Clifford-Klein 形の幾何について

京都大学数理解析研究所 COE 研究員　吉野太郎

Abstract

ユークリッド空間のタイル張りは (特に 2, 3 次元について) 古くからよく研究されている. 一方, より一般の空間のタイル張りについては, 現在あまり詳しい研究はなされていない. 一般の空間においては, タイル張り不可能な例も存在し, また, タイル張りが可能か否かさえ決定できていない空間も多くある. この講演では一般の空間に対し「タイル張り」を定義し, 種々の空間がタイル張り可能か否かを考察したい.

Tiling of Euclidean space (especially on 2 or 3 dimensional cases) has been studied for a long time. On the other hand, tiling of general spaces has not yet been studied in detail. Among general spaces, some spaces can not been tiled at all. Moreover, on some spaces, we cannot yet determine it is tileable or not. In this talk, we define 'tiling' of general spaces, and consider the tileability of various spaces.

1　問題の定式化

ユークリッド空間のタイル張りの研究の長い歴史に比べると, 一般の空間のそれは未だ日が浅い. 未解決問題も多く残されており, 今後発展する余地がある. 例えば 7 次元複素球面がタイル張り可能と証明されたのは, つい最近 (2005 年) のことである. この講演ではこの分野に関する古典的な結果から最近の結果, そして未解決問題までを見ていきたい.

後述するように, タイル張り可能性の問題はコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題として定式化することができる (問題 1.16). また実際の議論も Clifford-Klein 形の言葉を用いて行うことになる. しかし, まずは直感的に問題を捉えるためにタイル張りの話から始めよう.

1.1　タイル張り

まず, 空間のタイル張りを定義し (定義 1.2), タイル張り可能性の問題を定式化しよう (問題 1.5).

「タイル張り」の一つの定式化として「空間を (一種類の) 同じ形のタイルで規則的に敷き詰める事」と捉えることができる. より一般には二種類以上のタイルを敷き詰める事も考えることができるが, ここでは簡単の為に一種類に限定する. また, タイルを不規則に敷き詰めることも考えられるが, ここでは規則的なもの, つまりタイルの並べ方が群で統率されているものを取り扱う. 即ち, ユークリッド空間のタイル張りを次のように定義する.

定義 1.1. T を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし, 離散群 Γ が $\mathbb{R}^n$ に等長に作用しているとする. (T, Γ) が $\mathbb{R}^n$ の**タイル張り**であるとは, 次が満たされることをいう.

(a) $\mathbb{R}^n = \Gamma \cdot T$.

(b) $T = \gamma(T) \quad \text{or} \quad T \cap \gamma(T) \subset \partial T \qquad (\gamma \in \Gamma)$.

(c) $T \cap \gamma(T) \neq \emptyset$ となる γ は有限個に限る.

(ただし, ∂T は T の境界とする).

$\mathbb{R}^n$ の等長変換全体はユークリッド運動群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ であるから, 上記の離散群 Γ は $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群でなければならない. ここで, $\mathbb{R}^n$ 内の二つのタイルが「同じ形」であることは, $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ で互いに移りあう事と同値である. 換言すればリー群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 内での「同じ形」を定めていると言える.

さて, 上の定義 1.1 を一般化して一般の多様体 M におけるタイル張りを定義しよう. このとき, 多様体 M 内での「同じ形」を定めるため, ユークリッド運動群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の代わりに M に作用するリー群 G を考えることにする (例えば, M の (擬) 等長変換全体や正則変換全体等). すなわち, M 内の二つのタイル (コンパクト集合) は, G の作用で移りあうとき「同じ形」であると考える. このとき, 一般の空間のタイル張りは次のように定義できる.

定義 1.2. リー群 G が多様体 M に可微分に作用しているとする. M のコンパクト集合 T と, G の離散部分群 Γ について, (T, Γ) が (M, G) の**タイル張り**であるとは, 次が満たされることをいう.

(a) $M = \Gamma \cdot T$.

(b) $T = \gamma(T) \quad \text{or} \quad T \cap \gamma(T) \subset \partial T \qquad (\gamma \in \Gamma)$.

(c) $T \cap \gamma(T) \neq \emptyset$ となる γ は有限個に限る.

