多重ゼータ値入門

On multiple zeta values and their relations

九大数理　田中 立志

本アブストラクトにおいて, 多重ゼータ値及びアソシエータの基本事項をまとめておく. 詳細は [AK],[IKZ] 参照.

Definition 1 (多重ゼータ値, multiple zeta value). 正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$(但し $k_1 > 1$) に対して, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ とは以下の級数で定義される：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

Remark 2. $k_1 > 1$ のとき, 右辺の級数は絶対収束する.

Notation 3. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ を (収束) index といい, $\mathrm{wt}.\mathbf{k} := k_1 + \cdots + k_n$ を (index $\mathbf{k}$ の, あるいは多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ の) 重さ (weight), $\mathrm{dp}.\mathbf{k} := n$ を深さ (depth) という. また, 以後多重ゼータ値のことを MZV と略記する.

Remark 4. $\mathrm{dp}.\mathbf{k} = 1$ のとき, MZV は Riemann ゼータ値である. 特に, $\mathrm{wt}.\mathbf{k}$ が偶数であるときの Euler の公式は有名である：

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi i)^{2k}.$$

ここに, B_{2k} はベルヌーイ数である：$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!} = \frac{te^t}{e^t - 1}$.

Definition 5 (MZV space). $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ を,

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbf{Q}, \mathcal{Z}_1 = 0, \mathcal{Z}_k = \sum_{\mathrm{wt}.\mathbf{k} = k} \mathbf{Q} \cdot \zeta(\mathbf{k}) \ (k \geq 2)$$

で定義する. さらに, MZV 全体が生成する $\mathbf{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ とする：$\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k$.

Conjecture 6 (Zagier's dimention conjecture). $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ であろう. 但し, $\{d_k\}$ は $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 3)$ で漸化的に定まる数列.

Theorem 7 (Goncharov, Terasoma). $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

MZV space $\mathcal{Z}$ は, $\mathbf{Q}$-ベクトル空間のみならず, (フィルター, 次数付き) $\mathbf{Q}$-代数となる. そこには, 以下の 2 通りの積構造が入る.
(⊠) **harmonic product** $\cdots$ 定義級数の積に現れる和の範囲の分割からくる積構造.

$$\begin{aligned}\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^p}\right) \cdot \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^q}\right) = \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{n>m>0} + \sum_{m=n>0}\right) \frac{1}{m^p n^q} \\ &= \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q) \quad \text{など.}\end{aligned}$$

（☒）**shuffle product** $\cdots$ MZV には反復積分表示がある. 反復積分の積が反復積分の和で書けるという Ree による一般的な定理があり, それからくる積構造.

$$\zeta(p)\zeta(q)=\sum_{i=0}^{p-1}\begin{pmatrix} n-1+i \\ i \end{pmatrix}\zeta(n+i,m-i)+\sum_{j=0}^{q-1}\begin{pmatrix} m-1+j \\ j \end{pmatrix}\zeta(m+j,n-j) \quad \text{など.}$$

（☒）,（☒）を合わせると, MZV たちの線形関係式が得られる ((finite) double shuffle relation).

上記の $\mathcal{Z}_k$ の ($\mathbf{Q}$ 上の) 次元の上限を与える定理は, MZV たちの間に豊富な線形関係式が成り立つことを示唆している. 以下に知られている関係式の一部を列挙する.

（A）**duality** Index $\mathbf{k}=(a_1+1,\underbrace{1,\dots,1}_{b_1-1},\dots,a_s+1,\underbrace{1,\dots,1}_{b_s-1})$ $(a_i,b_i\geq 1)$ に対して, その双対 index $\mathbf{k}'$ を,

$$\mathbf{k}'=(b_s+1,\underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1},\dots,b_1+1,\underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1})$$

で定める. このとき,

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}')$$

が成り立つ.

（B）**sum formula** $1\leq n\leq k$ なる正の整数 k,n をとる. このとき,

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}.\mathbf{k}=k \\ \mathrm{dp}.\mathbf{k}=n}}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k)$$

が成り立つ.

