

Geometric method in Virtual Knot Theory

Teruhisa KADOKAMI

Osaka City University Advanced Mathematical Institute

kadokami@sci.osaka-cu.ac.jp

Abstract

We explain some geometric methods in Virtual Knot Theory. In 1996, Louis Kauffman introduced Virtual Knot Theory to realize every Gauss code geometrically. Since there has already been many algebraic tools in Knot Theory, they are also applied in Virtual Knot Theory. Though Kauffman introduced that any virtual link is realized as a link diagram on a closed surface, geometric methods have not been developed like algebraic ones. We call the realization *surface realization*. Naoko Kamada and Seiichi Kamada defined *abstract link diagram*, and Scott Carter, Seiichi Kamada and Masahiko Saito showed equivalence relation among surface realizations. They are basic tools to study virtual links geometrically. By using them, we proved non-triviality of Kishino's knot, classified closed 2-string virtual braids completely, defined connected sum of virtual links and proved uniqueness of prime decomposition of a virtual link.

1 Introduction

1996年、Louis Kauffman [9] は、任意の Gauss code を幾何的対象として実現化するものとして、*virtual knot* を提唱した。例えば、Gauss code $(1\ 2\ 1\ 2)$ は通常の knot では実現できない (Figure 1)。当初の Virtual Knot Theory は、既に Knot Theory において代数的道具が充実している事情から、virtual link においても不変量を定義して、分類を試みる研究が進んでいった。現在もその方向の研究は進んでいる。例えば、基本群、Sawollek polynomial [15] (Alexander polynomial のアナロジーと見なせる)、Kauffman bracket polynomial (Jones polynomial と同値) などが定義されている。最近では、Miyazawa polynomial [13]、surface bracket polynomial [2, 3] が定義されている。岸野敏昌 [10] は、

Figure 2 のような virtual knot (*Kishino's knot* と呼ばれている) の基本群、Sawollek polynomial、Kauffman bracket polynomial が自明な knot のそれらと同じであることを発見した。つまり、virtual knot の世界においては、割と簡単なものでも invariant による判定がしにくい場合がある。彼はこの virtual knot の非自明性を、3-parallel 化したものの Kauffman bracket polynomial を計算することにより示した ([11] も参照せよ)。ただこの計算は、手計算でするには大変な労力が必要で、実際 computer の助けを借りている。この事実直に直面すると、次の 2 通りの考えにたどり着く。

- (1) もっといい invariant を開発しないと！
- (2) 幾何的な手法が必要だ！

どちらの考えももっともで、(1) の方向での進展が [2, 3, 13] で、実際 Miyazawa polynomial や surface bracket polynomial によって *Kishino's knot* の非自明性を割と容易に示すことができる。他にその方向では、Manturov 氏の研究も参考になる。我々が今回説明するのは、(2) の方向の進展である。

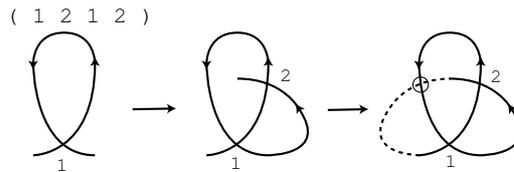


Figure 1: Gauss code (1 2 1 2)

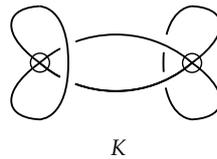


Figure 2: *Kishino's knot*

Kauffman [9] において既に、virtual link diagram を closed surface 上に乗せる手法が紹介されているが、詳しく追求されたとは言えない。我々はこの手法を *surface realization* と呼ぶ。鎌田直子-鎌田聖一 [8] において、*abstract link diagram* が定義されて調べられたのが、この方面の研究の始まりと筆者は見ている。Scott Carter-鎌田聖一-斎藤昌彦 [1] が、*surface realization* 間の