上の定義において, リー群 G が小さすぎるときは明らかにタイル張りは不可能となる. そこで, 以下では G がある程度大きい事を要請しよう.

定義 1.3. 群 G の集合 X への作用が**推移的**であるとは, X の元 x が存在して, $X = G \cdot x$ と表せることをいう.

定義 1.4. リー群 G が推移的に作用する多様体を G の**等質空間**という.

等質空間においては G の作用が推移的なため「G が小さすぎるためにタイル張りできない」という状況は起きない. しかし, それでもまだタイル張り不可能な例は存在する. そこで, 種々の空間に対し次の問題を考えたい.

問題 1.5. M をリー群 G の等質空間としたとき (M, G) はタイル張り可能か?

これに答えることがこの講演の目的である.

ここで, 等質空間の例を幾つか見ておこう. 例えば, リー群はそれ自身の等質空間である. 特にユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は等質空間である. 同時に, $\mathbb{R}^n$ はリー群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の等質空間ともみなせる. ユークリッド空間の (普通の意味での) タイル張りは, $\mathbb{R}^n$ を $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の等質空間とみなしたときのタイル張りに相当する. 他にも次の空間は等質空間である.

例 1.6. (1) 球面 S^n はリー群 $O(n+1)$ が推移的に作用する. 従って, S^n は $O(n+1)$ の等質空間である.

(2) 複素球面 $S^n_{\mathbb{C}} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}$ は, リー群 $O(n+1, \mathbb{C})$ の等質空間である.

(3) 擬リーマン球面 $X(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \ : \ x_1^2 + \cdots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q+1}^2 = 1\}$ は, リー群 $O(p+1, q)$ の等質空間である.

(4) 複素上半平面 $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0\}$ はリー群 $SL(2, \mathbb{R})$ の等質空間である (一次分数変換として作用する).

ところで, G の任意の等質空間は G の閉部分群 H を用いて商多様体 G/H の形で表すことが出来る. すなわち, 次が成り立つ.

事実 1.7. M を G の等質空間とする. M の点 p を一つ選び H を固定部分群 $H := \{g \in G \ : \ g(p) = p\}$ で定めると同相写像 $G/H \xrightarrow{\sim} M, gH \mapsto g(p)$ を通じて M は商多様体 G/H に微分同相である.

例 1.8. 例 1.6 で挙げた等質空間は, 次のようにして商多様体として表示できる.
(1) $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$ (2) $S^n_{\mathbb{C}} \simeq O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ (3) $X(p, q) \simeq O(p+1, q)/O(p, q)$ (4) $\mathcal{H} \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$

ここまでで等質空間のタイル張り可能性問題を定式化し, 等質空間の例を幾つか見てきた. さて, ここで実際の問題に取り組む前にタイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に定式化し直すことにしよう.

実はタイル張り可能性を考えるうえでは, タイルそのもの (コンパクト集合 T) には殆ど意味がなく, タイルの並べ方 (離散群 Γ) こそが本質的である. タイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に捉え直すことは, 丁度, タイルそのものを忘れ並べ方にのみ注目することに相当する.

1.2 不連続群と Clifford-Klein 形

タイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に捉え直すために, まず**不連続群**を定義する (定義 1.9). そして, これを用いて M のタイル張り可能性を特徴づけよう (事実 1.14).

定義 1.9. 離散群 Γ が多様体 M に固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき Γ を M の**不連続群**という.

定義 1.10. 離散群 Γ の多様体 M への作用が固有不連続あるいは固定点自由であるとは次のように定義される.

(1) 作用が**固有不連続** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M の任意のコンパクト集合 S に対し, $S \cap \gamma(S) \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ は有限個.

(2) 作用が**固定点自由** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M の任意の点 $p \in M$ に対し, $\gamma(p) = p \Rightarrow \gamma = e \quad (\gamma \in \Gamma)$ が成り立つ.

ここで, 不連続群に関する基本的な性質を見ておこう.

事実 1.11. Γ を多様体 M の不連続群とすると, 商空間 $\Gamma\backslash M$ は自然に多様体の構造を持つ. 特に M が単連結の場合には $\Gamma\backslash M$ の普遍被覆多様体は M に, 基本群は Γ に一致する.

