多層からなる媒体に対する
1 次元波動方程式に関するある逆問題

(An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multilayer media)

大阪大学大学院理学研究科 永安聖
(Sei NAGAYASU (Graduate School of Science, Osaka University))

Abstract

Our problem originates from a simplified model of the nondestructive inspections. We consider half-line media which consist of many kinds of substances. We can directly observe the data near the boundary point of the half-line, but we cannot directly observe the data of things away from the boundary point. In this situation, we try to identify these unknown things by creating an artificial explosion and observing on the boundary point the waves generated by the explosion. In this article, we formulate this problem mathematically, and we consider the formulated problem.

1 序

ここで考えるのは, 非破壊検査をシンプルにモデル化した問題である. 幾種類もの媒質が半直線状につながってできた棒状の媒体を考える (図 1). 観測者は, 半直線の端点付近に居るとする. それ故に, 観測者は端点付近の情報は直接観測できるけれども, 端点から遠いところの情報を直接観測することはできない. そこで, その直接は観測できない情報を推測するために, 次のような実験を行う. まず, 半直線の端点付近に人工的に衝撃を起こす. すると, その衝撃によって媒体内を波が伝わる. その波のうち, 端点に跳ね返ってくるものを観測する. そして, その観測したデータから, 端点から遠いところの情報を推測することを試みる.

2 問題の定式化

2.1 方程式の導出

以下, この問題を考えるために, 記号を導入し, 問題を定式化する (図 2). まず, 媒体全体を半直線 $[0,\infty)$ で表す (丁度端点が $x=0$ に相当する). 媒体は, N 個の媒質がつながってできているとし, 端点に近いところから, 媒質 1, 媒質 2, . . . , 媒質 N と

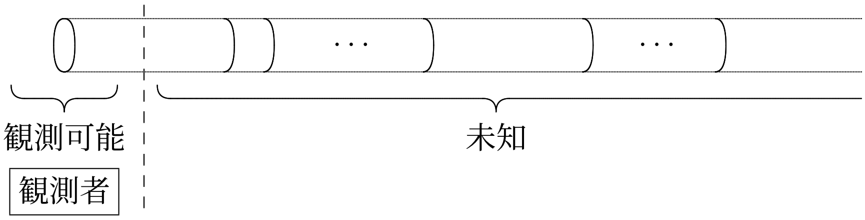

図 1: 考えている媒体の状態

呼ぶことにする (因って, 媒質 N は半無限区間となる). 媒質 k と媒質 $k+1$ との接合点の座標を h_k と表す $(k=1,\dots,N-1)$. 尚, $h_0 := 0$ と置く. 又, 人工衝撃を与える点を y とする $(0<y<h_1)$. 各媒質 k の密度を ρ_k, ヤング率を E_k と置く. ヤング率とは, 棒の伸びの割合と単位断面積当たりの力との比のことで, これは物質による定数である. このとき, 各媒質 k を伝わる波の速度 a_k は, $a_k = \sqrt{E_k/\rho_k}$ となる. この速度 a_k に対する d'Alembertian P_k を, $P_k := \partial_t^2 - a_k^2\partial_x^2$ で定義する. 又, $u(t,x)$ で, 元々位置 x にあった点の, 時刻 t での変位を表す.

媒質 1 では時刻 $t=0$ で位置 y にデルタ関数の衝撃を起こすことにしよう. すると, 媒質 1 での波の振る舞いは,

$$P_1u(t,x) = \delta(t,x-y), \quad t\in\mathbb{R}, \quad 0<x<h_1 \tag{W.1}$$

と定式化される. 一方, 媒質 k $(k=2,\dots,N)$ では特に外力は与えないので, そこでの波の振る舞いは,

$$P_ku(t,x) = 0, \quad t\in\mathbb{R}, \quad h_{k-1}<x<h_k \quad (k=2,\dots,N-1), \tag{W.k}$$

$$P_Nu(t,x) = 0, \quad t\in\mathbb{R}, \quad x>h_{N-1} \tag{W.N}$$

と定式化される. 次に, 端点での条件だが, 端点では自由であるとする, つまり, 自由境界条件

$$\partial_x u(t,x)|_{x=0+0} = 0 \tag{B}$$

を考える. 最後に, 媒質 k と媒質 $k+1$ との接合点 $x=h_k$ での条件について考える $(k=1,\dots,N-1)$. まず, 接合点では, 波による変位が連続であると考えられる. それは

$$u(t,x)|_{x=h_k-0} = u(t,x)|_{x=h_k+0} \tag{I.k}$$

と定式化される. もう一つは, 接合面を通して媒質 k は媒質 $k+1$ に, 媒質 $k+1$ は媒質 k に力を及ぼしているが, この二つの力は作用反作用の関係にあり, 大きさが等し