（C）**Ohno's relation** 互いに双対な収束 index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n),\mathbf{k}'=(k'_1,\dots,k'_{n'})$ と, 任意の整数 $l\geq 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n=l \\ \epsilon_1,\dots,\epsilon_n\geq 0}}\zeta(k_1+\epsilon_1,\dots,k_n+\epsilon_n)=\sum_{\substack{\epsilon'_1+\cdots+\epsilon'_{n'}=l \\ \epsilon'_1,\dots,\epsilon'_{n'}\geq 0}}\zeta(k'_1+\epsilon'_1,\dots,k'_{n'}+\epsilon'_{n'})$$

が成り立つ. Duality 及び sum formula はこの Ohno's relation に含まれている.

（D）**regularized double shuffle relation** MZV たちの間に 2 つの積構造が入ることは述べた. ここではその 2 つの積構造を 2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H}:=\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ 上の積構造として定式化し, そのことばを用いて regularized double shuffle relation とは何かを述べることにする.

Notation 8. $\mathfrak{H}^0:=\mathbf{Q}+x\mathfrak{H}y\subset\mathfrak{H}^1:=\mathbf{Q}+\mathfrak{H}y\subset\mathfrak{H}$ により $\mathfrak{H}^0,\mathfrak{H}^1$ を定義する. また, $z_k:=x^{k-1}y$ とする.

Definition 9. $\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$ を, $\mathbf{Q}$-双線形性及び次の (i), (ii) により定義する：

(i) 任意の $w\in\mathfrak{H}^1$ に対し $w*1=1*w=w$,

(ii) 任意の words w_1,w_2 と正の整数 p,q に対し

$$z_pw_1*z_qw_2=z_p(w_1*z_qw_2)+z_q(z_pw_1*w_2)+z_{p+q}(w_1*w_2).$$

この積 $*$ を ($\mathfrak{H}^1$ 上の) harmonic product という. $\mathfrak{H}^1$ はこの積により可換 $\mathbf{Q}$-代数となる. この $\mathbf{Q}$-代数を記号で $\mathfrak{H}^1_*$ と書く. $\mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}^1_*$ の部分代数となり, これを $\mathfrak{H}^0_*$ と書く.

Definition 10. $\mathfrak{H}$ 上の積 ш を, **Q**-双線形性及び次の (i), (ii) により定義する：
(i) 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対し $w ш 1 = 1 ш w = w$,
(ii) 任意の words w_1, w_2 と $u_i = x$ または $y (i = 1, 2)$ に対し

$$u_1 w_1 ш u_2 w_2 = u_1(w_1 ш u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 ш w_2).$$

この積 ш を ($\mathfrak{H}$ 上の) shuffle product という．$\mathfrak{H}$ はこの積により可換 **Q**-代数となる．この **Q**-代数を記号で $\mathfrak{H}_ш$ と書く．$\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}_ш$ の部分代数となり，これらをそれぞれ $\mathfrak{H}^1_ш, \mathfrak{H}^0_ш$ と書く．

Definition 11 (evaluation map). **Q**-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$ を,

$$Z(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, \dots, k_n) \quad (k_1 > 1, k_2, \dots, k_n \geq 1)$$

で定義する．

Remark 12. Evaluation map Z は 2 つの積 $*$, ш について (ℚ-代数) 準同型になる：

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2), Z(w_1 ш w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

但し, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ である．これらを合わせて finite double shuffle relation なる線形関係式を得る：

$$Z(w_1 ш w_2 - w_1 * w_2) = 0.$$

Proposition 13. (i) **Q**-代数準同型 $Z^* : \mathfrak{H}^1_* \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ で, $Z^*|_{\mathfrak{H}^0_*} = Z, Z^*(y) = T$ なるものが一意的に存在する．
(ii) **Q**-代数準同型 $Z^ш : \mathfrak{H}^1_ш \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ で, $Z^ш|_{\mathfrak{H}^0_ш} = Z, Z^ш(y) = T$ なるものが一意的に存在する．

Theorem 14 (regularized double shuffle relation). 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^1, w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z^ш(w_1 ш w_2 - w_1 * w_2) = 0 \quad (\text{または}, Z^*(w_1 ш w_2 - w_1 * w_2) = 0).$$

Conjecture 15. MZV たちのすべての (**Q** 上の) 線形関係式は regularized double shuffle relation から導かれるであろう．

（E）**derivation relation** $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ の導分 (derivation) なる **Q**-線形写像 ∂_n(すなわち, $\partial_n(ww') = \partial_n(w)w' + w\partial_n(w')$ をみたすもの): $\mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ を,