事実 1.12. X を多様体とする. X の普遍被覆多様体を $M := \tilde{X}$, 基本群を $\Gamma := \pi_1(X)$ とおく. このとき, Γ は自然に M に作用し, M の不連続群となる. さらに商多様体 $\Gamma\backslash M$ は自然に X と微分同相となる.

即ち, 上の事実を標語的に表すと次の様になる.

$$\boxed{\text{多様体 } X \quad \overset{\text{1:1 に対応する}}{\longleftrightarrow} \quad \text{単連結な多様体 } M \text{ とその不連続群 } \Gamma}$$

X から (M, Γ) を得るには $M = \tilde{X},\ \Gamma := \pi_1(X)$ とおけばよく, (M, Γ) から X を得るには $X = \Gamma\backslash M$ とおけばよい.

例 1.13. トーラス $\mathbb{T}^n$ の普遍被覆多様体, 基本群はそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ となる. 逆に商空間 $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n$ はトーラスとなる.

不連続群の言葉を用いると, 空間のタイル張り可能性は次のように定式化できる.

事実 1.14. G を線形リー群とする. (M, G) がタイル張り可能であることは, G の離散部分群 Γ で M の不連続群となるものが存在し, 商多様体 $\Gamma\backslash M$ がコンパクトとなることが必要十分.

証明の概略. (T, Γ) を (M, G) のタイル張りとする. Γ の適当な有限指数部分群 Γ' でねじれ元を持たないものが取れる. このとき, Γ' は M の不連続群となり, $\Gamma'\backslash M$ はコンパクトとなる. 逆に, M の不連続群 Γ で $\Gamma\backslash M$ がコンパクトとなれば, $\Gamma\backslash M$ の代表系をうまく取り, その閉包を T とすることで, (T, Γ) が (M, G) のタイル張りとなる. ■

最後にタイル張り可能性の問題を Clifford-Klein 形の言葉で言い替えよう.

定義 1.15. G/H を等質空間とする. G の離散部分群 Γ が G/H の不連続群であるとき商多様体 $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の **Clifford-Klein 形**という. 特に $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトな Clifford-Klein 形のとき不連続群 Γ を G/H の**一様格子**という.

従って, 事実 1.14 より, 問題 1.5 は次の問題と同値である.

問題 1.16. 等質空間 G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持つか (一様格子を持つか)?

例 1.13 で見たように, $\mathbb{R}^n$ はコンパクト Clifford-Klein 形 $\mathbb{T}^n$ を持つので, タイル張り可能である. 他の例として複素上半平面 $\mathcal{H} = SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ がタイル張り可能な事を見てみよう (例 1.6, 1.8 の (4) を参照).

例 1.17. 種数 2 以上のコンパクトリーマン面 X の普遍被覆多様体は複素上半平面 $\mathcal{H}$ となる. 換言すれば, $\mathcal{H}$ とその不連続群 Γ を用いて, $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ と表すことができる. 従って複素上半平面 $\mathcal{H}$ はタイル張り可能であり, その不連続群 (タイルの並べ方) は, (本質的に)X の種数 $g\,(\geq 2)$ を決めるごとに定まる.

1.3　線形簡約リー群

この講演では, 等質空間の中でも特に**線形簡約な等質空間**について問題 1.5(問題 1.16) を考察する. そこで, 線形簡約リー群および線形簡約な等質空間について簡単に復習しておこう (なお, ここで取り上げる内容についての詳しい説明は例えば [KO] を参照).

一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群を**線形リー群**という. また $GL(n,\mathbb{C})$ の同型写像

$$\theta : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C}), \qquad g \mapsto (g^*)^{-1}$$

を**カルタン対合**という. 線形リー群 G が θ 不変であり, 連結成分が有限個であるとき G を**線形簡約リー群**という.

例 1.18. 以下のリー群は線形簡約リー群である.

$GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,C)$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(p,q)$, $Spin(p,q)$, $O(n,\mathbb{C})$, $O^*(2n)$, $U^*(2n)$, $Spin(n,\mathbb{C})$.

