式 (1) の初期値問題の解として対応する積分方程式の解を考える。

(定義１)
$s \geq 0,\ \omega_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。関数 $\omega \in C((s,\infty);L^1(\mathbb{R}^n))$ が初期値問題

$$(H_s) \qquad \begin{cases} \partial_t \omega - \Delta\omega + (u,\nabla)\omega = 0,\ t > s,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \omega(s,x) = \omega_s(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の mild solution であるとは、ω が積分方程式

$$\omega(t) = e^{(t-s)\Delta}\omega_s - \int_s^t \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} u(\tau)\omega(\tau)d\tau,\ t > s \tag{4}$$

を満たすことをいう。ここで、$e^{t\Delta}$ は熱半群であり、熱核

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{5}$$

を用いて

$$e^{t\Delta} f = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y) f(y) dy \tag{6}$$

と表される作用素である。

(定義２)
$s_0 \geq 0,\ A_{s_0} := \{(t,s,x,y); x,y \in \mathbb{R}^n, t > s \geq s_0\}$ とする。関数 $\Gamma_u(t,x;s,y)$ が方程式 (1) の A_{s_0} 上の基本解であるとは、Γ_u が A_{s_0} 上の関数で $\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_u(t,x;s,y)|dx,\ \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_u(t,x;s,y)|dy < \infty$ を満たし、さらに

$$\omega(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_u(t,x;s,y)\omega_s(y)dy \tag{7}$$

が初期値問題 (H_s) の mild solution であることをいう。

輸送項の u が恒等的に 0 であるとき、基本解は熱核 $G_{t-s}(x-y)$ である。なお、条件 (2), (3) のもとでの積分方程式の解、および基本解の存在と一意性については、$s > 0$ のときは容易であるが、$s = 0$ のときは輸送項の u の時刻 0 における特異性によってこれまで未知であった ([4] 参照)。しかし、今回述べる結果を応用することで証明することができる。

さて、この基本解はどのような形状をしているのだろうか。あるいは、どのような振舞いをするのだろうか。とくに熱核 ($u = 0$ のときの基本解) との対応が重要である。これについて次のような上からの各点評価が知られている。

$s_0 > 0$ とする。A_{s_0} 上の基本解 Γ_u に対して、M と n にのみ依存するある定数 C_1, C_2 が存在し、

$$\Gamma_u(t,x;s,y) \leq \frac{C_1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} e^{-C_2\frac{|x-y|^2}{t-s}} \tag{8}$$

が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > s \geq s_0$ に対して成り立つ。ここで C_1, C_2 は s_0 にも依存しない定数である。

この評価は基本解 Γ_u が $u = 0$ のときの基本解である熱核 type の関数で評価できることを示している。この結果は E.A.Carlen and M.Loss [2] および S.Matsui and S.Tokuno [5] によって得られている。基本解は正値であることが知られているが、実は、この上からの評価のように、熱核 type の関数で下からも評価することができる。これが今回述べる主結果である。

(主結果)
$s_0 > 0$ とする。A_{s_0} 上の基本解 Γ_u に対して、M と n にのみ依存するある定数 C_3, C_4 が存在し、

$$\Gamma_u(t, x; s, y) \geq \frac{C_3}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \exp(-C_4 \frac{|x-y|^2}{t-s}) \tag{9}$$

が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > s \geq s_0$ に対して成り立つ。ここで C_3, C_4 は s_0 にも依存しない定数である。

これら熱核 type の関数による上からと下からの各点評価は Aronson 評価と呼ばれており、古典的な結果としては D.G.Aronson [1] による発散形２階放物型線形偏微分作用素

$$\partial_t - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i a_{i,j}(t, x) \partial_j \tag{10}$$

の基本解に対する各点評価が知られている。評価の定数 $C_1, \cdots, C_4$ が時間によらないときは global な Aronson 評価と呼ばれている。この global な Aronson 評価は H.Osada [7] によって次のような、より一般の発散形２階放物型線形偏微分作用素の場合にも示されている。

$$\begin{cases} \partial_t - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i a_{ij}(t, x) \partial_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(t, x) \partial_i \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i b_i = 0 \\ b_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j c_{ij}(t, x). \end{cases} \tag{11}$$

ここで、$(a_{ij})_{i,j}$ は一様楕円条件を満たし、さらに c_{ij} は (時間と空間両方について) 有界な関数とする。なお、今回我々の考える作用素は輸送項が必ずしも上のような仮定を満たさないことに注意する。