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y, \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$$

で定義する．

Theorem 16 (derivation relation). 任意の正の整数 $n \geq 1$ と任意の $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z(\partial_n(w_0)) = 0.$$

Derivation relation は duality のもとで Ohno's relation と同値であることが知られている．

次に, Drinfel'd associator を導入する．ここでは簡単のため Le-Murakami [LM] による, その構成的な表示を定義としよう．
ℂ-代数準同型 $g_1 : \mathbb{C}\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を,

$$X \longmapsto X-\xi,\ Y \longmapsto Y-\eta$$

で, $\mathbb{C}$-線形写像 $g_2 : \mathbb{C}[[\xi,\eta]]\langle\langle X,Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ を,

$$\eta^p M \xi^q \longmapsto Y^p M X^q \ (p,q \geq 0, M \text{ は } X,Y \text{ の word})$$

で定義する. また, MZV たちを係数にもつ 2 変数非可換巾級数 $\varphi(X,Y)$ を,

$$\varphi(X,Y) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2,\dots,k_n \geq 1}} (-1)^n \zeta(k_1,\dots,k_n) X^{k_1-1}Y \cdots X^{k_n-1}Y$$

とおく.

Proposition/Definition 17 (Drinfel'd associator). Drinfel'd associator $\Phi(X,Y)$ は,

$$\Phi(X,Y) = g_2 \circ g_1(\varphi(X,Y))$$

で与えられる.

Proposition 18 (associator relation). (i) $\log \Phi(X,Y) \in [\mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}]$.
(ii) $\Phi(X,Y)\Phi(Y,X) = 1$.
(iii) $A+B+C=0$ のとき, $e^{\pi i A}\Phi(C,A)e^{\pi i C}\Phi(B,C)e^{\pi i B}\Phi(A,B) = 1$.
(iv) $\Phi(X_{1,2},X_{2,3})\Phi(X_{3,4},X_{4,5})\Phi(X_{5,1},X_{1,2})\Phi(X_{2,3},X_{3,4})\Phi(X_{4,5},X_{5,1}) = 1$.
ここに, $X_{i,i} = 0, X_{i,j} = X_{j,i}\ (1 \leq i,j \leq 5), \sum_{k=1}^{5} X_{i,k} = 0\ (1 \leq i \leq 5), [X_{i,j}, X_{k,l}] = 0\ (\{i,j\} \cap \{k,l\} = \phi)$. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ は古庄 [F] 参照.

Conjecture 19. MZV たちの間の関係式はすべて associator relation から導かれるであろう.

Definition 20 (formal associator). formal associator $\widehat{\Phi}(X,Y)$ とは,

$$\widehat{\Phi}(X,Y) = \exp_{ш}(-yY) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x,y\}^* \\ W = \mathrm{Cap}(w)}} wW \cdot \exp_{ш}(-xX)$$

で定義される, $\mathfrak{H}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ の元である. ここに, $\{x,y\}^*$ は x と y の word 全体, $\mathrm{Cap}(w)$ は w の大文字化, $\exp_{ш}(-yY)$ は,

$$\exp_{ш}(-yY) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{ш n} \frac{Y^n}{n!}$$

とする.

Proposition 21. (i) $\widehat{\Phi}(X,Y) \in \mathfrak{H}^0\langle\langle X,Y\rangle\rangle$.
(ii) $Z(\widehat{\Phi}(X,Y)) = \Phi(X,Y)$.

Theorem 22 ([T]). Proposition 18 (ii) $\Longleftrightarrow$ MZV の duality.

Question 23. ほかの associator relation $\Longleftrightarrow$ (あるいは $\Longrightarrow$) MZV の ?? .

参考文献

[AK] T. Arakawa and M. Kaneko, 多重ゼータ値および多重 L 値ノート, 立教 SFR 講究録 7, 2005.

[F] H. Furusho, *The multiple zeta values algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol 39. no 4. (2003). 695-720.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D.Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Max-Planck-Institut für Mathematik preprint series 2004-100.

[LM] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. 142(1996), 39-65.

[T] T. Tanaka, *A few applications of shuffle products for p-adic multiple zeta values*, Master's thesis, Kyushu University (2004).