G を線形簡約リー群とし, θ をカルタン対合としたとき, G の部分集合 K, P を次のように定義する.

$$K := \{g \in G \ : \ \theta(g) = g\}, \qquad P := \{g \in G \ : \ \theta(g) = g^{-1}\}.$$

このとき, K は G の極大コンパクト部分群, P は G の閉部分多様体となる. 例えば $G = GL(n,\mathbb{C})$ のときは, K はユニタリ行列全体 $U(n)$, P はエルミート行列全体となる.

線形簡約リー群 G に対し, P の次元を**非コンパクト次元**といい, 記号 $d(G)$ で表す. すなわち

$$d(G) := \dim P = \dim G - \dim K$$

となる. P 内の極大可換部分群 A を一つ選ぶと, G の任意の元 g は, k_1, $k_2 \in K$ と $a \in A$ によって $g = k_1 a k_2$ と表すことが出来る (表し方は一意ではない). この分解 $G = KAK$ を**カルタン分解**という. また, A の次元を G の**実ランク**といい, 記号 $\mathbb{R}$-rank$G$ で表す. P 内の極大可換部分群は互いに共役なので, その次元は一意に決まる. いくつかの線形簡約リー群について, その非コンパクト次元と実ランクを見ておこう.

G	$GL(n,\mathbb{R})$	$GL(n,\mathbb{C})$	$SO(p,q)$	$SU(p,q)$	$Sp(p,q)$	$Sp(n,\mathbb{R})$
$d(G)$	$\frac{n(n+1)}{2}$	n^2	pq	$2pq$	$4pq$	n^2+n
$\mathbb{R}$-rank$G$	n	n	$\min(p,q)$	$\min(p,q)$	$\min(p,q)$	n

等質空間 $M = G/H$ において, G, H が共に線形簡約リー群であるとき, M を**線形簡約な等質空間**という.

注 1.19. より正確には, 上の意味の線形簡約リー群と同型なリー群もやはり線形簡約リー群という. 例えば, $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ を上の意味での線形簡約リー群としたとき, 適当な $g \in GL(n,\mathbb{C})$ による共役 $G' := gGg^{-1}$ は必ずしも θ 不変ではないが, やはり線形簡約リー群という.

同様に, 上の意味の線形簡約な等質空間と同型な空間も線形簡約な等質空間という.

2　古典的な結果

以降, 種々の等質空間について問題 1.16 (あるいは問題 1.5) を考えていく. まず古典的な結果として, 1960 年代に得られた一様格子を持つ空間と持たない空間を見ていこう (今後「タイル張り」という単語は表に出てこないが, 1.2 節で述べたように空間がタイル張り可能であることは一様格子を持つことと同値である).

2.1　リーマン等質空間

Borel は線形簡約なリーマン等質空間が常に一様格子を持つことを示した ([B]).

定義 2.1. 等質空間 G/H は, H がコンパクトなとき, リーマン等質空間という.

定理 2.2. 線形簡約なリーマン等質空間 G/H は一様格子を持つ.

特に線形簡約リー群自身 $G = G/\{e\}$ は一様格子を持つ．また, リーマン多様体 M にその等長変換全体 $G := I(M)$ が推移的に作用するとき, M はリーマン等質空間となる．そのうち線形簡約なものは以下の例がある．

例 2.3. 次の線形簡約な等質空間 G/H はリーマン等質空間であり, 従って一様格子を持つ．

	G/H
1	$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$
2	$SU^*(2n)/Sp(n)$
3	$SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))$
4	$SO_0(p,q)/SO(p)\times SO(q)$
5	$SO^*(2n)/U(n)$
6	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$
7	$Sp(p,q)/Sp(p)\times SP(q)$
8	$SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$
9	$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$
10	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$

例 1.17 で挙げた複素上半平面 $\mathcal{H} = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ は, 上の表一行目の $n = 2$ の場合に相当する．定理 2.2 において, 一様格子は算術的部分群を用いて構成される．

2.2 Calabi-Markus 現象

次に一様格子を持たない例を見ていこう．Calabi と Markus は擬リーマン球面 $X(n,1) = SO(n+1,1)/SO(n,1)$ の不連続群 Γ が有限群に限ることを証明した ([CM])．特に $X(n,1)$ には一様格子が存在しない．このように, 不連続群が有限群に限られる事を **Calabi-Markus 現象**という．今日では, より一般的に次のような Calabi-Makurs 現象の判定条件が得られている．

定理 2.4. 線形簡約な等質空間 G/H に対して次は同値である．

(i) G/H の不連続群は有限群に限る．

(ii) $\mathbb{R}$-rank$G = \mathbb{R}$-rank$H$.

