Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

有馬研一郎（北大 COE）
Ken-ichiro Arima, Hokkaido Univ.

Abstract. Rational double points and simple elliptic singularities are characterized by their equations in characteristic 0. They are known as quasihomogeneous singularities. The classification algorithm of their equations is also studied. We try to extend these results to the case of positive characteristic.

1　2次元正規特異点

Definition 1. k を代数的閉体とする．$n+1$ 変数多項式 $f \in k[x_0, \cdots x_n]$ で定まる超曲面が点 $P = (p_0, \cdots, p_n)$ で 特異点 を持つとは

$$f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

であるときをいう．

また，$A = k[x_0, \cdots x_n]/(f)$ が商体 $Q(A)$ の中で正規であるとき，この超曲面を 正規曲面 という．

直観的には尖った点や折り目を連想すればよい．また 2 次元 $(n = 2)$ の場合，正規であることと高々孤立特異点であることは同値である．

Definition 2. 正規代数多様体の最小特異点解消 $\mu : Y \longrightarrow X$ に対し $R^i\mu_*\mathcal{O}_Y = 0$ が $i > 0$ で成り立つとき，X は 有理特異点 を持つという．

Fact 3. 2 次元の場合，以下は同値である．

(1) 有理 2 重点である．

(2) 標準特異点である．

(3) 絶対孤立 2 重点である．

(4) 単純特異点である．

(5) 最小特異点解消の既約例外因子が全て (-2)-曲線である．

Definition 4. 正規代数曲面の最小特異点解消の例外集合が非特異楕円曲線であるとき，X は 単純楕円型特異点 を持つという．

以下の 2 つは標数 0 の場合である．

Fact 5. 2 次元の有理 2 重点の標準形は，下記の 5 つである．

$\mathrm{A}_m: \ z^2+x^2+y^{m+1} \quad (m \geq 1)$

$\mathrm{D}_m: \ z^2+x^2y+y^{m-1} \quad (m \geq 4)$

$\mathrm{E}_6: \ z^2+x^3+y^4$

$\mathrm{E}_7: \ z^2+x^3+xy^3$

$\mathrm{E}_8: \ z^2+x^3+y^5$

Fact 6. 2 次元の単純楕円型特異点で超平面特異点であるものは，次の 3 つの標準形で表される．

$\widetilde{\mathrm{E}}_6: \ x^2z-4y^3+g_2yz^2+g_3z^3=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_7: \ x^2-4y^3z+g_2yz^3+g_3z^4=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_8: \ x^2-4y^3+g_2yz^4+g_3z^6=0 \qquad \text{where} \quad {g_2}^3-27{g_3}^2 \neq 0$

Definition 7. $w=(w_0,w_1,w_2) \in \mathbb{Q}^3_{\geq 0}$ に対し単項式 $M=a\,x^{e_0}y^{e_1}z^{e_2} \in k[[x,y,z]]$ の重みを $w(M)=\sum e_iw_i$ と定める．$f \in k[[x,y,z]]$ は以下を満たすとき重み w に関して <u>半擬斉次多項式</u> であるという：$f=f_{w=1}+f_{w>1}$ と書けて (i) $f_{w=1}$ に現れる 0 でない係数の単項式 M について $w(M)=1$．(ii) $f_{w>1}$ に現れる 0 でない係数の単項式 M について $w(M)>1$．($f_{w>1}=0$ の場合は <u>擬斉次多項式</u> である．)

Fact 5, 6 より次の事実が解る．

Fact 8. 標数 0 では有理 2 重点および単純楕円型特異点は擬斉次多項式である．

2 正標数の特異点

標数 0 の 2 次元正規特異点は，与えられた方程式を標準形に帰着するアルゴリズムも知られている ([KM], Section 4.2 他)．一方正標数では困難である．以下は [GK] による標数 2 の 2 重点の分類アルゴリズムの概要である．

(1) $f_2 \sim x^2+yz \Rightarrow \mathrm{A}_1$

(2) $f_2 \sim yz \Rightarrow \mathrm{A}_m$ or non-normal

(3) $f_2 \sim x^2$. $f=x^2+\psi(y,z)+x\varphi(y,z)$. $O(\psi) \geq 3$, $O(\varphi) \geq 2$.