基本変形を明確にしてようやく virtual link を幾何的に研究する地盤が整ったと言える. 我々の成果は、幾何的手法により

- (1) Kishino's knot の非自明性を示したこと ([4]; 次章の Theorem 1)
- (2) virtual link (正確には flat virtual link) の numerical な invariant を定義したこと ([5])
- (3) Greg Kuperberg [12] の手法を援用して、closed 2-string virtual braids を完全に分類したこと ([6]; 次章の Theorem 2)
- (4) やはり Kuperberg [12] の手法を援用して、virtual link の connected sum を定義し、virtual link の prime decomposition の存在と、その一意性を示したこと ([7])

が挙げられる. (2) に関連して、flat virtual link (2 章で定義する) の観点での研究は、Vladimir Turaev [17] でもなされている. (3) は、村井美咲 [14]、辻和典 [16] の結果の一般化である.

2 Virtual link

扱う対象は、向き付けられた n 個の S^1 から S^2 や \mathbb{R}^2 への immersion の像で、3 重以上の点はなく、各 2 重点に Figure 3 のような情報を持たせたものとする. 2 重点は、左から順に *positive*, *negative*, *virtual crossing* といい、positive や negative crossing の上下を無視したものを、*flat crossing* という. *n*-component virtual link diagram とは、2 重点が前 3 者のときをいい、*n*-component flat virtual link diagram とは、後 2 者のときをいう.

Virtual link diagram の間の基本変形を Figure 4 のように定義し、それらの有限列で移り合うときを同値として、その同値類を *virtual link* とする. 必要に応じて向きを考えたり、考えなかったりする.

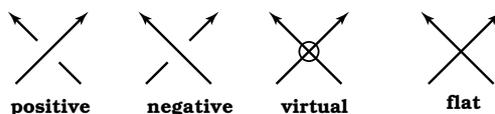


Figure 3: crossings

Virtual link diagram D の近傍を少し変化させることによって、compact surface とその上の diagram の空間対を得る. これを *abstract link diagram*

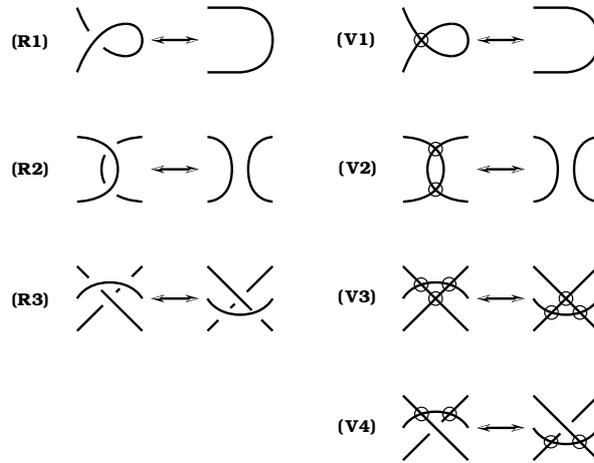


Figure 4: virtual Reidemeister move

[8] といひ、 $(N(\tilde{D}), \tilde{D})$ と表す. $\partial N(\tilde{D})$ を compact surface で埋めて closed surface F としたものを *surface realization* といひ、 (F, \tilde{D}) と表す (Figure 5). virtual link L のあらゆる surface realization の surface の genus の最小値を *supporting genus* といひ、 $sg(L)$ と表す. L が classical link、特に trivial link のとき、 $sg(L) = 0$.

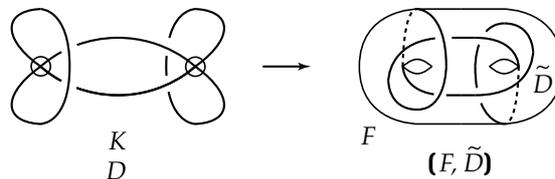


Figure 5: Surface realization (of Kishino's knot, and it is minimal)

これら基本的道具から我々が示した結果を2つ挙げておく.

Theorem 1 ([4]) *Let K be a Kishino's knot. Then $sg(K) = 2$.*

これは Kishino's knot の non-triviality, non-classicality を示している. 我々は flat 化した Kishino's knot の supporting genus が 2 であることを示した. H. A. Dye and L. H. Kauffman [3] では、surface bracket polynomial を計算することにより同じ結果を得ている.

