力学系と作用素環
Dynamical systems and operator algebras

勝良 健史 (北海道大学大学院理学研究科数学専攻)
Takeshi KATSURA (Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 はじめに

本講演では，力学系及び作用素環の定義，力学系から作用素環を構成する方法を紹介して，この構成方法が二つの分野にとってどう有意義であるかを説明しようと思う．

In this talk, I introduce definitions of dynamical systems and operator algebras, and methods to construct operator algebras from dynamical systems. I also try to explain how useful these constructions are for the two areas.

2 力学系

空間 X と，X から X 自身への写像 α の組 $\Sigma = (X, \alpha)$ を**力学系**（**dynamical system**）と呼ぶ．写像 α は対象とする空間に入っている構造（例えば微分構造など）を保つことが仮定されており，この構造としてどのようなものを考えるかによって様々な種類の力学系のクラスを得ることができる．この講演では，X として位相空間を考える**位相力学系**（**topological dynamical system**）と，X として測度空間を考える**可測力学系**（**measurable dynamical system**）の二つだけを扱う．ここで，位相空間といえば局所コンパクト空間を意味し，測度空間といえば局所化可能測度空間を意味することと約束する．局所化可能（localizable）測度空間とは，有限測度空間の直和と同型な測度空間のことであり，任意の σ-有限測度空間は局所化可能である．力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は，写像 $\alpha\colon X \to X$ が同型写像のとき**可逆**（**invertible**）であるという．

力学系が与えられたとき，それを「基本的」な力学系の合わさったものと考えると便利なことがあるが，この「基本的」な力学系として次がある．

定義 2.1. 可逆な位相力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は自明でない閉 α-不変集合が存在しないとき**極小**（**minimal**）であるという．

可逆な可測力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は自分自身も補集合も測度 0 でない α-不変集合が存在しないとき**エルゴード的**（**ergodic**）であるという．

3　作用素環

この章では作用素環の定義や例などを紹介する．証明等は，例えば [P2, P1] を参照のこと．

3.1　$*$ 環，C^*環，von Neumann 環

定義 3.1. **$*$ 環**（**$*$-algebra**）とは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の環 A であって，下の 3 条件を満たす**対合**（**involution**）と呼ばれる写像 $A \ni x \mapsto x^* \in A$ を持つものである（$x, y \in A$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$）；

1. $(x^*)^* = x$,
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \overline{\alpha} x^* + \overline{\beta} y^*$,
3. $(xy)^* = y^* x^*$.

定義 3.2. **C^*環**（**C^*-algebra**）とは $*$ 環であって，下の 2 条件を満たすノルムで Banach 空間になっているものである；

1. $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$,
2. $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

2 番目の条件は **C^*条件**（**C^*-condition**）と呼ばれている．これらの条件から自動的に $\|x^*\| = \|x\|$ が成り立つことが分かる．

定義 3.3. **von Neumann 環**（**von Neumann algebra**）とは C^*環であって，ある Banach 空間の双対空間になっているものである．

von Neumann 環は W^* 環と呼ばれることもある．上に挙げた C^*環と von Neumann 環の定義は「抽象的」なものであるが，それと同値な「具体的」な定義も存在する．次の節でそれを説明する．

3.2　$B(\mathcal{H})$

$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ の元を $\xi, \eta, \ldots$ で表し，$\mathcal{H}$ の内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle$，ノルムは $\|\cdot\|$ と書く．線形写像 $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は，連続であることと $\sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|$ の値が有限であることが同値であり，このとき T を**有界作用素**（**bounded operator**）という．また，上記の値を T の作用素ノルム，または単にノルムといい $\|T\|$ であらわす．有界作用素全体の集合を $B(\mathcal{H})$ で表す．$B(\mathcal{H})$ は自然に複素ベクトル空間になり，上のノルムで Banach 空間となる．また，$B(\mathcal{H})$ は写像の合成を積