これより特に擬リーマン球面 $X(p,q)$ は $p \geq q$ ならば不連続群が有限群に限る．その他の例として次の等質空間は一様格子を持たない．

例 2.5. 次の (非コンパクトな) 等質空間 G/H は定理 2.4 の (ii) を満たし, 従って一様格子を持たない ($n = p+q$; $p, q > 0$).

	G/H
1	$Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$
2	$SO^*(4n)/U^*(2n)$
3	$SL(n,\mathbb{C})/SL(n,\mathbb{R})$
4	$Sp(n,n)/Sp(n,\mathbb{C})$
5	$SO(2n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{C})$
6	$GL(n,\mathbb{R})/GL(p,\mathbb{R})\times GL(q,\mathbb{R})$
7	$GL(n,\mathbb{C})/GL(p,\mathbb{C})\times GL(q,\mathbb{C})$
8	$U^*(2n)/U^*(2p)\times U^*(2q)$
9	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(p,\mathbb{C})\times Sp(q,\mathbb{C})$
10	$Sp(n,\mathbb{R})/Sp(p,\mathbb{R})\times Sp(q,\mathbb{R})$
11	$SU(p,q)/SO(p,q)$
12	$Sp(p,q)/SU(p,q)$

3 最近の結果

前の節で, 一様格子を持つ空間 (定理 2.2) と持たない空間 (定理 2.4) に関する古典的な結果を見てきた. この節で扱う結果はこれらの結果の一般化とみなせる.

小林俊行は 1980 年代後半から Clifford-Klein 形の研究を行い, 一様格子を持つ/持たない等質空間の例を多く与えた ([K]). ここでは, その中の主な結果を見ていく. まず必要な言葉を定義しよう.

3.1 固有と相似

等質空間 G/H の不連続群 Γ を考えるうえで, Γ の固有不連続性の判定は重要である. 作用の固有不連続性の判定条件を与えるために「固有」という概念を定義しよう. ここで重要なアイデアは, Γ と H の違いを忘れ G 内で両者を**対等に扱う**点である.

定義 3.1. リー群 G 内の二つの部分集合 $L,\ H$ に対して, 固有と相似を次の様に定義する. また L と H が固有であるとき記号 $L \pitchfork H$, 相似であるとき $L \sim H$ で表す.

(1) L と H が**固有** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意のコンパクト集合 $S \subset G$ に対して $L \cap SHS$ が相対コンパクト (つまり $L \cap SHS$ の閉包がコンパクト).

(2) L と H が**相似** $\overset{\text{def}}{\iff}$ コンパクト集合 $S \subset G$ が存在して $L \subset SHS$ かつ $H \subset SLS$ とできる.

記号 $\pitchfork$ を用いると次のような固有不連続性の判定条件が得られる: リー群 G とその閉部分群 H, 離散部分群 Γ に対して

$$\boxed{\Gamma \pitchfork H \text{ in } G \iff \Gamma \text{ の } G/H \text{ への作用は固有不連続.}}$$

固有と相似に関するその他の性質もまとめておこう. どれも定義から容易に証明できる.

命題 3.2. $L,\ L', H$ をリー群 G の部分集合とすると次が成り立つ.

(1) 関係 $\sim$ は同値関係である.

(2) $L \sim L' \quad \Longrightarrow \quad (L \pitchfork H \Leftrightarrow L' \pitchfork H)$.

(3) $L \pitchfork H \iff H \pitchfork L$.

次の 3.2 節, 3.2 節では「固有」「相似」を用いて, 一様格子の存在問題の一般論を見ていく.

3.2 コンストラクタ

定義 3.3. G/H を線形簡約な等質空間とする. G の簡約部分群 L が次の条件 (a), (b) を満たすとき, L を G/H の**コンストラクタ**という.