この global な Aronson 評価を示す上で、輸送項の u に対するスケール変換不変なノルムの条件 (3) は本質的である。これを見るために次の簡単な例を考えてみる。

(例)
$n = 1,\ \alpha \in (0, 1)$ とし、$K \in \mathbb{R}$ とする。今、$u(t, x) = (1-\alpha)t^{-\alpha}K$ とすると、条件 (3) を満たすのは $\alpha = \frac{1}{2}$ のときだけである。簡単な計算に

より、関数

$$\frac{1}{\{4\pi(t-s)\}^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{(x-y-t^{1-\alpha}K)^2}{4(t-s)})$$

は対応する方程式の基本解であることがわかる。この具体的な表現から、global な Aronson 評価が成り立つのは $\alpha=\frac{1}{2}$ のときに限ることが容易にわかる。なお、(11) の作用素もまた、(3) と本質的に同様なスケール変換不変なノルムの条件を満たすことを付け加えておく。

u に対する divergence free の条件 (2) もまた、方程式が

$$\partial_t\omega-\nabla\cdot(\nabla\omega-u\omega)=0$$

となり、発散形の構造を持つという点で重要であり、Aronson 評価の証明でも用いられる。

さて、global な Aronson 評価は解の挙動をコントロールできるといった点で有効であるだけでなく、解の正則性を示す上でも重要である。基本解に対する評価をもとに解の正則性を示す方法は J.Nash [6] による先駆的な仕事が知られている。Nash は作用素 (10) の基本解に対し、Aronson 評価のような各点評価ではなく、より rough な評価をもとにその Hölder 連続性を示した。この方法は E.B.Fabes and D.W.Stroock [3] により簡潔にされている。Nash の議論は今回の作用素にも適用でき、主結果の系として、次の定理を得る。

(系 1)

$s_0>0$ とする。Γ_u を A_{s_0} 上の基本解とする。このとき、ある $\beta\in(0,1)$ と定数 $C_5>0$ が存在して、

$$\begin{aligned}(12)\qquad &|\Gamma_u(t_1,x_1;s_1,y_1)-\Gamma_u(t_2,x_2;s_2,y_2)|\\ \le\ &C_5(|x_1-x_2|^\beta+|y_1-y_2|^\beta+|t_1-t_2|^{\frac{\beta}{2}}+|s_1-s_2|^{\frac{\beta}{2}})\end{aligned}$$

が $|t_1-s_1|,|t_2-s_2|\ge d>0$ を満たす任意の $t_1>s_1\ge s_0,\ t_2>s_2\ge s_0,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。ここで、C_5 は M と $d,\ n$ のみに依存する。とくに、C_5 は $s_0>0$ によらないことが重要である。$s_0>0$ のときは基本解の一意存在がわかっているので、上の s に対する Hölder 連続性をもとに、各 t,x,y に対して、関数 $\Gamma_u(t,x;0,y)$ を

$$\Gamma_u(t,x;0,y):=\lim_{s\to0}\Gamma_u(t,x;s,y)\qquad(13)$$

と定義できる。このように定義した $\Gamma_u(t,x;0,y)$ に対し、$\omega_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\omega(t,x):=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_u(t,x;0,y)\omega_0(y)dy$$

とおくと、ω が (H_0) の mild solution となることがわかる。こうして A_0 上の基本解が構成される。さて、基本解の一意性、および初期値問題 (H_0) の mild solution の一意性についてであるが、これも基本解の Hölder 連続性と Aronson 評価から示すことができる。

(系２)

$\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、ω_0 を初期値とする (H_0) の mild solution は一意に存在する。特に、A_0 上の基本解は一意に存在する。

主結果の証明については、鍵となる次の補題を述べるにとどめることにする。

(補題)

次を満たす正数 $\kappa \in (0,1)$ が存在する。

任意の $\theta > 0$ に対し、$\kappa\theta \leq s < t < \theta$ および $|x-y| \leq (t-s)^{\frac{1}{2}}$ を満たす $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\Gamma_u(1+t, x; 1+s, y) \geq \frac{C_0}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \tag{14}$$

が成り立つ。ここで C_0 は $\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{4}}$ ととれる. また、上の κ は $M,\ n$ にのみ依存する。

(補題の証明)