として環になる．$T \in B(\mathcal{H})$ に対し，$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, S\eta\rangle$ を満たす $S \in B(\mathcal{H})$ が唯一存在する．この S を T^* と表し，T の**共役作用素**（**adjoint operator**）という．写像 $T \mapsto T^*$ は前節定義した対合が満たすべき条件を満たし，$B(\mathcal{H})$ は $*$ 環になる．また，作用素ノルムにより C^*環になり，さらに $B(\mathcal{H})$ はトレース有限作用素全体のなす Banach 空間 $T(\mathcal{H})$ の双対空間と同型であることが示されるので，von Neumann 環になる．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が $\mathbb{C}^n$ のとき，$B(\mathcal{H})$ は $n \times n$ 行列全体のなす環 $M_n(\mathbb{C})$ となり，共役作用素を考えることは転置して各成分の複素共役をとることに対応する．$B(\mathcal{H})$ にはノルムから定まる距離位相以外にも自然に定まる位相がいくつかあるが，その一つに**弱作用素位相**（**weak operator topology**）と呼ばれるものがある．この位相は，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対し $B(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \langle T\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}$ を連続にする最弱の位相で，ノルム位相よりも弱い．

定理 3.4. $B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環でノルム位相で閉じているものは C^*環になる．全ての C^*環はこのようにして得られる C^*環に同型である．

$B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環で，弱作用素位相で閉じているものは von Neumann 環になる．全ての von Neumann 環はこのようにして得られる von Neumann 環に同型である．

$B(\mathcal{H})$ の元（より一般には C^*環の元）T は，$T^*T = TT^* = 1$ を満たすとき**ユニタリー**（**unitary**），$TT^*T = T$ を満たすとき**部分等長作用素**（**partial isometry**）と呼ばれる．

3.3 可換な作用素環

C^*環及び von Neumann 環はそれぞれ非可換位相空間，非可換測度空間と呼ばれることがあるが，それは可換な C^*環及び von Neumann 環がそれぞれ位相空間，測度空間と一対一に対応していることからきている．この節ではその対応を見る．

位相空間 X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数 f で，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクト集合になるもの全体を $C_0(X)$ とかく．$C_0(X)$ は各点の演算及び共役写像で $*$ 環になる．$f \in C_0(X)$ に対し $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ と定義すると，$C_0(X)$ は $\|\cdot\|_\infty$ というノルムに対して Banach 空間になる．

定理 3.5. 位相空間 X に対して $C_0(X)$ は上の演算で可換 C^*環になる．逆に可換 C^*環は全てこの形をしている．

X を測度空間とする．X 上の有界可測関数全体の集合に対し，ほとんどいたるところ一致する二つの関数を同一視したものを $L^\infty(X)$ と書く．上と同様の演算で $L^\infty(X)$ は $*$ 環でありかつ Banach 空間になる．

定理 3.6. 測度空間 X に対して $L^\infty(X)$ は可換 von Neumann 環になる．逆に可換 von Neumann 環は全てこの形をしている．

X 上の可積分関数全体のなす Banach 空間 $L^1(X)$ の双対空間が $L^\infty(X)$ と同型になること[†]に注意．また，$L^\infty(X)$ は掛け算により Hilbert 空間 $L^2(X)$ 上の作用素としてあらわすこともできる（定理 3.4 参照）．

4　可逆力学系と作用素環

この章では，可逆な位相力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ から C^* 環 $A(\Sigma)$ を構成する方法を紹介する．全く同様にして，可逆な可測力学系から von Neumann 環を構成することができるがそれに関しては省略する．以下，主に位相力学系及び C^* 環の事についてのみ議論する．

$\Sigma = (X, \alpha)$ を可逆な位相力学系とする．まず可換 C^* 環 $C_0(X)$ を適当に $B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環として表す．Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K} = \left\{ (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \,\middle|\, \xi_n \in \mathcal{H},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty \right\}$$

で定義する．可換 C^* 環 $C_0(X)$ から $B(\mathcal{K})$ への写像 π を

$$\pi(f)(\xi_n)_n = (\alpha_n(f)\xi_n)_n \qquad (f \in C_0(X),\ (\xi_n)_n \in \mathcal{K})$$