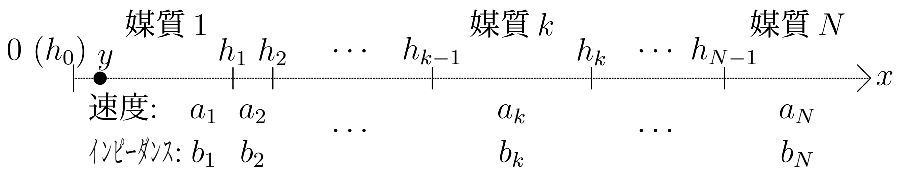

図 2: 導入した記号

く逆向きであると考えられる. 言い換えると, 接合点では応力が連続であると考えられ, それは

$$E_k \partial_x u(t,x)|_{x=h_k-0} = E_{k+1} \partial_x u(t,x)|_{x=h_k+0} \tag{J.k}$$

と定式化される.

以上の (W.1)–(W.N), (B), (I/J.1)–(I/J.$N-1$) が今回扱う方程式である. 尚ここで, 波を伝える媒質のインピーダンス $b_k := \sqrt{E_k \rho_k}$ という量を導入しておく. インピーダンスとは, 一言で言うと, 媒質の波を伝える能力を表すパラメータであり, 特に異なる媒質がつながっている場合の波の反射・透過を表す際に大きな役割を果たす. このインピーダンスを使うと, (J.k) は

$$a_k b_k \partial_x u(t,x)|_{x=h_k-0} = a_{k+1} b_{k+1} \partial_x u(t,x)|_{x=h_k+0} \tag{J.k}$$

と書き換えられる. 今後, ここでは, 各媒質を特徴付ける定数として, 密度 ρ_k・ヤング率 E_k の代わりに, 波の速度 a_k・インピーダンス b_k に注目することにしよう. 尚, 以上の方程式の導出については, [1] を参照した.

2.2 方程式に対するここでの問題 —順問題と逆問題—

以上によりここで扱う微分方程式は揃った. ところが, 普通「微分方程式を考える」というときには, 微分方程式の係数は全て分かっているとして, そのときの微分方程式の解の性質 (解はそもそも存在するか, 解は唯一つか, $t \to \infty$ としたときの解の振る舞いはどうか, 等) について議論することが多いのだが, 今回考えたい問題はそうではない. 今回考えたい問題は, 端点付近の情報 (a_1, b_1, y) 及び観測データ ($u(t,0)$) は分かっているとして, 端点から遠いところの媒質の情報 (a_k, b_k, h_k) を求める, つまり標語的に言うと, 解の一部が分かっているときに微分方程式の係数を求める問題である. 普通に微分方程式を解くのとは逆だという意味で, このような問題は**逆問題**と呼ばれている. 特に, 今の場合は微分方程式の係数を決める問題なので, **係数決定問題**とも呼ばれている. これに対し, 係数が全て既知であるとして微分方程式の解の性質について議論する問題は**順問題**と呼ばれている.

逆問題を考える際の基本的問題には,

- **一意性**: 二つの観測データが一致すれば, 推測したい未知情報も一致するのかどうか. 言い換えると, 未知情報が異なれば, 観測データも異なるものになるのかどうか, という問題.
- **再構成**: 観測データが与えられたときに, どうすれば, その観測データを用いて未知情報を表現 (再構成) できるか, という問題.
- **安定性**: 二つの観測データの差が小さければ, 推測したい未知情報の差も小さいのかどうか, という問題.

等がある (詳しくは, 例えば [2] を参照).

尚, 偏微分方程式を「(物理) 現象を記述した方程式」と見たときには, 順問題とは, 現象を記述する法則・現象に影響を与えうるデータが予め分かっている, という仮定の下で, どのような現象が起こるのかを確かめる, 言い換えると, 観測データの信頼性を確認する問題であるということができ, 一方, 逆問題とは, 現象を記述する法則や現象に影響を与えうるデータに未知な情報が含まれているときに, 観測データからその未知の情報を推測する問題であるということができる.

