Duality Theorem and its application

四ツ谷 直仁
北海道大学理学研究科

2006

概 要

Ruled variety are unions of a family of linear spaces. For an n-dimensional projective variety $X \subset \mathbb{P}_N$, we can define its rational Gauss map.In general the dimension of the image of Gaussmap,the Gauss rank,is n.If this is not the case X is called developable.As a one of rescent results,there is the classification of developable ruled variety.

1 はじめに

いくつかの斉次多項式 $F_1, \ldots, F_m$ の共通零点の既約集合を多様体といいます. すると多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対しその Dual variety なるものを定める事ができます. これはちょうど X の点 $p \in X$ における接超平面からなる多様体の様なものといえます. 非特異な多様体 (すなわち,$\partial F_1/\partial t(p) = 0, \ldots, \partial F_m/\partial t(p) = 0$ なる点 $p \in X$ の存在しない様な X) であれば問題はないのですが, 特異点を含む様な多様体に関してはいくつかの問題が生じてきます. ここでは Dual variety やその簡単な例, また Gauss map や Tangent variety,Secant variety などの関係を紹介したいと思います.

2 Conormal bundle と Dual variety の定義

以下, 多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上定まるものとします. まず多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ が非特異な超曲面 (唯一の既約多項式 F の零点集合) であったとしま

す. この時 X の任意の点 p に対し,F の勾配を対応させる写像,

$$\delta : X \to \mathbb{P}_N \qquad p \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_N}(p)\right)$$

が定まります. この時 X の Dual variety を $X^* := \delta(X)$ で定義します. これは一般に特異点を持つような次元 n の多様体 X であっても定まります.

より具体的には,$\mathbb{T}_p X$ を X の接空間とした時

$$\Gamma_X := \{(p, y) \in X \times \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\}$$

を考えます. ここで $\langle x, y \rangle$ は $y(x)$ を意味するものとします. この時射影 $\pi : \Gamma_X \to X$ に対し C_X を

$$C_X := \text{closure of}(\Gamma_X \backslash \pi^{-1}(\text{sing}X)) \subset X \times \mathbb{P}_N^*$$

で定め, これを X の Conormal bundle と呼びます. ここで X の特異点における接超平面を p 近傍の非特異な点における接超平面の極限とみなすことで, 形式的に極限をとる操作を $X \times \mathbb{P}_N^*$ での閉包をとる事に対応させています. この時もう一方の射影 $\pi^* : X \times \mathbb{P}_N^* \to \mathbb{P}_N^*$ に対し $X^* := \pi^*(C_X)$ とする事で X の Dual variety が定まります.

C_X と X^* に対し, 次の基本的かつ重要な事実が成立します.

- C_X は既約で,$\dim C_X = N - 1$
- $N - n - 1 \leq \dim X^* \leq N - 1$
- $(X^*)^* = X$

3 Rational Curve

$X \subset \mathbb{P}_N$ が一次元多様体 (Curve), 特に Rational curve の時比較的容易に X^* に対する関係式をみることができます.

定義 3.1. $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ により,φ が

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_N \qquad (t_0 : t_1) \mapsto (\varphi_0(t_0, t_1) : \ldots : \varphi_N(t_0, t_1))$$

と表される時 φ を次数 d の *(nondegenerate)rational curve* という.

特に注目するべきなのは $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{N-1} < m_N = d \qquad \varphi_i(t_0, t_1) := t_0^{d-m_i} t_1^{m_i}$ と表される時で, この時 φ を rational monomial curve と呼びます.

定義 3.2. $(y_0 : \ldots : y_N)$ を $\mathbb{P}_N^*$ 斉次座標とした時, 多項式 $\Phi(t;y) := y_0\varphi_0(t) + \ldots + y_N\varphi_N(t)$ を定める. この時 y_i を係数,$(t_0 : t_1)$ を変数とみる事で Φ の *discriminant set*

$$D := \{(y_0 : \ldots : y_N) \in \mathbb{P}_N^* : \Phi(t;y) \text{ は } (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1 \text{を重根にもつ}\}$$

が定められる.

すると次の事が言えます.

主張 3.3. $D = X^*$

この関係により次のように $X^* \subset \mathbb{P}_N^*$ に対する関係式を求める事ができます.