で定義する．ここで，$n \in \mathbb{Z}$ に対し $\alpha_n(f) \in C_0(X)$ は

$$\alpha_n(f)(x) = f(\alpha^n(x)) \qquad (x \in X)$$

で定義される．このとき π は $C_0(X)$ の $B(\mathcal{K})$ への埋め込みになっている．$\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 u を $(\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+1})_n$ で定義する．すると，簡単な計算により

$$u\pi(f)u^* = \pi(\alpha_1(f))$$

となることがわかる．ここで，π の像と $u \in B(\mathcal{K})$ で生成される C^* 環を $A(\Sigma)$ と書き，**同相写像 C^*環**（**homeomorphism C^*-algebra**）という．同相写像 C^* 環 $A(\Sigma)$ は最初に勝手に与えた $C_0(X)$ の表現にはよらないことが証明できる．

同相写像 C^* 環 $A(\Sigma)$ はもとの位相力学系の「軌道」の構造の情報を持った C^* 環になる．例えば次の定理を証明することができる．

定理 4.1. 位相空間 X が無限集合のとき，力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ が極小的であるための必要十分条件は同相写像 C^* 環 $A(\Sigma)$ が単純となることである．

ここで，C^* 環が**単純**（**simple**）であるとは，自明でない両側閉イデアルを持たないことである．同様にして，可測力学系がエルゴード的であることを付随する von Neumann 環の言葉で特徴づけることができる．

[†]これは測度空間が局所化可能であることと同値

可逆な位相力学系 (X,α) は X が Cantor 集合で α が極小的のとき **Cantor 極小系**（**Cantor minimal system**）と呼ばれる．Giordano，Putnam，Skau の 3 人は 2 つの Cantor 極小系が「強軌道同型」であることと，付随する同相写像 C^*環が同型であることが同値であることを示した（[GPS]）．

力学系を調べる上で「軌道」の構造とともに重要である「エントロピー」の情報に関しては，付随する作用素環だけでは調べることができないことがわかっている．

5　群作用と接合積

群 G の空間 X への作用 α とは，G から X の自己同型写像全体のなす群への準同型写像のことである．G が整数群 $\mathbb{Z}$ のときは，G の作用を与えることと X の自己同型写像を一つ与えることが同値である．よって，2 章で定義した力学系とは空間 X と $\mathbb{Z}$ の X への作用の組に他ならない．より一般に，空間 X，群 G と G の X への作用 α の 3 つ組のことを力学系と呼ぶこともある．4 章の構成方法と同様にして，そのような 3 つ組から**接合積**（**crossed product**）と呼ばれる作用素環を構成することができる．X が位相空間のとき，接合積は $C_0(X) \rtimes_\alpha G$ と表される C^*環で G が $\mathbb{Z}$ のときは同相写像 C^*環に一致する†．詳しい定義は [P1] を参照．群として位相群を考えるときは作用に関してもある種の連続性を仮定する必要がある．特に実数群 $\mathbb{R}$ の作用は時間発展ととらえることができ重要である．

6　Markov シフトと Cuntz-Krieger 環

可逆力学系に対しては 4 章に挙げたようにして作用素環を構成することができた．可逆でない力学系に対しても同様の構成をすることができるが，この章ではそれとは異なる構成方法を一つ紹介する．この方法は Cuntz と Krieger によって片側 Markov シフトと呼ばれる可逆でない位相力学系を研究するために導入された（[CK]）．

N を 2 以上の自然数とする．

$$\{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}} = \left\{(x_n)_{n=0}^{\infty} \;\middle|\; x_n \in \{1,2,\ldots,N\}\right\}$$

は直積位相でコンパクト空間になる．片側シフト

$$\sigma\colon \{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n \in \{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$$

は全射だが単射でない連続写像である．$\{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$ の閉部分集合 X が $\sigma(X) \subset X$ を満たすとき，$\Sigma = (X,\sigma)$ は可逆でない位相力学系になる．

†接合積には，普遍性を用いて定義される full crossed product と表現を用いて定義される reduced crossed product の二種類があり，群が可換のときは一致する．