3 主結果

さて, 上のように定式化した問題に対し, 今回得られた結果について御紹介しよう. 今回得られた結果は, 再構成についてのものである. 次の主結果は, 隣り合う媒質のインピーダンスが等しくないことが予め分かっていれば, 端点付近の情報と観測データから, 端点から遠いところの媒質の「インピーダンス」及び「媒質の幅と速度との比」が, その観測時間の長さに応じて, 端点に近いところから順々に再構成できる, ということを表している.

主結果 ([3]). $b_j \neq b_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, N-1)$ とする. a_1, b_1, y は既知であるとする. 観測データ $v(t) := u(t, 0)$ が $[0, T)$ 上で与えられたとする. ここで, $u(t, x)$ は方程式 (W.1)–(W.N), (B), (I/J.1)–(I/J.$N-1$) の解を表す. このとき, 定数 b_{k+1}, $(h_k - h_{k-1})/a_k$ $(1 \leq k \leq N_0 - 1)$ が次の方法で再構成できる:

手順 1. $v_1(t) := \dfrac{1}{a_1} H\left(t - \dfrac{y}{a_1}\right) - v(t)$ と置く. 但し H は Heaviside 関数.

手順 k+1 (k=1,2,...). $[0, T)$ 上 $v_k(t) \equiv 0$ ならば再構成終了, このときの k が上の N_0 に対応する: $v_{N_0}(t) \equiv 0$. 一方, $v_k(t) \not\equiv 0$ ならば, 次の手続きを実行する:

- $t_k := \inf\{t \in [0,T) : v_k(t) \neq 0\}$ と置く.
- 次のように $(h_k - h_{k-1})/a_k$, b_{k+1} を再構成する:

$$\frac{h_k - h_{k-1}}{a_k} := \frac{1}{2}\left(t_k + \frac{y}{a_1}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j},$$

$$b_{k+1} := \frac{2^{2k-2}\prod_{j=1}^{k-1}(b_j b_{j+1}) + v_k(t_k+0)a_1 \prod_{j=1}^{k-1}(b_j + b_{j+1})^2}{2^{2k-2}\prod_{j=1}^{k-1}(b_j b_{j+1}) - v_k(t_k+0)a_1 \prod_{j=1}^{k-1}(b_j + b_{j+1})^2} b_k.$$

- $v_{k+1}(t) := v_k(t) + \dfrac{1}{a_1} g^{(k)}\left(t; \dfrac{y}{a_1}; b_1, \ldots, b_{k+1}; \dfrac{h_1}{a_1}, \dfrac{h_2 - h_1}{a_2}, \ldots, \dfrac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T\right)$ と置き,

次の手順に進む. ここで, $g^{(k)}$ は

$$\begin{aligned} &g^{(k)}(t; \lambda; b_1, \ldots, b_{k+1}; \Theta_1, \ldots, \Theta_k; T) \\ &= \sum_{\{m_j\}_{j=1}^k :\ \sum_{j=1}^k (m_j+1)\Theta_j \leq \frac{1}{2}(T+\lambda)} \phi_k(m_1, \ldots, m_k; b_1, \ldots, b_{k+1}) \\ &\qquad \times \sum_{\nu=\pm 1} H\left(t - \left(\nu\lambda + 2\sum_{j=1}^k (m_j+1)\Theta_j\right)\right) \end{aligned}$$

という形をしている. 尚, ϕ_k は $(b_j - b_{j+1})/(b_j + b_{j+1})$ などの有限個の積の有限和であり, 具体的な表示も得られているが, ここでは割愛する (具体的な表示は [3] 参照).

主結果中の $g^{(k)}$ の部分は, 大雑把に言えば「媒質の情報が再構成できた部分だけの影響により発生することが分かる観測データ」であり, これは, 実は順問題を解いたときに得られるデータということもできる. 逆問題と順問題は, 全く異なる問題というわけではなく, 逆問題として定式化された問題を解決しようと思うと, 順問題のより深い考察が必要になることも屡々あるようである.

参考文献

[1] 長岡洋介, 振動と波, 裳華房, 1992.

[2] 中村玄, 弾性体の逆問題, 数学 **53** (2001), 113–124.

[3] S. Nagayasu, *An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multilayer media*, preprint.