例 3.4. *($d = 3 \quad N = 3$ の場合) Twisted Cubic*

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to X \subset \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^3 : {t_0}^2 t_1 : t_0 {t_1}^2 : {t_1}^3)$$

に対して $\Phi(t;y) := y_0t^3 + y_1t^2 + y_2t + y_3$ となります. この y_i 係数に関する *discriminant* は, $27{y_0}^2{y_3}^2 - 18y_0y_1y_2y_3 + 4y_0{y_2}^3 + 4{y_1}^3y_3 - {y_1}^2{y_2}^2$ であるのでこれが X^* に対する関係式である事がわかります.

同様に $d = 4, N = 3$ の場合で

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^4 : {t_0}^3 t_1 : t_0 {t_1}^3 : {t_1}^4)$$

の時は $4y_1^3y_2^3 + 27y_0^2y_2^4 + 6y_0y_1^2y_2^2y_3 + 27y_1^4y_3^2 + 192y_0^2y_1y_2y_3^2 - 256y_0^3y_3^3$ が求める関係式になることが計算されました.

4 これから

多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ の非特異な点 p においての接空間 T_pX やその射影化 $\mathbb{T}_pX$ については問題はないのですが, 特異点においてはどのようなものを対応させるかという問題が生じてきます. そこで新たに次のようなものを定義します.

定義 4.1. 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ の点 $p \in X$ に対し p に収束する点列 $x_i, y_i \in X$ に対し x_i と y_i を結んでできる直線を $\overline{x_iy_i}$ で表す. この時 $\mathbb{T}_p^\star X$ をこの様な直線 $\overline{x_iy_i}$ の極限の和集合として定め, これを *tangent star* という.

定義 4.2. 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し,

$$\mathrm{Tan}^{\star} X := \bigcup_{p \in X} \mathbb{T}^{\star}_p X \subset \mathbb{P}_N$$

を X の *tangent star variety* という. また X の *secant variety* を

$$\mathrm{Sec} X := \bigcup_{\substack{(x,x') \in X \times X \setminus \Delta_X \\ x \neq x'}} \overline{xx'} \subset \mathbb{P}_N$$

で定める.

同様に多様体 $Y \subset X \subset \mathbb{P}_N$ に対して, 次の様に定める. $y \in Y$ とし,$y_n \in Y, x_n \in X$ を共に y に収束する点列とする. この時, $\mathbb{T}^{\star}_y(Y,X)$ を $\overline{y_n x_n}$ の極限の和集合として定め,

$$\mathrm{Tan}^{\star}(Y,X) := \bigcup_{y \in Y} \mathbb{T}^{\star}_y(Y,X)$$

$$\mathrm{Sec}(Y,X) := \bigcup_{\substack{(y,x) \in Y \times X \setminus \Delta_Y \\ y \neq x}} \overline{yx}$$

とする.

この時次が言えます.

定理 4.3 (ZAK's Theorem). 多様体 $Y \subset X \subset \mathbb{P}_N$ に対し, 次の内いずれかが成立する.

1. $\dim \mathrm{Tan}^{\star}(Y,X) = \dim Y + \dim X, \dim \mathrm{Sec}(Y,X) = \dim Y + \dim X + 1$
2. $\mathrm{Tan}^{\star}(Y,X) = \mathrm{Sec}(Y,X)$

また,Conormal bundle の様に一般の次元 n の既約多様体に対して

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n,N) \qquad p \mapsto \mathbb{T}_p X$$

なる Gauss map と呼ばれるものを定めてやる事ができます. この時 $\dim \gamma(X)$ を Gauss rank と呼ぶ事にすると, 多くの場合これは $\dim X$ に等しくなります. もしそうでない時 X は developable variety と呼ばれます.

この γ を用いて新たに X の tangent variety というものが定義できます.

定義 4.4. 任意の多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対して,

$$\mathrm{Tan} X := \bigcup_{T \in \gamma(X)} T$$

を X の *tangent variety* という.

一般に次の様な関係があります.

命題 4.5. $\mathrm{Tan}X \subset \mathrm{Tan}^{\star}X \subset \mathrm{Sec}X$.

私は今後の目標として, このような developable variety を Gauss map や tangent,secant variety を用いて, ある種の分類を施してやる事を目指しています.

参考文献

[1] Fischer,G. & Piontkowski,J. *Ruled Varieties.*Vieweg,2001

[2] Piontkowski,J. *Developable Variety of Gauss rank 2.*Preprint,2001

[3] Harris,J. *Algebraic Geometry-a first course.*Springer,1992

[4] Hartshorne,R. *Algebraic Geometry.*Springer,1977

[5] 川又雄二郎, 「射影空間の幾何学」. 朝倉書店,2001