Aを成分が0または1の$N \times N$行列とする．このとき，

$$X_A = \left\{ (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \{1, 2, \ldots, N\}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; A_{x_n, x_{n+1}} = 1 \ (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

は$\sigma(X_A) \subset X_A$を満たす$\{1, 2, \ldots, N\}^{\mathbb{N}}$の閉集合になる．このようにして定義される力学系$\Sigma_A = (X_A, \sigma)$は（位相的）**Markov シフト**（**Markov shift**）と呼ばれる．

Cuntz と Krieger は Markov シフトを調べるため，行列Aから次のようにしてC^*環$\mathcal{O}_A$を導入した．$\mathcal{H}$を Hilbert 空間とし，$B(\mathcal{H})$の部分等長作用素の組$\{S_i\}_{i=1}^N$で次の条件を満たすものを考える．

$$1 = \sum_{i=1}^{N} S_i S_i^*, \qquad S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} S_j S_j^*.$$

行列Aがある弱い条件を満たしているとき，上の2条件を満たす部分等長作用素の組$\{S_i\}_{i=1}^N$で生成されるC^*環は$\{S_i\}_{i=1}^N$の取りかたによらず一意である．このC^*環を$\mathcal{O}_A$と書き，**Cuntz-Krieger 環**（**Cuntz-Krieger algebra**）と呼ぶ．

上の構成方法からはすぐには分からないが，Cuntz-Krieger 環$\mathcal{O}_A$は Markov シフト$\Sigma_A = (X_A, \sigma)$から一意に定まる．つまり，異なる行列A, A'が同型の Markov シフトを誘導するとき，それらのつくる Cuntz-Krieger 環も同型になる．この Cuntz-Krieger 環のK群や Ext 群と呼ばれる群は行列Aから簡単に計算可能であり，Markov シフトの flow equivalence と呼ばれる同値関係での不変量になっている．

7　位相グラフとC^*環

同相写像C^*環と Cuntz-Krieger 環の構成方法をともに拡張したものとして，[K] で位相グラフと呼ばれるものからC^*環を構成する方法が提案された．

定義 7.1. 位相空間$X, \widetilde{X}$と局所同相写像$d\colon \widetilde{X} \to X$ 連続写像$r\colon \widetilde{X} \to X$の4つ組$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$を**位相グラフ**（**topological graph**）という．

$(\widetilde{X}, d, r)$の3つ組はXから自分自身への多重値連続写像と思うことができ，位相グラフは位相力学系の拡張と思うことができる．実際，dが同相写像のときは，位相グラフは2章で定義した位相力学系に他ならない．また，$X = \widetilde{X} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，$d(z) = z^2$，$r(z) = z$のとき，位相グラフ$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$は$X$上の$\sqrt{\cdot}$という$1:2$の「写像」で定義される「力学系」と考えることができる．4つ組$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$がグラフと呼ばれるのは，$X$を点の集合，$\widetilde{X}$を線の集合，線$e \in \widetilde{X}$が$d(e) \in X$から$r(e) \in X$に向き付けられていると思うという視点からきている．

[K] では，この位相グラフEに対してC^*環$\mathcal{O}_E$を定義する方法が提案されたが，この方法は4章であげた同相写像C^*環の構成方法と6章であげた Cuntz-Krieger 環の構成方法をともに拡張したものであり，C^*環$\mathcal{O}_E$の構造は位相グラフEの「軌道」の構造をよく反映したものになっている．

参考文献

[CK] Cuntz, J.; Krieger, W. *A class of C^*-algebras and topological Markov chains.* Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 251–268.

[GPS] Giordano, T.; Putnam, I. F.; Skau, C. F. *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products.* J. Reine Angew. Math. **469** (1995), 51–111.

[K] Katsura, T. *A class of C^*-algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism C^*-algebras I, fundamental results.* Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 11, 4287-4322.

[P1] Pedersen, G. K. *C^*-algebras and their automorphism groups.* London Mathematical Society Monographs, **14**. Academic Press, Inc., London-New York, 1979.

[P2] Pedersen, G. K. *Analysis now.* Graduate Texts in Mathematics, **118**. Springer-Verlag, New York, 1989.