以下の Figure 6 のような braid K_{p_1, \dots, p_n} を *closed 2-string virtual braid* という. ここで、 $n \geq 1, p_i \neq 0 (i = 1, \dots, n)$ を仮定する.

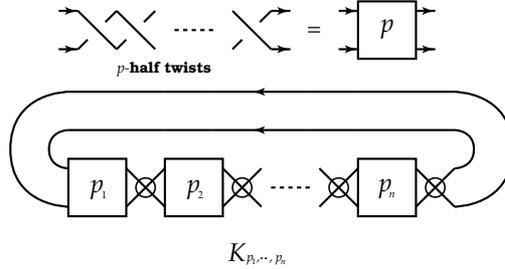


Figure 6: closed 2-string virtual braid

このとき、

Theorem 2 ([6]) *Let K_{p_1, \dots, p_n} and $K_{p'_1, \dots, p'_n}$ be two closed 2-string virtual braids. Then they are equivalent if and only if (1) $n = n'$ and (2) there exists an integer k such that $i' \equiv i + k \pmod{n}$ and $p'_{i'} = p_i (i = 1, \dots, n)$.*

surface bracket polynomial のみでは証明はできない ($n = 1, 2$ では可能だが、 $n = 3$ では無理) が、情報は利用した (例えば、 $n = n'$ や $sg(K_{p_1, \dots, p_n}) = 1$ であること). また、surface realization だけでは足りず、一般に virtual link を、surface と閉区間の直積空間内の link と見なす *space realization* を用いて、3-string braid group のある部分群と関連付けて示した.

今後の展望: virtual link が、surface と閉区間の直積空間内の link と見なせることを利用すると、任意の oriented compact 3-manifold M 内の link を virtual link で記述することができる. M の Heegaard surface の近傍に link を集めることでそれが可能である. ただし、同値関係は Figure 4 以外に生じるのが一般的な状況である. その際、 M の Kauffman bracket skein module の relation を明確にすることが重要になってくる.

References

- [1] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **11** (2002) 311–322.

- [2] H. A. Dye, *Virtual knots undetected by 1 and 2-starnd bracket polynomials*, math.GT/0402308.
- [3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Minimal surface representations of virtual knots and links*, math.GT/0401035, *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005) 509–535.
- [4] T. Kadokami, *Detecting non-triviality of virtual links*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **12** (2003) 781–803.
- [5] ———, *Some numerical invariants of flat virtual links are always realized by reduced diagrams*, preprint.
- [6] ———, *A classification of closed 2-string virtual braids*, preprint.
- [7] ———, *Connected sum and prime decomposition of virtual links*, preprint.
- [8] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **9** (2000) 93–106.
- [9] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, *Europ. J. Combinatorics* **20** (1999) 663–690.
- [10] T. Kishino, *6 kouten ika no kasou musubime no bunrui ni tuite* (in Japanese) (On the classification of virtual knots with crossing number up to six), Master Thesis, Osaka City University (2001) 1–85.
- [11] T. Kishino and S. Satoh, *A note on non-classical virtual knots*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **13** (2004) 845–856.
- [12] G. Kuperberg, *What is a virtual link?*, math.GT/0208039, *Algebr. Geom. Topol.* **3** (2003) 587–591.
- [13] Y. Miyazawa, *Magnetic graphs and an invariant for virtual links*, preprint.
- [14] M. Murai, *virtual crossing 2ko no 2-braid virtual knot no bunrui* (in Japanese) (*Classification of 2-braid virtual knot with two virtual crossings*), Master Thesis, Osaka City University (2002) 1–100.
- [15] J. Sawollek, *On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links*, math.GT/9912173.
- [16] K. Tsuji, *2-braid virtual knots with 3 virtual crossings*, Master Thesis, Osaka City University (2005) 1–40.
- [17] V. G. Turaev, *Virtual strings*, math.GT/0311185, *Ann. Inst. Fourier* **54** (2004) 2455–2525.