(a) $L \pitchfork H$, (b) $L\backslash G/H$ はコンパクト.

定理 3.4. 線形簡約な等質空間 G/H にコンストラクタが存在するならば, G/H には一様格子が存在する.

証明の概略. Borel の結果 (定理 2.2) より線形簡約リー群 L には $\Gamma\backslash L$ がコンパクトとなるような不連続群 $\Gamma \subset L$ が存在する. このとき, $\Gamma \sim L$ であるから, (a) より $\Gamma \pitchfork H$ in G が得られる. さらに, (b) より $L\backslash G/H$ がコンパクトであることから, $\Gamma\backslash G/H$ もコンパクトになり, Γ は G/H の一様格子であることが分かる. ■

この定理から得られる例を見てみよう. まず線形簡約なリーマン等質空間 G/H を考える. このとき, H はコンパクトであるから, 定義 3.3(a) は常に満たされる. 従って, G 自身がコンストラクタとなり, G/H は一様格子を持つことが分かる. これは 2.1 節で述べた結果に他ならない. また, **群多様体** $G/H = (G' \times G')/\mathrm{diag}G'$ も一様格子を持つ. 実際, $L := G' \times \{e\}$ がコンストラクタとなる.

上記のリーマン等質空間や群多様体の他にも, 個々の等質空間 G/H に対しコンストラクタ L を与えることができる. この場合は $\pitchfork$ の対称性から, H が G/L のコンストラクタとなることに注意しよう. 従って一様格子を持つ空間は**二つ同時に**得られる.

例 3.5. 次の等質空間 G/H 及び G/L は一様格子を持つ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

	G/H	G/L
1	$SU(2,2n)/U(1,2n)$	$SU(2,2n)/Sp(1,n)$
2	$SO(2,2n)/SO(1,2n)$	$SO(2,2n)/U(1,n)$
3	$SO(4,4n)/SO(3,4n)$	$SO(4,4n)/Sp(1,n)$
4	$SO(3,4)/SO(1,4)$	$SO(3,4)/G_{2(2)}$
5	$SO(4,4)/SO(1,4)$	$SO(4,4)/Spin(3,4)$
6	$SO(8,8)/SO(7,8)$	$SO(8,8)/Spin(1,8)$
7	$SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$	$SO(8,\mathbb{C})/Spin(1,7)$
8	$SO(8,\mathbb{C})/SO(1,7)$	$SO(8,\mathbb{C})/Spin(7,\mathbb{C})$
9	$SO^*(8)/SO^*(6)$	$SO^*(8)/Spin(1,6)$

(ここで L は G/H のコンストラクタとなり, H は G/L のコンストラクタとなる.)

上の表の 7 行目は冒頭で触れた 7 次元複素球面 $S^7_{\mathbb{C}} = SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$ である.

3.3 オブストラクタ

前節ではコンストラクタの存在から一様格子の存在が従うことを見た. ここでは逆に一様格子の障碍を見ていこう.

定義 3.6. G/H を線形簡約な等質空間とする. G の簡約部分群 L が次の条件 (a), (b) を満たすとき, L を G/H の**オブストラクタ**という.

$$\text{(a) } L \sim H, \qquad \text{(b) } d(L) > d(H).$$

定理 3.7. 線形簡約な等質空間 G/H にオブストラクタが存在するならば, G/H には一様格子が存在しない.

証明の概略. G/H の一様格子 Γ が存在したと仮定する. (b) より G/H は G/L に比べ「より非コンパクト」である. このことから $\Gamma \not\pitchfork L$ が示される. 一方, $\Gamma \pitchfork H$ と (a) より $\Gamma \pitchfork L$ が得られ矛盾が示される. ■

例 3.8. 次の等質空間 G/H には, オブストラクタ L が存在し, 従って一様格子を持たない.

