トーリック曲面上の曲線に対するゴナリティ予想
The gonality conjecture for curves on a toric surface

川口 良（大阪大学大学院理学研究科）
Ryo Kawaguchi（Graduate School of Sience, Osaka University）

Abstract

Gonality is one of invariants for non-singular irreducible projective curve. The gonality conjecture which had been predicted by M. Green and R. Lazarsfeld in 1986 was proved for curves on Hirzebruch surfaces by M. Aprodu in 2002. The aim of this study is to extend this result for curves on toric surfaces. At present, a partial solution has been gotten.

背景

代数幾何学の主要な研究課題として代数多様体の分類が挙げられるが, 特に非特異既約な射影的代数曲線については, 標準因子を使って大まかな分類ができる. それを説明するために, まずは X 上の因子に関する基本的な性質をいくつか確認しておく.

X を $\mathbb{C}$ 上の種数 g の非特異既約な射影的代数曲線としたとき,

$$\left\{ D = \sum n_i D_i \;\middle|\; D_i : X \text{ 上の } 0 \text{ 次元部分代数多様体}, n_i \in \mathbb{Z}, \text{有限個を除き } n_i = 0 \right\}$$

の元を X 上の因子という. X 上の因子 D をとると, コホモロジー群と呼ばれる $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H^0(X, D)$ が定まり, その次元を $h^0(X, D)$ と書く. また完備線形系と呼ばれる因子の集合 $|D|$, およびそれに付随する正則写像 $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^r$ が得られる. ここで $\mathbb{P}^r$ とは r 次元複素射影空間で, $r = h^0(X, D) - 1$ である.

さて, 初めに述べた通り X 上の標準因子と呼ばれる特殊な因子 K_X について考えることにより, X に次のような初等的分類を与えることができる. まず, $|K_X| = \phi$ ならば $X \simeq \mathbb{P}^1$ すなわち $g = 0$（有理曲線）となる. また, $K_X \sim 0\,(\Leftrightarrow 0 \in |K_X|)$ ならば $g = 1$（楕円曲線）となり, $\varphi_{|K_X|}$ の像は 1 点になる. これら 2 つの曲線に関してはすでに様々な研究がなされており, 多くの性質が知られている.

一方 $g \geq 2$ の曲線については $\varphi_{|K_X|}$ の像は 1 次元になっており, $\varphi_{|K_X|}$ が埋め込みを与える場合（非超楕円曲線）とそうでない場合（超楕円曲線）とに分けることができる. X が超楕円曲線のときは, X から射影直線 $\mathbb{P}^1$ への次数 2 の正則写像 $X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ が存在し, X は $\mathbb{P}^1$ の 2 重被覆になることが知られている. そこで非超楕円曲線についても, それが $\mathbb{P}^1$ の最低何重被覆になるかを考えることで, より詳しい分類が得られるであろうという立場が出てくる. この不変量をゴナリティと呼び, 正確には

$$\begin{aligned}\mathrm{gon}(X) &:= \min\left\{\, k \mid {}^{\exists}\text{正則写像}\, f : X \to \mathbb{P}^1, \deg f = k \,\right\} \\ &= \min\left\{\, k \mid {}^{\exists}X \text{ の次数 } k \text{ のペンシル } g_k^1 \,\right\}\end{aligned}$$

と定義される．ここでペンシル g_k^1 とは $h^0(X,D) = 2$ なる因子 D の完備線形系 $|D|$ で，$\deg\varphi_{|D|} = k$ なるものを表す. $\mathrm{gon}(X) = k$ であることを, X は k-gonal であるという.

先行研究

因子と本質的に同じ概念に直線束と呼ばれるものがあり, 因子 $D = \sum_{i=1}^{d} n_i D_i$ に対応する直線束 L について $\deg L := \sum_{i=1}^{d} n_i$ と定める．ゴナリティに関わる事実として, 次のようなことが知られている.

定理 1. ([GL1]) Xを種数 g の非特異既約な射影的代数曲線, kを非負整数とし，X上の直線束 L で $\deg L \geq 2g + k$ なるものをとる． このとき Xが g_k^1 を持つならば (X, L) は (M_k) を満たさない.

ここで, (M_k) とは以下で定義される性質である.