まず、 $\Gamma_u(1+t, x; 1+s, y)$ の満たす次の積分方程式を考える.

$$\begin{aligned} & \Gamma_u(1+t, x; 1+s, y) \\ = \ & G_{t-s}(x-y) \\ - \ & \int_{1+s}^{1+t} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x \cdot G_{1+t-\tau}(x-\xi) u(\tau, \xi) \Gamma_u(\tau, \xi; 1+s, y) d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

先に述べたように [5] と [2] により, すでに $\Gamma_u(t, x; s, y)$ に対する上からの各点評価があることに注意する。特に、彼らの結果から実は $M,\ n$ にのみ依存する定数 C_M が存在して、

$$\Gamma_u(t, x; s, y) \ \leq \ \frac{C_M}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}},\ x, y \in \mathbb{R}^n,\ t > s > 0. \tag{16}$$

が成り立つ。

まず (15) の第二項を評価する. (16) と u の仮定より、

$$
\begin{aligned}
&|\int_{1+s}^{1+t}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_x\cdot G_{1+\theta-\tau}(x-\xi)u(\tau,\xi)\Gamma_u(\tau,\xi;1+s,y)d\xi d\tau| \\
\leq\ &\int_{1+s}^{1+t}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-\xi|}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(1+t-\tau)}}|u(\tau,\xi)|\Gamma_u(\tau,\xi;1+s,y)d\xi d\tau \\
\leq\ &MC_M\int_{1+s}^{1+t}\frac{1}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}(\tau-1-s)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}|x-\xi|e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(1+t-\tau)}}e^{-\frac{|y-\xi|^2}{8\tau-1-s}}d\xi d\tau \\
\leq\ &MC_M\int_{1+s}^{1+t}\frac{C}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}(\tau-1-s)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8(1+t-\tau)}}e^{-\frac{|y-\xi|^2}{8\tau-1-s}}d\xi d\tau \\
\leq\ &\frac{CMC_M}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}}\int_{1+s}^{1+t}\frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}d\tau \\
\leq\ &\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

ここで C は n にのみ依存する定数。よって、$|x-y|\leq(t-s)^{\frac{1}{2}}$ ならば

$$
\begin{aligned}
\Gamma_u(1+t,x;1+s,y)\ &\geq\ \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}-\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&\geq\ \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}}-\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

ここで $K_M:=(8\pi CMC_Me^{\frac{1}{4}})^2$、$\kappa=\frac{K_M}{1+K_M}$ とおく。簡単な計算により、$\kappa\theta\leq s<t\leq\theta$ ならば

$$
\frac{1}{(8\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}}\geq\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}.
$$

よって

$$
\Gamma_u(1+t,x;1+s,y)\geq\frac{1}{(8\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}} \qquad (18)
$$

が $|x-y|\leq(t-s)^{\frac{1}{2}}$ を満たす $x,y\in\mathbb{R}^n$ について成り立つ。(証明終り)

上の補題を用いるとスケール変換、基本解の半群の性質、total mass の保存 $\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_u(t,x;s,y)dx=1$ などの性質を用いて主結果を証明できる。この証明の利点は perturbation よる簡単な議論で下からの各点評価を得ることができるということである。なお、少し議論は複雑になるものの、E.B.Fabes and D.W.Stroock [3] の議論を参考にすることで、H.Osada [7] の結果を包含する、より一般の発散形２階放物型線形偏微分作用素に対しても Aronson 評価を証明できることを付け加えておく。

References

[1] Aronson, D. G. Bounds for fundamental solutions of a parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. **1968**, 73, 890-896.

[2] Carlen, E. A.; Loss, M. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. Duke Math. J. **1996**, 81, 135-157.

[3] Fabes, E. B.; Strook, D. W. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old idea of Nash. Arcj. Rational Mech. Anal. **1986**, 96, 327-338.

[4] Giga, Y.; Giga, M.-H. *Nonlinear Partial Differential Equation, Self-similar solutions and asymptotic behavior*; Kyoritsu: 1999 (in Japanese), English version to be published by Birkhäuser

[5] Matsui, S.; Tokuno, S. Remark on fundamental solutions for vorticity equation of two dimensional Navier-Stokes flows, Hokkaido Math. J. **1997**, 26, 529-539.

[6] Nash, J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. **1958**, 80, 931-954.

[7] Osada, H. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. J. Math. Kyoto Univ. **1987**, 27, 597-619.