	G/H	L
1	$SL(2n,\mathbb{R})/SO(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{R})$
2	$SU^*(2n)/SO^*(2n)$	$Sp(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
3	$SU(2n,2n)/SO^*(4n)$	$Sp(n,n)$
4	$Sp(2n,\mathbb{R})/U(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{C})$
5	$SO(2n,2n)/SO(2n,\mathbb{C})$	$U(n,n)$
6	$SO^*(2n)/SO^*(2p) \times SO^*(2q)$	$SO^*(2n-2)$
7	$SL(n,\mathbb{C})/SO(n,\mathbb{C})$	$SU(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
8	$SO(n,\mathbb{C})/SO(p,\mathbb{C}) \times SO(q,\mathbb{C})$	$SO(n-1,\mathbb{C})$
9	$SL(2n,\mathbb{C})/SU(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{C})$

但し $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す.

リーマン等質空間に一様格子が存在するという古典的結果は, コンストラクタとして G 自身が選べる事に相当した. 同様に, Calabi-Markus 現象はオブストラクタとして G 自身を選べる事に相当する.

実際, $L = G$ がオブストラクタの条件 (a),(b) を満たしているとすると, 条件 (b) は G/H が非コンパクトであることと同値である. また, 条件 (a) は Calabi-Markus 現象の判定条件 $\mathbb{R}\text{-rank}G = \mathbb{R}\text{-rank}H$ と同値になる. このことは, 次のように確かめられる:

$G = KAK$ とカルタン分解し, $K_H := K \cap H,\ A_H := K \cap H$ とおくと $H = K_H A_H K_H$ は H のカルタン分解を与える. 極大可換リー群 A, A_H は線形空間に同型なリー群であるから, 条件 $\mathbb{R}\text{-rank}G = \mathbb{R}\text{-rank}H$ は条件 $A = A_H$ と同値である. さらに K, K_H がコンパクトな事から, これらは $G \sim H$ と同値である. 即ちオブストラクタの条件 (a) に他ならない.

4 未解決問題

最後に一様格子の存在に関する未解決問題を見て行こう. 次の予想は定理 3.4 の逆が成り立つことを主張する.

予想 4.1. 線形簡約な等質空間 G/H に一様格子が存在するならば, G/H にはコンストラクタが存在する.

仮にこの予想が示されたとすれば, 問題 1.5 に答えることは大幅に易しくなるだろう. しかし, 現時点では予想 4.1 を指示する「状況証拠」が多くあるのみで, 証明を得るには至っていない.

実際, 予想 4.1 を擬リーマン球面 $X(p,q) = O(p+1,q)/O(p,q)$ に適用した次の予想も, 十分性が示されているのみで必要性は未解決である.

予想 4.2 (空間形予想). 等質空間 $X(p,q) = O(p+1,q)/O(p,q)$ が一様格子を持つ必要十分条件は (p,q) が次のリストに含まれることである.

p	$\mathbb{N}$	0	1	3	7
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	8

十分性は次のようにして分かる: p または q が 0 のときは H がコンパクトとなり Borel の結果 (定理 2.2) より一様格子を持つ. また, $p = 1,3,7$ のときは, それぞれ例 3.5 の 2,3,6 行目に相当する.

予想 4.1 を証明するには「一様格子を持つ」という幾何的な仮定から「オブストラクタ L が存在する」という群論的結論を導かなければならず, 証明の難しさの一因となっている. 一方, 次の予想は幾何的な仮定から幾何的な結論を導けばよいため, 証明がより容易かもしれない.

予想 4.3. 線形簡約な等質空間 G/H が一様格子を持つならば, G/H はコンパクト空間上の自明束である.

実は, この予想は予想 4.1 より弱い予想である. 即ち次が成り立つ.

事実 4.4. 線形簡約な等質空間 G/H がコンストラクタをもつならば G/H はコンパクト空間上の自明束である.

予想 4.3 を複素球面 $S^n_{\mathbb{C}} = O(n+1,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{C})$ に適用すると次の様になる.

予想 4.5. 等質空間 $G/H = O(n+1,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{C})$ が一様格子を持つ必要十分条件は $n = 1,3,7$ である.

この予想も十分性は示されているものの必要性は未解決である.

References

[B] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.

[CM] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.

[K] T. Kobayashi, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, In: Lecture Notes of the European School, August 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Math **17**. Academic Press (1996), 99–165.

[KO] T. Kobayashi and T. Oshima, Lie 群と Lie 環 1, 2. 岩波講座 (1999).

[KY] T. Kobayashi and T. Yoshino, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces – revisited.*