定義 2. Xと kは定理 1 の通りとし，Lを X上の直線束とする. 任意の整数 $p \geq h^0(X, L) - k - 1$ に対して $K_{p,1}(X, L) = 0$ が成り立つとき, (X, L) は (M_k) を満たすという. ただし, $K_{p,1}(X, L)$ は, Lから定まる Koszul コホモロジーと呼ばれる $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $K_{p,1}\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^0(X, iL), H^0(X, L)\right)$ を表す.

さらに M. Green と R. Lazarsfeld は 1986 年に [GL2] の中で, 定理 1 の逆を含めた形の次の予想を立てた.

ゴナリティ予想. ([GL2]) X と k は定理 1 の通りとし, X 上の直線束 L で $\deg L \gg 2g$ なるものをとる. このとき, X が g_k^1 を持つことと (X, L) が (M_k) を満たさないことは同値である.

ゴナリティ予想によれば非特異既約な射影的代数曲線のゴナリティは, その上の直線束の Koszul コホモロジーについて考察することによって読みとれることになる．逆に k-gonal 曲線 X 上の十分大きな次数の直線束 L については, 任意の整数 $p \geq h^0(X, L) - k$ に対して $K_{p,1}(X, L) = 0$ という消滅定理が成り立つことも分かる.

さて, M. Aprodu はゴナリティ予想を X がヒルツェブルフ曲面上の曲線である場合について考察し, 2002 年に [Apr] の中で次のような結果を得ている．ただし, ここで a は非負整数, Σ_a は a 次ヒルツェブルフ曲面とし, Γ と Δ をそれぞれ ruling map $\pi : \Sigma_a \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーと極小切断とする.

定理 3. ([Apr]) Σ_a 上の非特異既約曲線 $X \equiv k\Delta + m\Gamma$ をとる．このとき $k, m \in \mathbb{Z}$ が $k \geq 2$, $m \geq \max\{ak, a + k\}$ を満たせば X は k-gonal で，Xについてゴナリティ予想は正しい.

ここで, $m \geq ak$ というのは X がネフ, つまり Σ_a 上の任意の既約曲線との交点数が非負であるための必要十分条件になっている. 一方, $m \geq a+k$ という条件について考えると, $a=1$ のときは $m=k$ だと X は k 次平面曲線と同型になり, この場合は X は $(k-1)$-gonal になる. また, $a=0$ のときは ruling map が 2 方向にとれ, $m \leq k-1$ だと m の方がゴナリティを与える.

主結果

この M. Aprodu の結果を, X が非特異コンパクトなトーリック曲面上の曲線である場合について拡張するのが研究の目標であり, 現在までに以下のような部分的解決を得ている.

まず, S を $\mathbb{P}^2$ でない非特異コンパクトなトーリック曲面, X を S 上の非特異既約曲線とする. このとき, S から $\mathbb{P}^1$ への全射な同変正則写像 $f: S \to \mathbb{P}^1$ が少なくとも一つ, 高々有限個とれる. 以下では, k といえばそれらの f に対し, f の一般ファイバーと X の交点数の最小値を指すこととする.

定理 4. *S は $\mathbb{P}^2$ でない非特異コンパクトなトーリック曲面で, 上記の同変正則写像のとり方が 1 通りしかないとする. X を S 上の種数 g の非特異既約曲線とする. このとき, X がネフで $k \geq 2$ ならば, 次のいずれかが成り立つ.*

(i) *X は k-gonal で X についてゴナリティ予想は正しい.*

(ii) *X は k 次平面曲線に同型である.*

定理 4 において, X がネフでないか $k \leq 1$ のときは, X は有理曲線になる.

実際には同変正則写像のとり方は何通りもあるのが普通なので, 今後は定理 4 の同変正則写像のとり方が 1 通りという仮定をはずして, 一般の非特異コンパクトなトーリック曲面上でも同様の結果を示したいと考えている.

参考文献

[Aki] 秋月康夫, 中井喜和, 永田雅宜, 代数幾何学, 岩波書店, 1987

[Apr] M. Aprodu, On the vanishing of higher syzygies of curves, Math. Z. **241** (2002), 1–15.

[GL1] M. Green and R. Lazarsfeld, The nonvanishing of certain Koszul cohomology groups, J. Diff. Geom. **19** (1984), 168–170.

[GL2] M. Green and R. Lazarsfeld, On the projective normality of complete linear series on an algeblaic curve, Invent. Math. **83** (1986), 73–90.

[Kat] 桂利行, 代数幾何入門, 共立出版, 1998

[Miy] 宮西正宜, 代数幾何学, 裳華房, 1990