- (3-1) $\psi_3 \equiv 0 \Rightarrow$ not RDP
- (3-2) $\psi_3 \sim y^2z+yz^2 \Rightarrow \mathrm{D}_4$
- (3-3) $\psi_3 \sim y^2z$. $f \sim x^2+y^2z+axyz+bxz^2+O(4)$.
  - (3-3-1) $b \neq 0 \Rightarrow \mathrm{D}^0_5$ $(a=0)$ or D^1_5 $(a \neq 0)$

:

このように，標数 0 と比べると大変複雑である．

次に，標数 0 との違いを定義方程式でみてみよう．例えば，標数 3 の有理 2 重点は 9 種類に増える．

$\mathrm{A}_m:\ z^2+x^2+y^{m+1}\quad (m\ge 1)$

$\mathrm{D}_m:\ z^2+x^2y+y^{m-1}\quad (m\ge 4)$

$\mathrm{E}_6^0:\ z^2+x^3+y^4$

$\mathrm{E}_6^1:\ z^2+x^3+y^4+x^2y^2$

$\mathrm{E}_7^0:\ z^2+x^3+xy^3$

$\mathrm{E}_7^1:\ z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$

$\mathrm{E}_8^0:\ z^2+x^3+y^5$

$\mathrm{E}_8^1:\ z^2+x^3+y^5+x^2y^3$

$\mathrm{E}_8^2:\ z^2+x^3+y^5+x^2y^2$

すなわち，正標数では有理 2 重点が既に擬斉次多項式になっていない．

有理 2 重点の型を X_m^r とすると，半擬斉次多項式に関しては重みで X と m の判別は可能である．r は決定出来ない．

Theorem 9 ([Ro]). 重み $\mathcal{A}_m=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{m+1})$, $\mathcal{D}_m=(\frac{1}{2},\frac{1}{m-1},\frac{m-2}{2(m-1)})$, $\mathcal{E}_6=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$, $\mathcal{E}_7=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{9})$, $\mathcal{E}_8=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5})$ に関する擬斉次多項式は有理 2 重点を定める．その型はそれぞれ A_m, D_m^r, E_6^r, E_7^r, E_8^r.

正標数の単純楕円型特異点の定義方程式の標準形は，超平面の場合が廣門氏によって分類された ([Hi], Corollary 4.3)．これらは擬斉次多項式になっている．

Theorem 10 ([Hi], Corollary 4.3).

char 2

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6:\ x^2z+y^3+a_1xyz+a_3xz^2+a_4yz^2=0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_7:\ x^2+y^3z+a_1xyz+a_3xz^2+a_4yz^3=0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_8:\ x^2+y^3+a_1xyz+a_3xz^3+a_4yz^4=0$$

$$\text{where } a_i\in k,\ a_1^5a_3a_4+a_1^4a_4^2+a_3^4+a_1^3a_3^3\ne 0$$

char $\ne 2$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6:\ y(y-z)(y-\lambda z)-x^2z=0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_7:\ yz(y-z)(y-\lambda z)-x^2=0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_8:\ y(y-z^2)(y-\lambda z^2)-x^2=0,\qquad \text{where } \lambda\in k,\ \lambda\ne 0,1$$

これに加え次のことがわかる．

Theorem 11. 次の重みを持つ半擬斉次多項式が孤立特異点の定義方程式ならば，単純楕円型特異点を定める．

$$\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big),\ \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\Big),\ \Big(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\Big)$$

Proof. 重みが $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ の場合，$f_{w=1}$ に現れる単項式は x^2, xyz, xz^3, y^3, y^2z^2, yz^4, z^6 であり，標数が 2 で孤立特異点であれば各項の重みを変えずに $f_{w=1} = x^2 + y^3 + a_1xyz + a_3xz^3 + a_4yz^4$ と変形出来る．$f_{w>1}$ が特異点の性質に影響しないことは重み付きブローアップを行うことで解る．$f_{w<1} \neq 0$ の場合は全て有理 2 重点であることが確認出来る．他の重みについても同様.

これを用いて標数 2 の 2 重点の分類アルゴリズムを拡張することを試みる．[GK] によると有理 2 重点にならないもののうち，孤立特異点であるものは以下のようになっている.

(1) (non-normal)

(2) (2-1) $x^2 + O(4)$

(2-2) $x^2 + xy^2 + O(4)$

(2-3) $x^2 + xyz + O(4)$

(3) (3-1) $x^2 + y^3 + O(6)$

(3-2) $x^2 + y^3 + xyz^3 + dxz^4 + O(6)$, $d \in k$

(3-3) $x^2 + y^3 + xyz^2 + dyz^4 + O(6)$

(3-4) $x^2 + y^3 + xz^3 + dyz^4 + O(6)$

(3-5) $x^2 + y^3 + xyz + O(6)$

このうち (2) からは主に $\widetilde{\mathrm{E}}_7$ 型が，(3) からは主に $\widetilde{\mathrm{E}}_8$ 型が現れることが解る.

参考文献

[Hi] M.Hirokado, *Deformations of rational double points and simple elliptic singularities in characteristic p*, Osaka Journal of Math. 41 (2004), pp605–616

[GK] G.-M.Greuel, H.Kröning, *Simple singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 203 (1990), pp339–354

[KM] Y.Kollár, S.Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge University Press(1998)

[Ro] M.Roczen, *Recognition of simple singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 210 (1992), pp641–654